بحوث العمليات

اعداد الاستاذ
م.م عبد الحسن رحيم

2020 / 2019

مقدمة عن بحوث العمليات

بحوث العمليات اسلوب علمي نشأ وتطورا بفضل مساهمات عديدة من العلماء في فترات زمنية مختلفة فالبرامج التي قدمتها كل ياني عام 1959 وجوردن عام 1873 كورسي 1903 شكلت روافد لتطور بحوث العمليات كما اسهمت حركه الادارة العلمية والدراسات التي تمخضت عنها (دراسه الوقت والحركه) ومخططات جانت وهو احد رواد الاداره العلميه التي طورت الي ما يعرف الان باسلوب(Pert) اي اسلوب تقييم ومراجعه البرامج في وتطور هذا الاسلوب وتعتبر الدراسة التي قدمها المهندس الدنماركي A.K.Erlang عام 1917 بدايه نظرية صفوف الانتظار احد اساليب بحوث العمليات و في عام 1921 بدا E.Borel اول محاوله صياغه نظرية المباريات Gametheoryعقبه جونسون فون نيومان الذي نشر النظريه بعدما اثبتت النظريه الاساسيه في نظريه النهاية العظمى Minimax في الحرب العالميه الثانيه بشكل في بريطانيا اول فريق لبحوث العمليات بهدف مساعده الاداره الحربيه في استخدام الرادارات الحديثة لرصد الطائرات الالمانية ثم شكلت مجموعة برئاسة عالم الطبيعة البريطاني M.S.Blackett لدراسة استخدام المعدات الحربيه ضد القوات الالمانية وقد حفزت نتائج فريق بحوث العمليات البريطانية السلطات العسكريه الامريكية فقامتها هي الاخرى في تكوين فريق مماثل أوكلت اليه مهام عديدة ومن بينها معالجه المشكلات المتعلقة بنقل المعدات والمؤذن والذخائر الحربيه وتخطيط عملية زرع الالغام في البحار والمحيطات كما ان السلطات الكنديه قامت بتكوين فريق بحوث العمليات اثناء الحرب العالمية الثانية للقيام بأبحاث في مجالات الاستخدام الامثل للموارد المتاحة وتوظيفها في خدمة العمليات البحريه وما ان وضعت الحرب العالمية الثانيه اوزارها حتى بدات الاساليب العلمية لبحوث العمليات بالانتشار في اوساط المؤسسات المدنيه وتعددت اساليبه وتوسعة تطبيقاتها و سوف نتناول في هذا الكتاب شرح تلك الاساليب مع الاستعانة بالامثلة لهذا الغرض.

خطوات تطبيق اساليب بحوث العمليات

1. تحديـــد وصياغة المشكلة Formulation the problem :

يقوم فريق بحوث العمليات في هذه المرحله بالتشخيص الدقيق للمشكله قيد الدراسه لتحديد كافة المتغيرات وتصنيفها الى متغيرات مسيطر عليها ومتغيرات لا يمكن السيطره عليها و قبل ذلك يجب ان يكون الفريق على بينه من الهدف ففي منشاه صناعيه على سبيل المثال قد يكون الهدف الحصول على اكبر ربح مادي وقد يكون الهدف الحصول على ربح اجتماعي حتى لو ادى ذلك إلى خسائر ماديه و على اساس الهدف تحدد المتغيرات ذات العلاقه في بلوغ الهدف المتوخى وفي هذه المرحله يتم تحديد كافه القيود الماديه والقانونيه والتي تحد من تصرف متخذ القرار في مرحله المفاضله بين البدائل المتاحه ان التحديد الدقيق للمشكله يعتبر اساسا لكل الخطوات اللاحقه وان الخطا في تحديد المشكله يؤدي الى بعثره الجهود والوصول الى حلول لمشاكل لا وجود لها وبالتالي فان تلك الحلول لاتنفع.

2. بناء النموذج رياضي للمشكلة Constructing the model :

يتم في هذه الخطوات تجسيد المشكلة او النظام قيد الدراسه بشكل رياضي لتسهيل العرض و التحليل الرياضي وايجاد العلاقات التي تربط المتغيرات و ابراز اهميه المتغيرات والبيانات الخاصه بالمشكله اضافه الى ان النموذج يمكن من دراسه النظام القائم وتحليله دون اي تغيير في النظام ويتكون من:

أ- المتغيرات الاساسيه والمعاملات الفنية Decision variables المتغيرات الاساسيه هي المتغيرات المجهوله التي يتم ايجاد قيمها بواسطه حل النموذج الرياضي، اما المعاملات الفنيه فهي معدلات الاستخدام وهي تمثل متغيرات معلومه و مسيطر عليها والمعاملات الفنيه قد تكون محدده او احتماليه معدلات الانتاج والاستهلاك تعتبر معاملات فنيه وكذلك تكلفه الوحده الواحده او الوقت اللازم لانتاج وحده واحده قد تمثل هي الاخرى معاملات فنيه في النموذج الرياضي.

ب- القيود Constraints : او الحدود او المتباينات التي تمثل حدود او قيود استخدام الموارد المتوفره في نموذج.

ج- داله الهدف Objective Function : وهي تمثل الصيغة الرياضية للهدف وهي مقياس لكفاءة النظام.

3. اشتقاق الحل من النموذج Deriving a solution from the model:

في هذه الخطوات يستخرج الحل المقترح للمشكله عن طريق حل النموذج الذي يمثلها و هناك طريقتين لحل النموذج هما :

أ - الطريقه الرقمية

ب -الطريقه الوصفية

4. اختبار النموذج والحلول Testing the model and the solution:

الحل الذي تم التوصل اليه في الخطوات السابقه لا بد من تقييمة لبيان جدواه ولتقييمة يمكن اتباعها احدى الطريقتين اولهما مقارنه نتائج النظام الحالي كما هو عليه بالنتائج التي تم التوصل اليها من حل النموذج الطريقه الاخرى لاختبار نموذج والحلول المستخرج منها هي استخدام البيانات الماضيه في مقارنه الاداء الحالي للنظام والاداء الذي تم التوصل باستخدام النموذج اذا اثبتت المقارنه باستخدام اي من الطريقتين أن الحلول التي تم التوصل اليها من خلال النموذج يمكن ان ترقى بالاداء الى مستوى افضل فأن تلك الحلول جديرة بالاهتمام والتطبيق.

5. الرقابة على الحل Establishing control over solution :

من اجل ان يكون الحل الذي تم اختباره في الخطوه السابقه عمليا يجب ان يعكس النموذج كافه الظروف والمتغيرات والعلاقات في المشكله او النظام وضع الدراسه إذ ان الافتراضات التي يبنى عليها النموذج يجب ان تكون قائمه فعلا ولكن من المعروف ان الظروف والافتراضات التي جسدها النموذج قابلة للتغيير في اي لحظه لذا كان من الضروري مراعاه هذا الجانب وذلك بمراقبه كافه المتغيرات والعلاقات والظروف التي اخذت بنظر الاعتبار عند صياغه النموذج واجراء تغييرات المناسبه في النموذج عند حدوث اي تغيير في العلاقات او الظروف او الاهداف و بالشكل الذي يؤدي الى الابقاء على واقعيه النموذج اي تمثيله للواقع بكل مكونات.

6. التنفيذ Implementation:

وهذه تعتبر الخطوه الاخيره اذ مجرد الاقتناع بجدوى الحل الذي تم التوصل اليه من النموذج والتاكد من انه اخذ بالاعتبار كافه المتغيرات والعلاقات والظروف والامكانيات في المشكله موضع الدراسه عندئذ تبدا هذه المرحله وفيها يتم ترجمه الحل في صيغه اجراءات عمليه تطبيق يراقب تطبيقها من قبل فريق بحوث العمليات الذي يشكل لهذا الغرض للتاكد من مدى استجابة النظام للاجراءات الجديده واجراء التغييرات عند الحاجه ولضمان التنفيذ الكفؤ لكافة الاجراءات التي تم تضمنها حل النموذج يجب تحقيق مشاركه فعاله للقيادة او الاداره في كافه خطوات التطبيق انفة الذكر بدا من تحديد المشكلة.

خصائص بحوث العمليات

1- اعتمادها مدخل النظام في دراستها للمشاكل System orientation اي ان نشاط في المشكله موضع الدراسه يؤثر ويتاثر بغيره من الانشطه الاخرى.
2- اعتمادها الفريق المتعدد الاختصاصات Use of interdisciplinary teams.
3- اعتماد الطريقه العلمية.
4- استخدام النماذج الرياضيه Models.
5- التنبؤ : بحوث العمليات لا تعني بسلوك الظاهره في الوقت الحاضر بل تمتد لتشمل التنبؤ بسلوك الظاهره في المستقبل.
6- انها تساعد في تطوير نوعيه القرارات Improve the quality of decisions.

الدكتور وجيه عبد الحسن رجيه

البرمجة الخطية Linear Programming

المقدمة

ترجـــع بدايه فكرة البرمجه الى تطبيق طريقه المدخلات والمخرجات التي قدمها الاقتصاد المعروف , WW lenotief، في عام 1920 وقد شـــــــاع استخدام هذا الاسلوب بعد انتهاء الحرب العالميه الثانيه وفي عـــام 1947 قدم العالم الرياضي George. B. Datzing ، اسلوبا رياضياً متكاملا في معالجه مشكلات معقده في مجالات مختلفه باستخدام البرمجه الخطيه وقد اطلق على هذا الاسلوب طريقة السمبلكس (الطريقه المبسطة) وكان اول استخدام لهذا الاسلوب في القوات الجويه الامريكيـــــه لتحديد افضل البرامج في التدريب والصيانه والتجديد وتحليل ارخص الطرق الجويه ثم امتد استخدامها الى حقول كثيره كالتسويق والانتاج وغيرها حتى اصبحت اكثر اساليـــــــب بحوث العمليات شيوعا ويرجـــع سر هذا الشيوع الى النتائج الجيـــــده التي اظهرها استخدامها كما ان التطورات في حقل الانتاج وما تظمنته من اقامه المشاريع الضخمه والتي تقوم بانتاج كميات هائله من المواد و بانواع متعدده باستخدام الالات المختلفـــــه الانواع والطاقـــات كل ذلك ادى الى تعقيد عمليه اتخاذ القرار اذا كان لابد من الركون الـــى اساليب رياضيه متقدمـــه ويمثل اسلوب البرمجـــــه الخطيه احد اهم الاساليب المستخدمه وقد كان لاستخدام الحاسب الالكتروني في حل نماذج البرمجه الخطيـــــه اثر كبير في تسهيل مهمه اتخاذ القرارات باستخدام هذا الاسلوب وبالتالي شيوع استخدامه .

مفهوم البرمجة الخطية

عند تعريفه للبرمجه الخطيه يذكر Robert. J.Thierauf ، ان افضل طريقه لتعريف البرمجه الخطيه هي التمعن بكلماتها فالصفه خطيه تستخدم لوصف العلاقه بين اثنين او اكثر من المتغيرات حيث يترتب على اي تغيير في احداهما بنسبه معينه تغير المتغيرات الاخرى بنفس النسبه اما كلمه البرمجه فهي تعني استخدام اساليب رياضيه معينه للوصول الى افضل استخدام للموارد المحدده للمنشات وكلمة البرمجة تعني الحساب وهي تعني هنا. ايجاد بعض المجاهيل من مجموعه معادلات او متباينات بوجود شروط معينه يعبر عنها بعلاقات رياضيه.

اما Giuseppe .M. Ferrerodi Roccaferrera فيشير الى اختلاف تعريف البرمجه الخطيه باختلاف مهنه صاحب التعريف فرجال الاعمال ينظروا الى البرمجه الخطيه باعتبارها وسيله فنيه تستخدم في البحث بين الحلول العديده عن تلك الحلول التي تنسجم مع اهدافهم المحدده اما الاقتصاديون فيعرفوا البرمجه بانها طريقه توزيع الموارد المحدده يؤدي الى اشباع مجموعه من الطلبات بوجود مجموعه من القيود اما علماء الرياضيات فهم يعرفوا البرمجه الخطيه بأنها عمليات حل مشاكل خاصه تكون فيها داله الهدف تعظيم او تدنيه وبوجود مجموعه من القيود او الموارد اما Lawrence Lapin فيرى ان البرمجه تعني هنا شكل من اشكال التخطيط و تستلزم التوزيع الاقتصادي للموارد النادره من اجل مواجهه الاحتياجات الاساسيه لذا فان البرمجه تساهم في رسم الخطه التي تنطوي على التوزيع الكفوء لعوامل الانتاج بذلك الشكل الذي يحقق الاهداف المطلوبه بدرجه عاليه من الكفاءه ويشير اصطلاح البرمجه الخطيه الى ان تلك الخطط يتم توصل اليها عن طريق اسلوب رياضي يستلزم العلاقه الخطيه اي ان المساله النهائيه يمكن تصويرها بشكل خطوط مستقيمة، مستويات او ارقام هندسيه مماثله

في الشكل البياني لها لا يمكن ان يتضمن اي منحنى النموذج الرياضي يظهر المسألة وما يتعلق بها من حاجات واهداف الاداره بواسطه تعبيرات جبريه تمثل بخطوط مستقيمة.

فرضيات البرمجة الخطية Linear Programming Hypothesis

1 ـ الخطيـــة Linearity

اي ان هناك علاقات ثابته بين المتغيرات التي تنطوي عليها المساله وتعني العلاقه الخطيه في داله الهدف ان كل فعالية تسهم في تحقيق داله الهدف بنسبه ثابته مرتبطه بمستوى تلك الفعاليه اما العلاقه الخطيه في القيود فهي تعني ان هناك تناسب بين الموارد وبين مستوى الفعاليات التي تستخدم تلك الموارد.

2 ـ الاضافـــة Additivity

هذه الفرضيه تعني ان مجموع كميه الموارد المستخدمه لكل الفعاليات يجب ان يساوي مجموع المواد المستخدمه في كل فعاليه مفرده وهي تعني في داله الهدف ان الربح الكلي يساوي مجموعه ارباح الانشطه التي تتكون منها داله الهدف اما في حالة كون داله الهدف تدنية تكاليف فان التكلفه الاجماليه عباره عن مجموعه تكاليف الانشطه التي تتكون منها داله الهدف.

3 ـ القابليه للتجزئـــة Divisibility

هذه الفرضيه تعتبر الزاميه في البرامج المثلى ذوات القيم الكسريه وهى تعني امكانية تجزئه الموارد المستخدمه و الوحدات المنتجه اي ان اي متغير في المساله يمكن ان ياخذ قيم كسرية.

4 ـ التحديـــــد او التاكـــــد Certainty

والمقصود بالتحديد ان جميع العلاقات الرياضيه والمعاملات الفنيه والقيم المطلقه معرفه ومؤكده وثابته اي غياب صفه الاحتمال فنسب الاستخدام للموارد على سبيل المثال يجب ان تكون ثابته للفتره موضع البحث لذا يجب التعبير عنها بقيم محدده مفردة.

5 ـ اللاسلبية Non – negativity

وتعني هذه الفرضيه ان كل المتغيرات التي تدخل في المسأله يجب ان تكون مساويه او اكبر من الصفر و يعبر عن هذه الفرضيه بقيود تدعى القيود غير السالبه .

أساليب حل نماذج البرمجة الخطية

هنالك العديد من الأساليب لحل نماذج البرمجة الخطية منها:-

1. الطريقة البيانية The Graphical Method
2. الطريقة الجبرية The Algebraic
3. طريقة السمبلكس Simplex Method
4. طريقة السمبلكس ذات الوجهين The Two - Phase Simplex Method

سوف يقتصر شرحنا على الطريقتين البيانية والمبسطة لاهيتهما

اولا : الطريقة البيانية The Graphical Method

تستخدم هذه الطريقة في حل المسائل ذات المتغيرين عادةً لذا فإنها غير عملية لان المشاكل في الواقع تتكون من العديد من المتغيرات في (العائدة أكثر من اثنين) وبموجبها يتم تحويل النموذج الرياضي الى شكل بياني يسهل عملية التحليل وترجع اهمية هذه الطريقة كونها توضح المفاهيم الاساسية لكيفية استخدام البرمجة الخطية في حل المشاكل الكبيرة اضافة الى استخدامها في توضيح كيفية استخدام طريقة السمبلكس في حل نماذج البرمجة الخطية.

الخطـــــوات

1. الصياغة الرياضية للمشكله Formulation the mathematical model .
2. تحويل المتباينات إلى المعادلات Convert inequalities to equation .
3. رسم القيود بيانيا وتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة Photo every equation on the diagram and determine the feasible region.وفق القواعد الاتية :

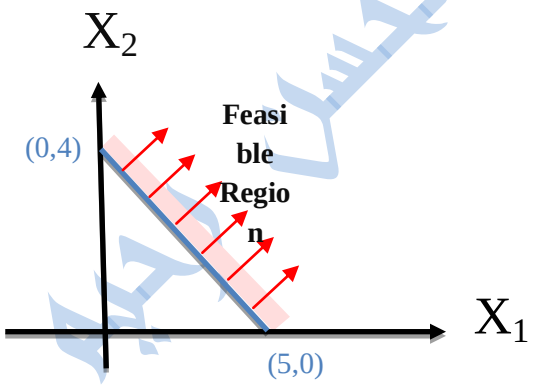
اولاً : يأخذ القيد احد الاشكال الاتية :

أ -عندما يكون القيد اكبر من او يساوي (≥)

مثال :-

$$4X_1 + 5X_2 \geq 20$$

يكون الرسم والمنطقة الملائمة كمايلي :



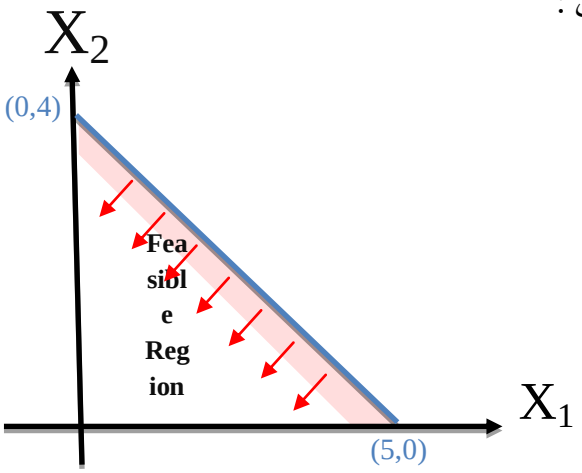
شكل (2-2)

ب -عنما يكون القيد اقل من اويساوي (≤)

مثال :-

$$4X_1 + 5X_2 \leq 20$$

يكون الرسم والمنطقة الملائمة كمايلي :



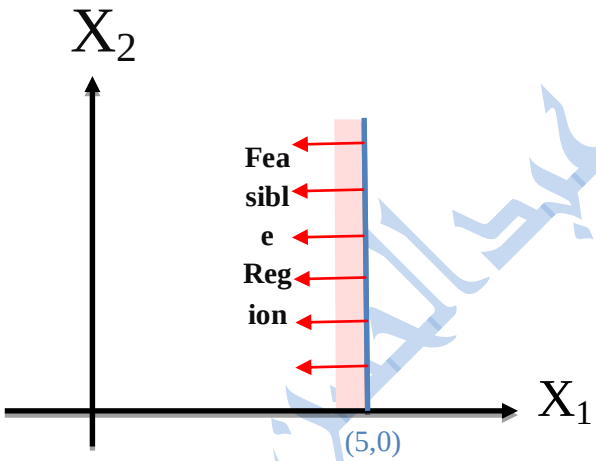
شكل (2-3)

ج- عندما يحتوي القيد متغير واحد

مثال :-

$$X_1 \leq 5$$

يكون الرسم والمنطقة الملائمة كمايلي :



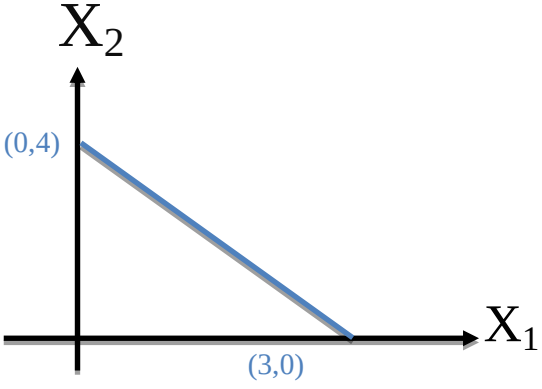
شكل (2-4)

د- عنما يكون القيد بهيئة مساواة فأن المنطقة الملائمة هي القيد نفسة

مثال1 :-

$$4X_1 + 3X_2 = 12$$

يكون الرسم والمنطقة الملائمة كمايلي :

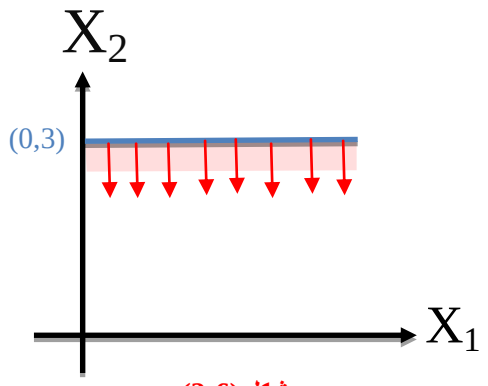


شكل (2-5)

مثال2 :-

$$X_2 \leq 3$$

يكون الرسم والمنطقة الملائمة كمايلي :



شكل (2-6)

4. تحديد منطقة الحل او منطقة الامكانيات المتاحة Feasible space or Feasible Region وتحديد الحل الامثل Optimum solution والذي يقع عند نقاط التطرف (والتي تمثل أركان منطقة الحلول الممكنة) حيث يتم ايجاد قيمة دالة الهدف عند هذا النقاط Determine the value of the objective function at each extreme point .

ولتوضيح كيفية التوصل الى الحل بأستخدام الطريقة البيانية model سوف نطبق الخطوات اعلاه على المثال الاتي:

Example 1:

A Firm produced two products these products are processed on two different machines. The time required to manufacture one unit of each of two product and profit for each product and the daily capacity of the two machines are given in the table below:

منتجات ينتج انتاجها بأستخدام ماكنتين الزمن اللازم لانتاج الوحدة الواحدة من المنتوج كما موضح في الجدول الاتي:

Product المنتوج	Machine الماكنة (1)	Machine الماكنة (2)	Profit الربح
A	3	2	28
B	1	4	27
Capacity	200	300	

Formulate this as a linear programming problem and determine the optimum solution that maximize the total profit?

المطلوب : الصياغة الرياضية للمشكلة بأستخدام البرمجة الخطية وحله بأستخدام الطريقة البيانية؟

Solution: -

1. الصياغة الرياضية للمسأله:

Let No. of product A = X_1

Let No. of product B = X_2

Max (Z) = 28 X_1 + 27X_2

Subject to:

$3X_1 + X_2 \leq 200$ ..... (1)

$2X_1 + 4X_2 \leq 300$ ..... (2)

$X_1, X_2 \geq 0$

2. تحويل المتباينات الى معادلات:

$3X_1 + X_2 = 200$ ..... (1)

$2X_1 + 4X_2 = 300$ ..... (2)

3. رسم القيود بيانياً:

$3X_1 + X_2 = 200$ ..... (1)

نفرض ان X_1 = صفر

$3(0) + X_2 = 200$

$0 + X_2 = 200$

$\therefore X_2 = 200$

النقطة (0,200) تمثل تقاطع القيد بالمحور X_2

نفوض $X_2 = 0$

$3X_1 + 0 = 200$

$\therefore X_1 = \frac{200}{3} = 67$

النقطة (67,0) تمثل تقاطع القيد بالمحور X_1

$2X_1 + 4X_2 = 300$ ..... (2)

نفرض ان X_1 = صفر

$$2(0) + 4X_2 = 300$$

$$\therefore X_2 = \frac{300}{4} = 75$$

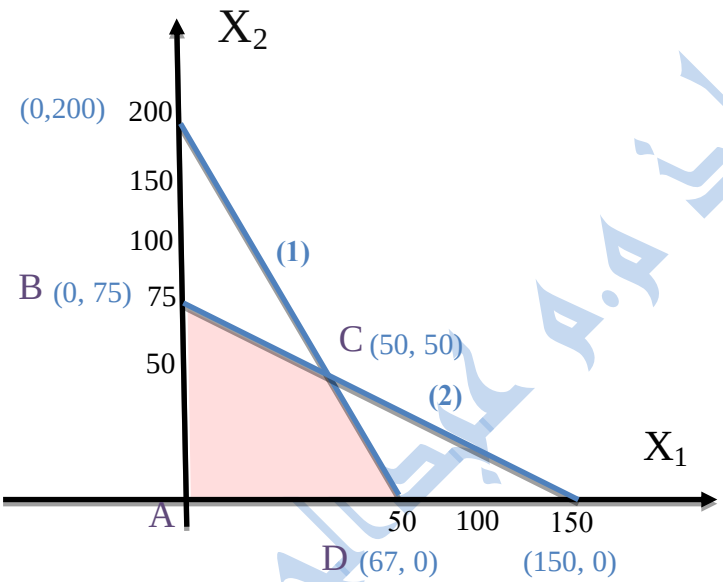
النقطة (0,75)

نفوض $X_2 = 0$

$$2X_1 + 4(0) = 300$$

$$\therefore X_1 = \frac{300}{2} = 150$$

النقطة (150,0)



شكل (1-2)

4. تحديد منطقة الحل او منطقة الامكانيات المتاحة Feasible space or Feasible Region

وهي المنطقة التي تحقق كل الشروط الواردة في المسألة (كل القيود الوارده في المخطط البياني) وهي هنا المنطقة المظلله A,B,C,D وكقاعدة عامة الحل يقع عند اركان المنطقة والتي تم تظليلها وبالنظر لكون احداثيات جميع الاركان معروفة بأستثناء C لذا نستخرج احداثيات C والتي تقع عند تقاطع القيدين (1) و (2)

$$3X_1 + X_2 = 200 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2X_1 + 4X_2 = 300 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

تضرب المعادلة (1) بـ (4) فينتج

$12X_1 + 4X_2 = 800$ ……. (1)

نطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) الجديدة

$12X_1 + 4X_2 = 800$ ……. (1)

$2X_1 + 4X_2 = 300$ ……..…. (2)

$10X_1 = 500$

$\therefore X_1 = \frac{500}{10} = 50$

بالتعويض في المعادلة (2)

$2(50) + 4X_2 = 300$

$100 + 4X_2 = 300$

$4X_2 = 200$

$\therefore X_2 = \frac{200}{4} = 50$

اي احداثيات C (50,50)

5. **تحديد الحل الامثل (الحل الذي يضمن اكبر قيمة لدالة الهدف)** عن طريق تعويض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف وكما يلي :

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 28X_1 + 27X_2$
A (0,0)	**Z = 28(0) + 27(0) = 0**
B (0,75)	**Z = 28(0) + 27(75) = 202**
C (50,50)	**Z = 28(50) + 27(50) = 2750**
D (67,0)	**Z = 28(67) + 27(0) = 1876**

Example 2: Find the Maximum value of

$Z = 7X_1 + 3X_2$

Subject to:

$2X_1 + X_2 \leq 8$ …… (1)

$2X_1 + 10X_2 \leq 20$ …….. (2)

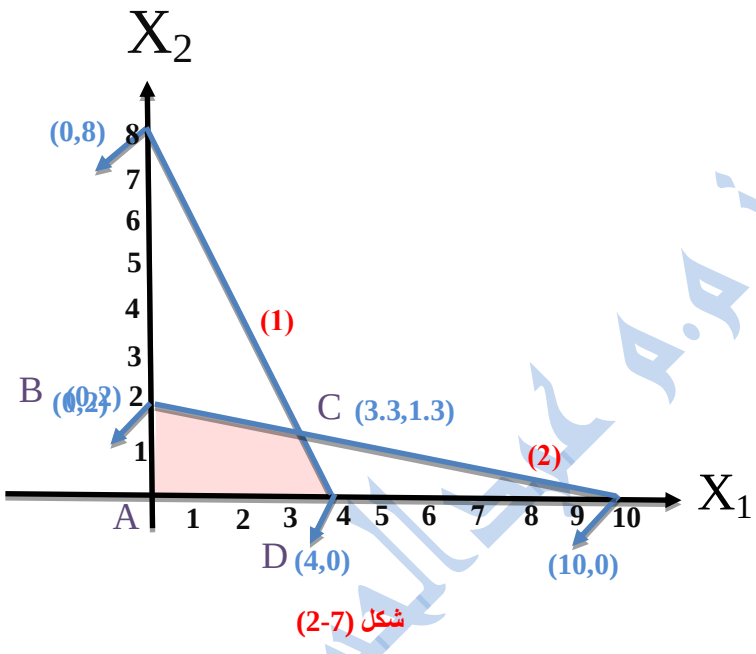
$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

تحديد نقاط تقاطع القيدين في المحورين بعد تحويل المتباينتين إلى معادلتين

القيـــد	X_1	X_2
$2X_1+X_2 = 8$	0	8
	4	0
$2X_1+10X_2 = 20$	0	2
	10	0

رسم القيدين بيانياً :



شكل (2-7)

كما نشاهد اعلاه ان المنطقة (A B C D) تمثل منطقة تحقق القيدين لذا فإن الحل الأمثل يقع عند أركان هذه المنطقة , احداثيات الأركان معلومة باستثناء النقطة (C) والتي تقع عند تقاطع القيدين لذا تقاطع المعادلتين لاستخراج هذه النقطة:

$$2X_1 + 10X_2 = 20 \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$2X_1 + X_2 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$9X_2 = 12$$

$$X_2 = \frac{12}{9} = 1.3$$

تعوض القيمة المستخرجة لـــ X_2 في المعادلة (1)

$$2X_1 + 1.3 = 8$$
$$2X_1 = 6.7$$
$$X_1 = 3.3$$

∴ احداثيات (2) هي (3.3 , 1.3)

تحديد الحل الامثل عن طريق تعويض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف :

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 7X_1 + 3X_2$
A (0,0)	Z = 7(0) + 3(0) = 0
B (0,2)	Z = 7(0) + 3(2) = 6
C (3.3 , 1.3)	Z = 7(3.3) + 3(1.3) = 23 + 3.9 ≃ 27
D (4.0)	Z = 7(4) + 3(0) = 28

أي أن الحل يقع عند النقطة التي تمثل أعلى قيمة لـ (Z) أي النقطه (D) فالحل:

$Z = 28$
$X_1 = 4$
$X_2 = 0$

Example 3:

The Redwood Furniture company Manufactures table and chairs as part of Its Line of Patio Furniture. following Table Shows the resources consumed and the until profits for each product. For Simplicity, we will assume that only two resources are consumed in manufacturing the patio Furniture (300 board Feet in Inventory) and Laboure (110 hours Available) The owner wants to determine how many tables and chairs should be made to maximize the total profit for patio furniture

Solution: -

الهدف : أنتاج المناضد والكراسي (Table & chairs) بأستخدام الموارد المتيسره من المواد وساعات العمل لتحقيق اعظم ربح ممكن

الموارد Resource	الاحتياجات لكل وحدة Unite Requirements		الكميات المتوفره Amount Available
	Table	chairs	
Wood (board feet)	30	20	300
Laboure (hours)	5	10	110
Unit profit ربح الوحدة	$6	$8	

Letting X_1 = Number of tables Made
X_2 = Number of chairs Made

Objective Function:

Max (Z) = $6X_1 + 8X_2$

Subject to:

(Laboure) قيد ساعات العمل $30X_1 + 20X_2 \leq 300$ ……. (1)

(Wood) قيد المواد المتيسره $5X_1 + 10X_2 \leq 110$ …….... (2)

$X_1, X_2 \geq 0$

اولاً : تحويل المتباينة الى معادلات

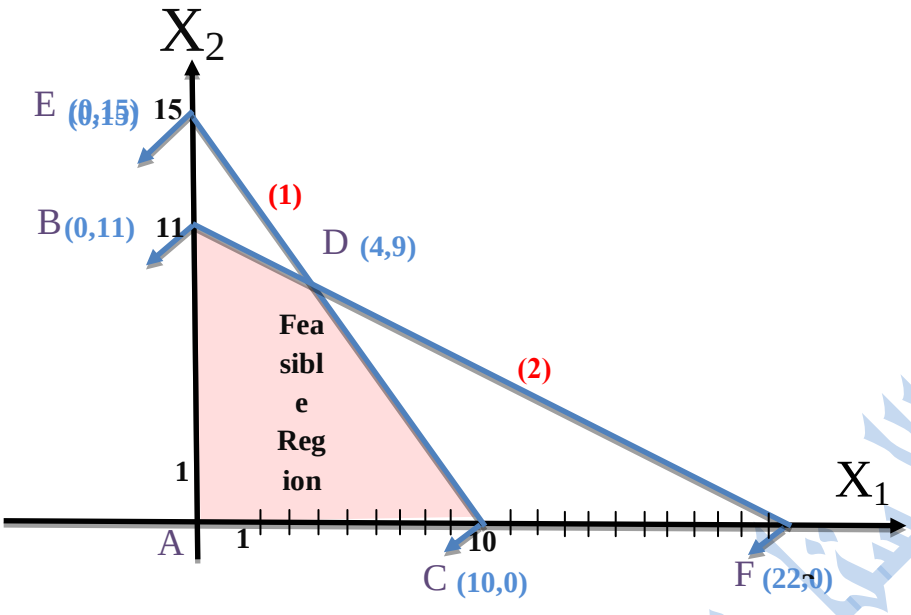
$30X_1 + 20X_2 = 300$ …….. (1)

$5X_1 + 10X_2 = 110$ …….... (2)

ثانياً : رسم القيود بيانياً

Constraints	Points
$30X_1 + 20X_2 = 300$	(0,15) (10,0)
$5X_1 + 10X_2 = 110$	(0,11) (22,0)

ثالثاً : نحدد المنطقة الملائمة وهي كما في الشكل (المنطقة المظلله) واركانها النقاط (A,B,D,C) كما في الشكل



شكل (2-8)

رابعاً : تحديد منطقة الحلول الممكنة Feasible Region وكما يظهر في الشكل البياني فأن المنطقة المضلله (A,B,D,C) هي المنطقة الملائمة

خامساً : أيجاد احداثيات اركان المنطقة الملائمة لجميع اركان المنطقة الملائمة معلومة بأستثناء النقطة (D) والتي تمثل تقاطع القيدين (1) و(2)

$30X_1 + 20X_2 = 300$ ..... (1)

$5X_1 + 10X_2 = 110$ ..... (2)

بضرب المعادلة (2) بالعدد (2) ينتج :

$10X_1 + 20X_2 = 220$ ..... (2)

ويطرحها من المعادلة (1) :

$20X_1 = 80$

$\therefore X_1 = \frac{80}{20} = 4$

وبالتعويض في (1) :

$30(4) + 20X_2 = 300$

$120 + 20X_2 = 300$

$20X_2 = 180 \rightarrow X_2 = \frac{180}{20} = 9$

∴ احداثيات النقطة (D) هي (4,9)

سادساً : وبالتعويض في دالة الهدف ينتج:

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 6X_1 + 8X_2$
B (0,11)	**Z = 6(0) + 8(11) = 88**
D (4,9)	**Z = 6(4) + 8(9) = 24 + 72 = 96**
C (10,0)	**Z = 6(10) + 8(0) = 60**

وبالنظر لكون الهدف هو تعظيم Maximization لذا فان الحل يقع في المنطقة D حيث :

$Z = 96$
$X_1 = 4$
$X_2 = 9$

Example 4:

The AMIR Box company makes medium and large units. Medium boxes each require (9) square Feet of wood while large ones consume (15). All boxes require 0.5 hours of labor regardless of size wood is limited to (450) square feet. And only 20 hours of labor are available. due to space limitations, no more than 20 larg boxes can be mode each day Also, customers can absorb at most (30) medium boxes. subject to these constraints, any number of boxes can be made. medium boxes yield a profit of $6 large ones each only $2

شركة امير لصنع الصناديق تصنع صناديق كبيرة ومتوسطة وكل صندوق متوسط يحتاج (9) فيت من الالواح والصندوق الكبير يحتاج الى (15) .كل الصناديق تحتاج الى (0.5) ساعة لتصنيعها مهما كان حجم الصندوق .المتوفر من الخشب (450) فيت مربع والزمن المتوفر (20) ساعة وبسبب محدودية المكان لايمكن تصنيع اكثر من (20) صندوق كبير كما ان المستهلكين لايحتاجون الى اكثر من (30) صندوق متوسط ربح الصندوق المتوسط الحجم $6 وربح الصندوق الكبيرالحجم $2 والمطلوب صياغة المشكلة بشكل رياضي وحله بأستخدام الطريقة البيانية لايجاد اعظم ربح؟

Solution: -

اولاً : الصياغة الرياضية للنموذج

Letting:

X_1 = number of medium boxes to be made

X_2 = number of large boxes to be made

The objective is to:

Max (Z) = $6X_1 + 2X_2$

Subject to:

$9X_1 + 15X_2 \leq 450$ ..... (1) (wood)

$0.5X_1 + 0.5X_2 \leq 20$ ..... (2) (labour)

$X_2 \leq 20$ ..... (3) (Space)

$X_1 \leq 30$ ..... (4) (Customer)

ثانياً : تحويل المتباينات الى معادلات

$9X_1 + 15X_2 = 450$ ..... (1) (wood)

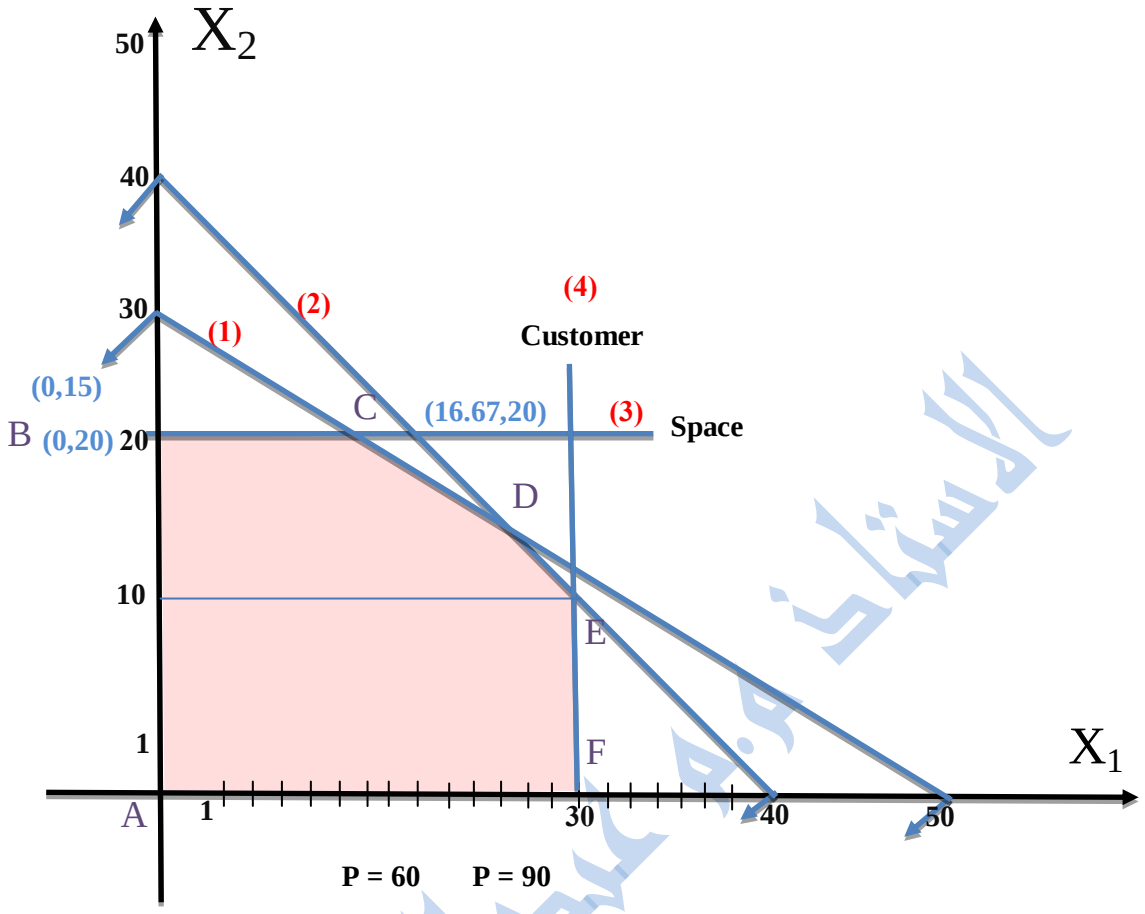
$0.5X_1 + 0.5X_2 = 20$ ..... (2) (labour)

$X_2 = 20$ ..... (3) (Space)

$X_1 = 30$ ..... (4) (Customer)

ثالثاً : رسم القيود بيانياً (لتحديد نقاط تقاطع القيود بالمحورين)

Constraints	Points
$9X_1 + 15X_2 = 450$	**(0,30)** **(50,0)**
$0.5X_1 + 0.5X_2 = 20$	**(40,0)** **(0,40)**
$X_2 = 20$	**(0,20)**
$X_1 = 30$	**(30,0)**



شكل (2-9)

رابعاً : منطقة الحلول الممكنة (Feasible Region)

يتضح من الشكل البياني (2-9) ان المنطقة المضلله (A,B,C,D,E,F) هي المنطقة الملائمة (منطقة الحلول الممكنة)

خامساً : أيجاد احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة

احداثيات النقطة B معلومة (0,20)

النقطة C تقع عند تقاطع القيدين (1) و (3)

$9X_1 + 15X_2 = 450$ ..... (1)

$X_2 = 20$ ..... (3)

بالتعويض في (1)

$9X_1 + 15(20) = 450 \rightarrow 9X_1 = 150$

$\therefore X_1 = \frac{150}{9} \simeq 16.67$

∴ احداثيات C هي (16.67,20)

النقطة D تقع عند تقاطع القيدين (1) و(2)

$9X_1 + 15X_2 = 450$ ..... (1)

$0.5X_1 + 0.5X_2 = 20$ ..... (2)

بضرب المعادلة (2) بالرقم 18 ينتج

$9X_1 + 9X_2 = 360$ ..... (2)

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1)

$6X_2 = 90$

$\therefore X_2 = \frac{90}{6} = 15$

بالتعويض في (1)

$9X_1 + 15(15) = 450$

$9X_1 + 225 = 450$

$9X_1 = 450 - 225$

$9X_1 = 225 \rightarrow \therefore X_1 = \frac{225}{9} = 25$

∴ احداثيات D هي (25,15)

النقطة E تقع عند تقاطع القيدين (4) والقيد (2)

$0.5X_1 + 0.5X_2 = 20$ ..... (1)

$X_1 = 30$ ..... (4)

بتعويض قيمة X_1 في المعادلة (4) في المعادلة (1) ينتج

$0.5(30) + 0.5X_2 = 20$

$15 + 0.5X_2 = 20$

$0.5X_2 = 5 \rightarrow X_2 = \frac{5}{0.5} = 10$

∴ احداثيات E هي (30,10)

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 6X_1 + 2X_2$
A (0,0)	Z = 6(0) + 2(0) = 0
B (0,20)	Z = 6(0) + 2(20) = 40
C (16.67,20)	Z = 6(16.67) + 2(20) = 140
D (25,15)	Z = 6(25) + 2(15) = 180
E (30,10)	Z = 6(30) + 2(10) = 200
F (30,0)	Z = 6(30) + 2(0) = 180

∴ الحل الامثل عند النقطة E

$Z = 200$ $X_1 = 30$ $X_2 = 10$

Example 7:

Ali Electric company produced two products H1 and H2. products are produced and sold on a weekly basis. The weekly production cannot exceed 25 for product H1 and 35 for product H2. Because of limited available facilities. The company employs total of 60 workers. Product H1 requires two man- weeks of labour while H2 requires one man – week of labour. Profit margin on H1 is $40 and H2 is $60. Formulate the problem as an Lp problem and solve for Maximum profit.

Solution: -

اولاً : الصياغة الرياضية للنموذج

Let define the following decision variables

X_1 = number of unit product H1

X_2 = number of unit product H2

Objective Function:

Max (Z) = $40X_1 + 60X_2$

Subject to the constraints:

$X_1 \leq 25$ …… (1)

$X_2 \leq 35$ …….. (2)

$2X_1 + X_2 = 60$ ..... (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

ثانياً : تحويل المتباينات الى معادلات

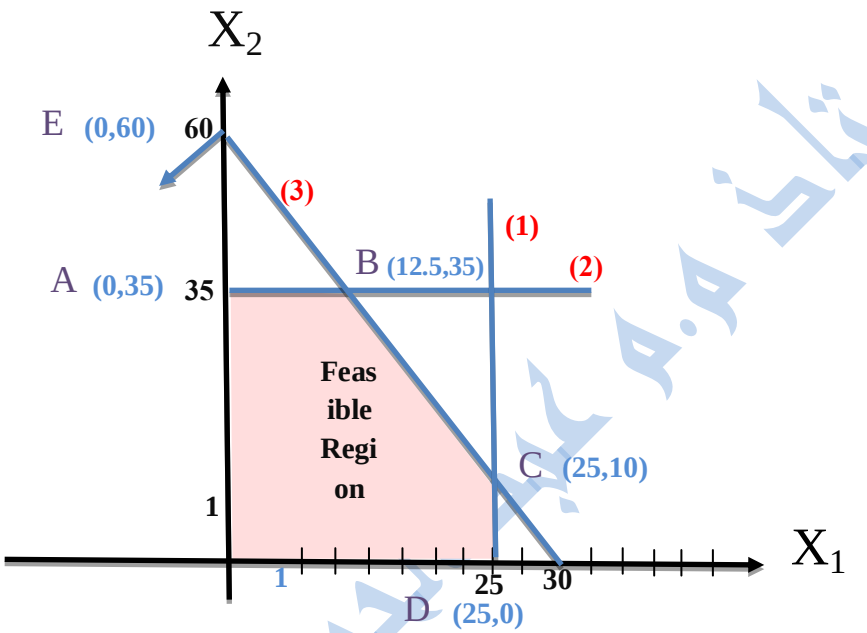
$X_1 = 25$ …… (1)

$X_2 = 35$ …….. (2)

$2X_1 + X_2 = 60$ ..... (3)

ثالثاً : رسم القيود بيانياً

Constraints	Points
$X_1 = 25$	(25,0)
$X_2 = 35$	(0,35)
$2X_1 + X_2 = 60$	(0,60) (30,0)



شكل (2-14)

رابعاً : تحديد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة الملائمة)

المنطقة الملائمة (Feasible Region) هي المنطقة التي تحقق كل القيود وهي المحددة بالنقاط A,B,C,D النقاط A و B معلومة.

نستخرج احداثيات النقطة B والتي تمثل تقاطع القيد الثالث مع القيد الثاني

$X_2 = 35$ ..... (2)

$2X_1 + X_2 = 60$ ..... (3)

بتعويض قيمة X_2 في المعادلة (3)

$2X_1 + 35 = 60$

$\therefore X_1 = \frac{25}{2} = 12.5$

اي احداثيات B هي (12.5,35)

النقطة C هي تقاطع القيد (1) مع القيد (3)

$X_1 = 25$ …….. (2)

$2X_1 + X_2 = 60$ ..... (3)

بتعويض قيمة X_1 في المعادلة (2)

$2(25) + X_2 = 60 \rightarrow X_2 = 60 - 50 = 10$

∴ احداثيات C هي (25,10)

خامساً : تحديد الحل الامثل عن طريق تعويض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 60X_1 + 40X_2$
A (0,35)	Z = 60(0) + 40(35) = 1400
B (12.5,35)	Z = 60(12.5) + 40(35) = 2150
C (25,10)	Z = 60(25) + 40(10) = 1900
D (25,0)	Z = 60(25) + 40(0) = 1500

The optimum (Maximum) value is at the point B (12.5,35)

$X_1 = 12.5$ unit of product H1

$X_2 = 35$ unit of product H2

$Z = 2150$

Example 8:

Ahmed Industry is making two products (P1) and (P2) the profit for (p1) (20) ID and (p2) (10) ID. each product pass through three machines is given below

Product	Machine (1)	Machine (2)	Machine (3)
P1	1	3	4
P2	2	1	3
Total Time Available	40	30	60

The manager wants to know how many (p1) and (p2) would be made so that profit is max using graphical method.

Solution: -

اولاً : الصياغة الرياضية للنموذج

Let define the following decision variables

X_1 , X_2 = number of unit product p1 and p2 respectively

Objective Function:

Max (Z) = $20X_1 + 10X_2$

Subject to:

$X_1 + 2X_2 \leq 40$ ..... (1)

$3X_1 + X_2 \leq 30$ ..... (2)

$4X_1 + 3X_2 \leq 60$..... (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

ثانياً : تحويل المتباينات الى معادلات

Convert inequalities to equation

$X_1 + 2X_2 = 40$ ..... (1)

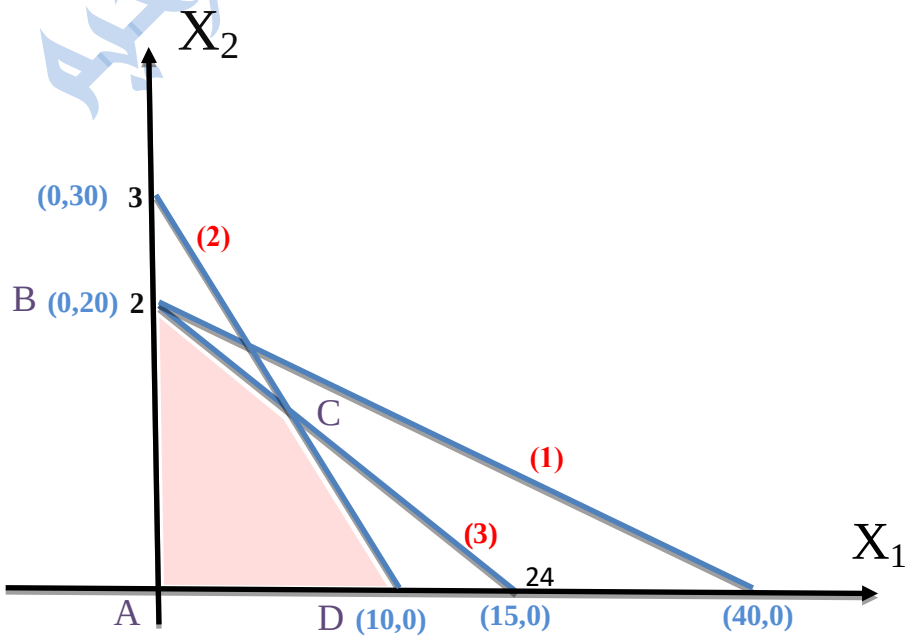
$3X_1 + X_2 = 30$ ..... (2)

$4X_1 + 3X_2 = 60$ ..... (3)

ثالثاً: Photo every equation an the diagram and determine the feasible region

Constraints القيـــــد	Points نقاط التقاطع
$X_1 + 2X_2 = 40$	(0,20) (40,0)
$3X_1 + X_2 = 30$	(0,30) (10,0)
$4X_1 + 3X_2 = 60$	(0,20) (15,0)

رابعاً: تحديد منطقة الحل وهي المنطقة المظلله في الشكل (2-15)



شكل (2-15)

خامساً: تحديد الحل الامثل:

جميع نقاط التطرف معروفة باستثناء (C) والتي تمثل تقاطع القيد (3) مع القيد (2)

$3X_1 + X_2 = 30$ ..... (2)

$4X_1 + 3X_2 = 60$ ..... (3)

يضرب (2) بـ (3)

$9X_1 + 3X_2 = 90$ ..... (2)

$4X_1 + 3X_2 = 60$ ..... (3)

بالطرح -

$5X_1 = 30$

$\therefore X1 = 6$

وبالتعويض في (3)

$4(6) + 3X_2 = 60 \quad \rightarrow X_2 = \frac{36}{3} = 12$

$\therefore$ النقطة C (6,12)

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 20X_1 + 10X_2$
A (0,0)	**Z = 20(0) + 10(0) = 0**
B (0,20)	**Z = 20(0) + 10(20) = 200**
C (6,12)	**Z = 20(10) + 10(12) = 240**
D (10,0)	**Z = 20(10) + 10(0) = 200**

The Maximum Value Z = 240 occurs at the point (C) (6,12)

ثانياً : الطريقة المبسطة Simplex Method

تعتمد هذه الطريقة أسلوب رياضي فعال في حل مسائل البرمجة الخطية طوره العالم الرياضي الأمريكي G.B.Dantzing عام 1947 حيث أصبح بفضل هذا الأسلوب إمكانية حل المشاكل ذات المتغيرات المتعددة ومما ساعد على شيوع استخدامها استخدام الحاسب الالكتروني في حل النماذج الرياضية.

خطوات استخدام الطريقة المبسطة في حالة التعظيم Maximization

1. تحويل القيود و دالة الهدف الى الشكل القياسي Standard form.
2. تحويل الصيغة القياسية إلى هيئة جدول (الصيغة الجدولية) Table Form وتحديد الحل الابتدائي يتكون الجدول من :

a. العمود الأول للجدول هو عمود المتغيرات الأساسية (Basic variables) وهي في الجدول الأول والعمود C_B يمثل معاملاتها في دالة الهدف.

b. بقية الأعمدة تمثل معاملات المتغيرات الأساسية والراكدة وفق ما ورد في النموذج.
c. العمود قبل الأخير (R.H.S) و يمثل الموارد.
d. العمود الأخير يمثل النسبة الدنيا.
e. الصف C_j يمثل معاملات جميع المتغيرات في دالة الهدف.
f. الصف Z تمثل معاملاته معاملات دالة الهدف.

3. اختبار الحل الابتدائي اذا كانت احد قيم الصف Z موجبه والهدف تعظيم فان الحل غير امثل لذا ننتقل الى الخطوة (5) اما اذا كانت جميع القيم السالبة أو صفرية فإن الحل امثل.

4. تحسين الحل وفي هذه الخطوة نستخرج حل جديد وفق الخطوات الآتية:
a. المتغير المقابل لأكبر قيمة موجبة في الصف Z تمثل المتغير الداخل Entering variable.
b. المتغير الخارج Leaving variable عن طريق قسمة قيم الجانب الأيسر للقيود معاملات العمود (R.H.S) على القيم المناظرة لها في عمود المتغير الداخل باستثناء القيم السالبة والقيم الصفريه والمتغير الخارج هو المتغير الذي يقابل اقل خارج قسمة وتدعى هذه القاعدة بقاعدة النسبه الدنيا (Min Ratio).
c. القيمة الواقعة في تقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل تدعى المحور pivotوصفها يدعي الصف المحوري وعمودها عمود المحور.
d. عناصر الجدول الجديد تستخرج كما يلي:
1) صفوف المحور يقسم على قيمة المحور وينقل الى الجدول الجديد بعد استبدال المتغير الخارج بالمتغير الداخل
2) بقية الصفوف يتم استخراجها عن طريق ضرب الصف المحوري الذي استخرج في (1) بقيمه مناسبه بحيث إذا أضيف بعد ضربه الى الصف (المراد استخراجه في الجدول القديم) تكون القيمة مقابله المحور مساوية للصفر لذا يضرب الصف المحوري دائما بنفس القيمه الموجوده في الصف المراد استخراجة (الصف القديم) والمناظرة للمحور وبعكس الإشارة والصف المحوري بعد ضربه بالقيمة المناسبة يضاف الى الصف المراد استخراجه في الجدول القديم ينتج الصف في الجدول الجديد

5. إذا كانت أحد القيم الموجودة في الصف (C_j - Z) في الجدول الجديد قيمة موجبة تكرر الخطوات السابقة لحين التوصل إلى قيمة سالبة في الصف Z أو قيم صفرية

Example 1:

Max (Z) = $5X_1 + X_2$

Subject to:

$4X_1 + 6X_2 \leq 12$ ..... (1)

$X_1 + X_2 \leq 20$ ..... (2)

$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

اولاً : تحويل المتباينات الى معادلات وذلك بأضافة متغيرات تدعى المتغيرات الراكدة (Slack variable) وتضاف لهذه المتغيرات الى معادلة دالة الهدف بمعامل قدرة صفر

وبعد اجراء هذة التعديلات يصبح النموذج بالشكل الاتي :

$$\text{Max } (Z) = 5X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Subject to:

$$4X_1 + 6X_2 + S_1 = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 20 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ثانياً : تنظيم الجدول المبسط (جدول الحل الابتدائي)

Table (1)

C_B	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	1 X_2	0 S_1	0 S_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
0	S_1	4	6	1	0	12	$\frac{12}{4} = 3$
0	S_2	1	1	0	1	20	$\frac{20}{1} = 20$
	Z	+5	+1	0	0	0	0

المتغير الخارج

المتغير الداخل

الحل اعلاه غير امثل لان معاملات (Z) المقابل للمتغيرات الاساسية والتي تمثل الربح المفقود موجبة لذا ننتقل الى الخطوة ثالثاً (تحسين الحل)

ثالثاً : تحسين الحل :

a. المتغير X_1 يمثل المتغير الداخل لانة يقابل اكبر قيمة موجبة في الصف Z (+5).

b. المتغير الخارج تحصل علية عن طريق قسمة معاملات العمود R.H.S على ماينا ظرها من معاملات عمود المتغير الداخل وتتم العملية في العمود (Min Ratio) ومنها نستنتج ان المتغير الخارج هو S_1 لانة يقابل اقل نسبة (3).

c. القيمة التي تقع عند تقاطع عمود المتغير الداخل X_1 مع صف المتغير الخارج S_1 تدعى المحور(Pivot) توضع داخل دائرة.

d. صفوف الجدول الثاني:

1. يستبدل المتغير الخارج S_1 بالمتغير الداخل X_1.

2. صف المحور في الجدول الثاني هو صف المحورفي الجدول السابق مقسوماً على المحور وكما يلي:

S_1	$\frac{4}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{12}{4}$
X_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	3

الصف المحوري في الجدول الجديد

3. لاستخراج الصف S_1 نضرب الصف المحوري في الجدول الجديد بقيمة مساوية لقيمة المتغير في الصف S_2 الواقع في عمود المحور وبعكس الاشارة ويضاف للصف S_2 في الجدول الاول فينتج صف S_2 في الجدول الجديد

	-1 (1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	3)
	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	-3
+old S_2	1	1	0	1	20
New S_2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	17

وبنفس الطريقة نستخرج صف Z في الجدول الجديد نحصل علية عن طريق ضرب أعمدة المتغيرات في القيم المناظرة لها في العمود C_B وجمع حاصل الضرب وطرحة من معاملات المتغيرات في دالة الهدف وكما يلي :

$$Z_{X_1} = 5 - (1*5 + 0*0) = 0$$

$$Z_{X_2} = 1 - (\frac{3}{2} * 5) + (- \frac{1}{4} * 0) = 1 - 7.5 = - 6.5$$

$$Z_{S_1} = 0 - (\frac{1}{4} * 5) + (- \frac{1}{4} * 0) = - \frac{5}{4}$$

$$Z = 3*5 + 17*0 = 15$$

وبعد هذة العمليات يمكن تنظيم جدول رقم (2) وكما يلي:

Table (2)

C_B	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	1 X_2	0 S_1	0 S_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
5	X_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	3	
0	S_2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	17	
	Z	0	- 6.5	$-\frac{5}{4}$	0	15	

بالنظر لعدم وجود قيمة سالبة في الصف Z والهدف تعظيم (Max) فأن الحل امثل

∴ قيمة الحل الامثل $Z = 15$

$X_1 = 5$

$X_2 = 0$

طريقة م الكبرى او طريقة الجزاء Penalty (Big M) Method

عندما تكون القيود بهيئه اكبر من او يساوي عندئذ تكون معاملات المتغيرات الراكدة Slack variable التي تطرح بتحويل المتباينات الى معادلات قيمة سالبة (-1) وكذلك عندما يكون القيد بهيئة مساواة عندئذ يكون المعامل صفر وفي كلا الحالتين يضاف الى المعادلة متغير يدعى المتغير الاصطناعي يرمز له A ومعامله في دالة الهدف M حيث M قريبه من مالانهاية.

وفيما يلي مثال يوضح هذه الحالة:

Min $(Z) = 5X_1 + 7X_2$

Subject to:

$X_1 + 2X_2 = 50$ ..... (1)

$X_1 \geq 20$ ..... (2)

$X_2 \leq 20$ ..... (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

عندئذ يتم تحويل النموذج إلى الشكل القياسي عن طريق الخطوات الاتية:

1. القيد الأول يضاف له متغير يدعي متغير اصطناعي (Artificial variable) ويرمز له بـ (A_1).
2. القيد الثاني يطرح منه متغير راكد (S_1) ويضاف له متغير يدعي متغير اصطناعي (A_2).
3. القيد الثالث يضاف له متغير راكد (S_2) .
4. معاملات المتغيرات الراكدة في دالة الهدف صفر.

5. معاملات المتغيرات الاصطناعية (M) حيث ان قيمة (M) كبيرة جدا تقرب الى ما لانهاية وبذلك سوف تكون الصيغة القياسية للنموذج السابق ما يلي:

Min $(Z) = 5X_1 + 7X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$

Subject to:

$X_1 + 2X_2 + A_1 = 50$ ..... (1)

$X_1 - S_1 + A_2 = 20$ ..... (2)

$X_2 + S_2 = 20$ ..... (3)

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$

تحويل معادلة دالة الهدف الى معادلة صفرية

Table (1)

C_B	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	7 X_2	0 S_1	0 S_2	M A_1	M A_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
M	A_1	1	2	0	0	1	0	50	$\frac{50}{1} = 50$
M	A_2	1	0	-1	0	0	1	20	$\frac{20}{1} = 20$
0	S_2	0	1	0	1	0	0	20	يهمل
	Z	5-2M	7-2M	M	0	0	0	70M	

ملاحظة / صف (Z) في الجدول الاول حصلنا علية عن طريق ضرب معاملات الاعمدة في المعاملات الناظرة لها في عمود المتغيرات الاساسية (Basic) وطرحها من معاملات المتغيرات في دالة الهدف وكما يلي :

$Z_{X_1} = 5 - (1*M + 1*M + 0*0) = 5 - 2M$

$Z_{X_1} = 7 - (2*M + 0*M + 1*0) = 7 - 2M$

$Z_{S_1} = 0 - (0*M + (-1*M) + 0*0) = +M$

$Z_{S_2} = 0 - (0*M + 0*M + 1*0) = 0$

$ZMA_1 = M_1 - (1*M_1 + 0*M_2 + 0*0) = 0$

$ZMA_2 = M_2 - (0*M_1 + 1*M_2 + 0*0) = 0$

$Z = 50*M + 20*M + 20*0 = 70M$

الحل غير امثل لوجود قيم سالبة في الصف Z والمتغير الداخل هو الذي يقابل اكبر قيمة سالبة X_1 والمتغير الخارج هو الذي يقابل اقل خارج قسمة في الصف Min Ratio (A_2)

العمليات الحسابية لاستخراج صفوق الجدول الثاني :

1. الصف المحوري ينتقل كما هو لكون قيمة المحور (1) مع استبدال المتغير الخارج MA_2 بالمتغير الداخل X_1 وبذلك يكون الصف المحوري في الجدول الجديد كما يلي:

X_1	1	0	-1	0	0	1	20

2. استخراج صف المتغير MA_1 : يضرب الصف المحوري الوارد في (1) بـ (-1) ويضاف الى الصف المتغير MA_1 في الجدول القديم الصف الجديد

-1	(1	0	-1	0	0	1	20)
	-1	0	+1	0	0	-1	-20
Old MA_1	1	2	0	0	1	0	50
New MA_1	0	2	1	0	1	-1	30

الصف المحوري

بالجمع

3. الصف S_2 ينقل في الجدول الجديد كما هو لأن القيمة المقابلة يساوي صفر

Table (2)

CB	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	7 X_2	0 S_1	0 S_2	M A_1	M A_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
M	A_1	0	2	1	0	1	-1	30	$\frac{30}{2} = 15$
5	X_1	1	0	-1	0	0	1	20	يهمل
0	S_2	0	1	0	1	0	0	20	$\frac{20}{1} = 20$
	Z	0	7-2M	5-M	0	0	2M+5		

4. صف Z تتم استخراج قيمة كما يلي :

$Z_{X_1} = 5 - 0 * M + 1 * 5 + 0 * 0 = 0$

$Z_{X_2} = 7 - 2*M + 0*5 + 0*0 = 7 - 2M$

$Z_{S_1} = 0 - \{1*M + (-1)\ (5)\} + 0*0 = 0 - (M - 5) = 5- M$

$Z_{S_2} = 0 - (0*M + 0*5 + 1*0) = 0$

$Z_{A_1} = M - (1*M + 0*5 + 0*0) = 0$

$Z_{A_2} = M - (-1*M + 1*5) = M - (5-M) = 5+2M$

الحل غير أمثل لوجود قيمة سالبة في الصف Z

المتغير الخارج هو A_1

المتغير الداخل هو X_2

- الصف المحوري في الجدول رقم (3) ينتج من قسمة الصف المحوري على المحور (2) مع استبدال المتغير الخارج A_1 بالمتغير الداخل X_2 وكما يلي : -

$7X_2$	$\frac{0}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{30}{2}$
$7X_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	15

- الصف الثاني يرحل كما هو لان القيمة المقابلة للمحور صفر
- الصف الثالث ينتج من ضرب الصف المحوري في (1-) وجمعة مع الصف القديم

-1	(0	1	$+\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	15)
	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-15
+old S_2	0	1	0	1	0	0	20
New S_2	0	2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5

Table (3)

CB	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	1 X_2	0 S_1	0 S_2	MA_1	MA_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
7	X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	15	
5	X_1	1	0	-1	0	0	1	20	
0	S_2	0	2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	
	Z	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$M-\frac{7}{2}$	$M-\frac{3}{2}$	205	

قيم الصف Z استخرجت كما يلي:

$ZX_1 = 5 - (0*7 + 1*5 + 0*0) = 0$

$ZX_2 = 7 - (1*7 + 0*5 + 2*0) = 0$

$ZX_1 = 0 - (\frac{1}{2} * 7 + (-1*5) + (-\frac{1}{2}*0)) = -\frac{7}{2} + 5 = \frac{3}{2}$

$ZS_2 = 0 - (0*7 + 0*5 + 1*0) = 0$

$ZA_1 = M - (\frac{1}{2}*7 + 0*5 + (-\frac{1}{2}*0)) = M - \frac{7}{2}$

$ZA_2 = M - (-\frac{1}{2}*7 + 1*5 + (\frac{1}{2}*0)) = M - (-3-5+5) = M - \frac{3}{2}$

$Z(R.H.S) = 15*7 + 20*5 + 5*0 = 205$

الحل في الجدول (3) حل أمثل لعدم وجود قيم سالبة

$Z = 205$

$X_1 = 7$

$X_2 = 5$

Example 1: Use the graphical method to solve the following L.P. problem

Maximize = $10X_1 + 15X_2$

Subject to the constraints:

$2X_1 + X_2 \leq 26$..... (1)

$2X_1 + 4X_2 \leq 56$ ..... (2)

$-X_1 + X_2 \leq 5$ ..... (3)

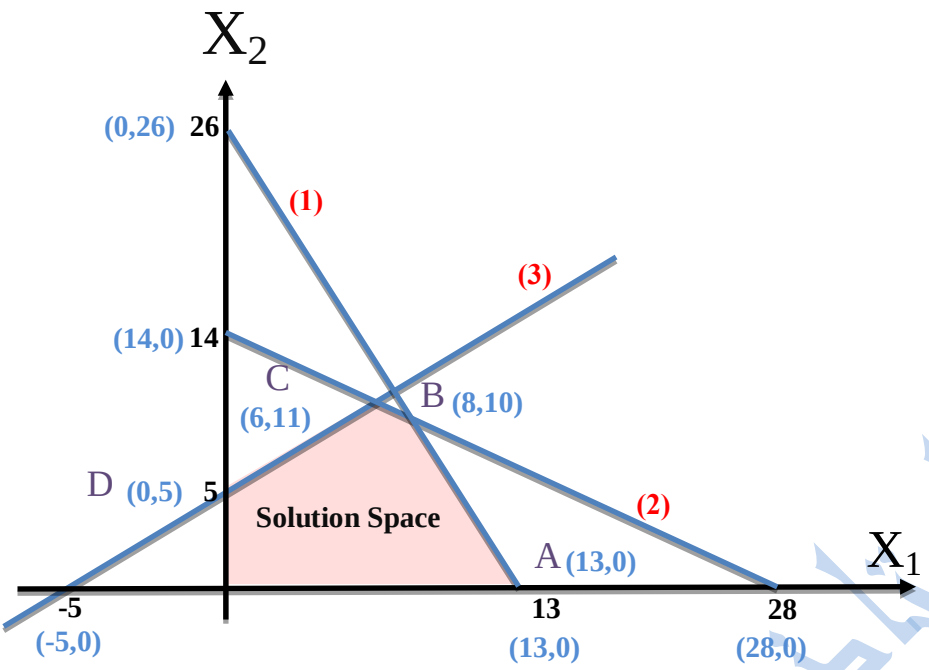
$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

اولاً: تحديد نقاط القيود بالمحورين

Constraints	Points
$2X_1 + X_2 = 26$	(0, 26) (13, 0)
$2X_1 + 4X_2 = 56$	(0, 14) (28, 0)
$-X_1 + X_2 = 5$	(0, 5) (-5, 0)

ثانياً: رسم القيود بيانياً وتحديد منطقة الامكانيات المتاحة



ينتج من الشكل البياني ان منطقة الحلول الممكنة هي A,B,C,D وبالنظر لعدم تحديد احداثيات للنقاط C وB تستخرج هذه النقاط كما يلي:

النقطة C تمثل تقاطع القيدين (3) و (2)

$2X_1 + 4X_2 = 56$ ..... (2)

$-X_1 + X_2 = 5$ ..... (3)

نضرب المعادلة (3) بـ (2) فينتج

$-2X_1 + 2X_2 = 10$

نجمع المعادلة الجديدة مع المعادلة (2) فينتج

$2X_1 + 4X_2 = 56$ ..... (2)

$-2X_1 + 2X_2 = 10$

$6X_2 = 66$

$X_2 = \frac{66}{6} = 11$

بالتعويض في المعادلة (3)

$-X_1 + 11 = 5$

$X_1 = 11 - 5$

$X_1 = 6$

∴ احداثيات النقطة C هي (6,11)

استخراج احداثيات النقطة B رياضياً:

B تمثل تقاطع القيدين (1) و (2)

الأستاذ م.م عبد الحسن رحيم

$2X_1 + X_2 = 26$ ..... (1)

$2X_1 + 4X_2 = 56$..... (2)

يطرح (1) من (2)

$3\ X_2 = 30$

$\therefore X_2 = \frac{30}{3} = 10$

بالتعويض في المعادلة (1)

$2X_1 + 10 = 26$

$2X_1 = 16$

$X_1 = \frac{16}{2}$

∴ احداثيات النقطة B هي (8,10)

ثالثاً: نعوض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف فينتج مايلي :

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 10X_1 + 15X_2$
A (13, 0)	Z = 10(13) + 15(0) = 130
B (8, 10)	Z = 10(8) + 15(10) = 230
C (6, 11)	Z = 10(6) + 15(11) = 225
D (0, 5)	Z = 10(0) + 15(5) = 75

اكبر قيمة لدالة الهدف عند النقطة (B) لذا فأن الحل الامثل للنموذج يقع في هذه النقطة والقيمة المثلى لـ Z هي (230) $X_1 = 8, X_2 = 10$

Example 2: Use the graphical method to solve the following L.P. problem

Minimize $(Z) = -X_1 + 4X_2$

Subject to the constraints:

$-3X_1 + X_2 \leq 6$..... (1)

$X_1 + 2X_2 \leq 4$ ..... (2)

$X_2 \leq -3$ .....(3)

Solution: -

اولاً : تحويل المتباينات الى معادلات

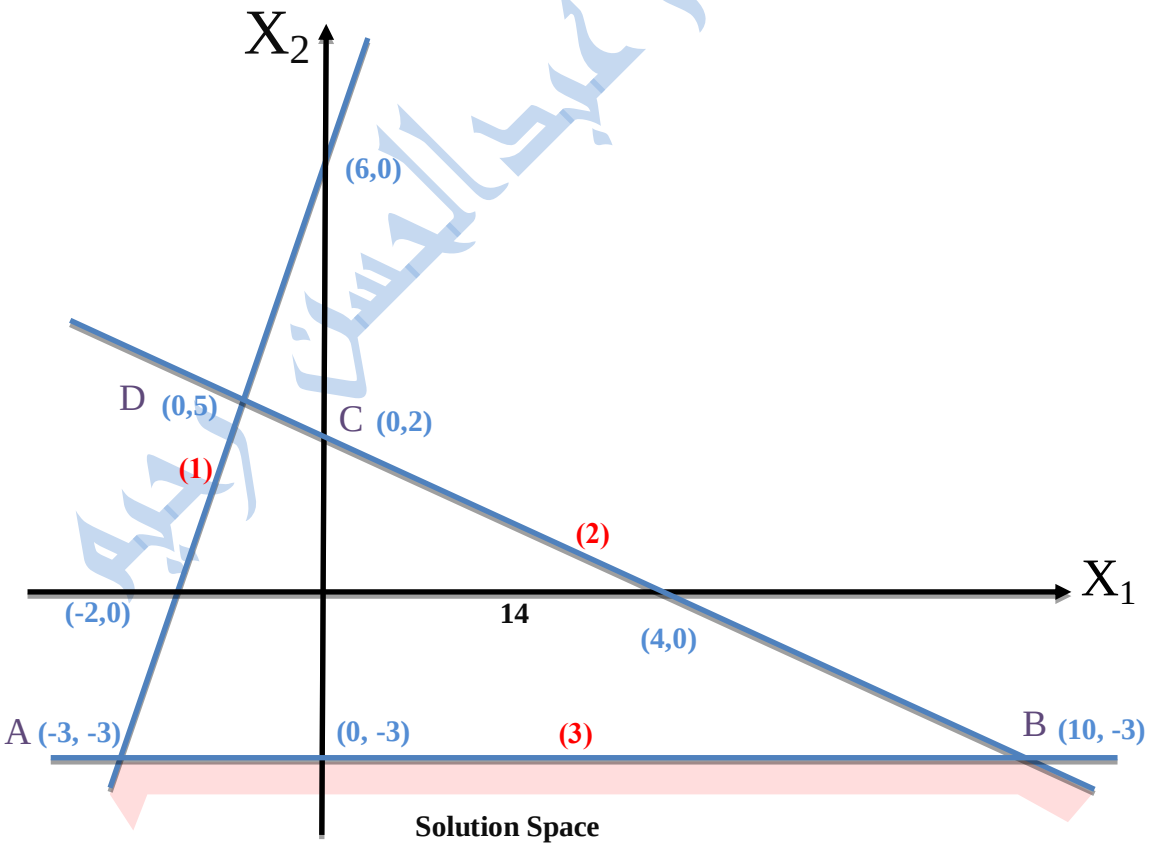
$-3X_1 + X_2 = 6$…… (1)

$X_1 + 2X_2 = 4$ …….... (2)

$X_2 = -3$ ……..(3)

ثانياً : رسم القيود بيانياً

Constraints	Points
$-3X_1 + X_2 = 6$	(0, 6) (-2, 0)
$X_1 + 2X_2 = 4$	(0, 2) (4, 0)
$X_2 = -3$	(0, -3)



نستخرج احداثيات النقاط المجهولة (A) و (B)

A هي تقاطع القيد (1) مع القيد (3)

من القيد (3) $X_2 = -3$

نعوض في (1)

$-3X_1 + (-3) = 6$ …. (1)

$-3X_1 = 9$

$\therefore X_1 = -3$

$\therefore$ احداثيات A هي (-3,-3)

ايجاد احداثيات النقطة B وهي تمثل تقاطع القيدين (2) و(3)

من القيد (3) $X_2 = -3$

بالتعويض في القيد (2)

$X_1 + 2(-3) = 4$

$X_1 = 10$

$\therefore$ احداثيات B هي (10,-3)

ثالثاً: تحديد منطقة الحلول

منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة في الشكل اعلاه

ثانياً: نعوض نقاط التطرف (اركان منطقة الحلول الممكنة) في دالة الهدف لنجد قيمتها عند كل نقطة

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = -X_1 + 4X_2$
A (-3, -3)	**Z = -1(-3) + 4(-3) = -9**
B (10, -3)	**Z = -1(10) + 4(-3) = -22**

اقل قيمة لدالة الهدف = (-22)

The minimum value of objective function = -22

Example 3: Solve the following L.P. problem graphical

Minimize (Z) = $-X_1 + 2X_2$

Subject to the constraints:

$X_1 - X_2 \leq -1$ ..... (1)

$-0.5X_1 + X_2 \leq 2$ ..... (2)

$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

Since resource value (R.H.S) of the first constraint is negative, multiplying both side of this constraint by (-1)

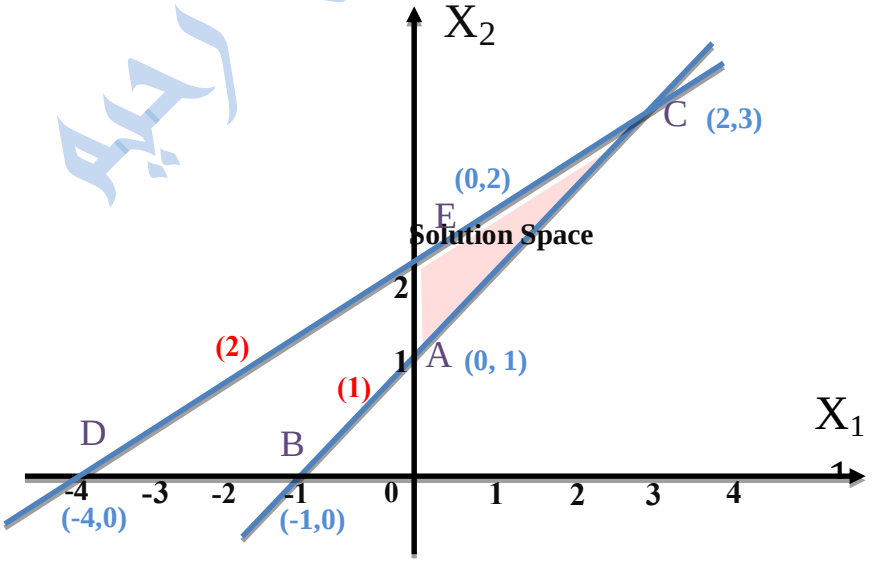
بالنظر لكون الجانب الايمن القيد الاول (الموارد سلبية) لذا تضرب الطرفين للقيد بـ (-1) فيصبح القيد الاول كما يلي :

$-X_1 + X_2 \geq 1$ ..... (1)

اولاً: نجد تقاطع القيود في المحاور (X_2, X_1)

Constraints	Points
$-X_1 + X_2 = 1$	(0, 1) (-1, 0)
$-0.5X_1 + X_2 = 2$	(0, 2) (-4, 0)

ثانياً: نرسم القيود وكما يلي في الشكل



من الشكل يتضح ان منطقة الحلول الممكنة (Feasible Space) هي المنطقة المظللة A,C,E
ولإيجاد احداثيات النقطة C رياضياً نتبع ما يلي :
النقطة C تقع عند تقاطع القيدين (1) و (2) لذا تقاطع المعادلتين كما يلي:

$-X_1 + X_2 = 1$ ..... (1)
$-0.5X_1 + X_2 = 2$ ..... (2)

من المعادلة (1)

$X_2 = 1 + X_1$ ..... (3)

نعوض في المعادلة (2)

$-0.5X_1 + (1 + X_1) = 2$
$-0.5X_1 + X_1 = 1$
$0.5X_1 = 1$
$\therefore X_1 = \frac{1}{0.5} = 2$

نعوض في المعادلة (3)

$X_2 = 1 + 2 = 3$

∴ احداثيات النقطة C (2,3)

ثالثاً: نعوض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف :

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = -1X_1 + 2X_2$
A (0, 1)	**Z = -1(0) + 2(1) = 2**
B (0, 2)	**Z = -1(0) + 2(2) = 4**
C (2, 3)	**Z = -1(2) + 2(3) = 4**

The Maximum value of objective function Z = 4 occurs at extreme point between E and C on the line C E also give the same value of Z hence problem has multiple optimal solutions and Max Z = 4

اعلى قيمة لدالة الهدف موجودة في الخط الواصل بين النقطتين C,E هذا يعني جميع نقاط هذا الخط تمثل حلول مثلى وهذه الحالة تمثل (تعدد الحلول المثلى)

Example 4:

The ABC company has been producer of picture tubes for television sets and certain printed circuits for radios. The company has just expanded in to full scale production and marketing of Am and Am-FM radios. It has built a new plant that can operate 48 hours per week – production of an Am radio in the new plant will require 2 hours and production of all Am – FM radio will require 3 hours. Each Am radio will contribute $40 to profits while an Am -FM radio will contribute $80 to profit. The market department, after extensive research has determined that a Maximum of (15) Am radios and (10) Am -FM radios can be sold each week.

A: Formulate a linear programming model to determine the optimum production Mix of Am radios that will maximize profits.

B: Solve the above problem using the graphical method.

شركة ABC تنتج picture tubes للتلفزيون و certain printed للراديوات الشركة ابدأت تواً في انتاج وتسويق راديوات Am و Am -FM وقد انشات مصنع جديد يمكن ان يعمل 48 ساعة كل اسبوع انتاج راديو Am في المصنع الجديد سوف يتطلب 2 ساعة اما Am – FM فيتطلب 3 ساعة كل راديو يساهم في الارباح فالنوع Am يساهم بـ 40 لكل وحده منتجة اما النوع Am – FM فيساهم بـ 80 لكل وحدة منتجة قسم الانتاج اجرى بحوث مستمرة بعدها تقرر ان اقصى ما يمكن تسويقه من انتاج نوع Am هو 15 وحدة والنوع Am – FM هو 10 وحدة اسبوعياً .

A: اوجد النموذج الرياضي لتحديد مزيج الانتاج الامثل لتحقيق اعظم الارباح.

B: استخدم الطريقة البيانية لإيجاد حل للمشكلة.

Solution: -

Let us define the following decision variable

X_1, X_2 = number of units of Am and Am – FM radio respectively

لنفترض X_1, X_2 عدد الوحدات المنتجة من Am و Am – FM على التوالي

Then LP model of the given problem is: نموذج البرمجة الخطية للمشكلة

Maximize (total profit) $Z = 40X_1 + 80X_2$

Subject to the constraints:

$2X_1 + 3X_2 \leq 48$ ……. (1)

$X_1 \leq 15$ ……. (2)

$X_2 \leq 10$ ……..……. (3)

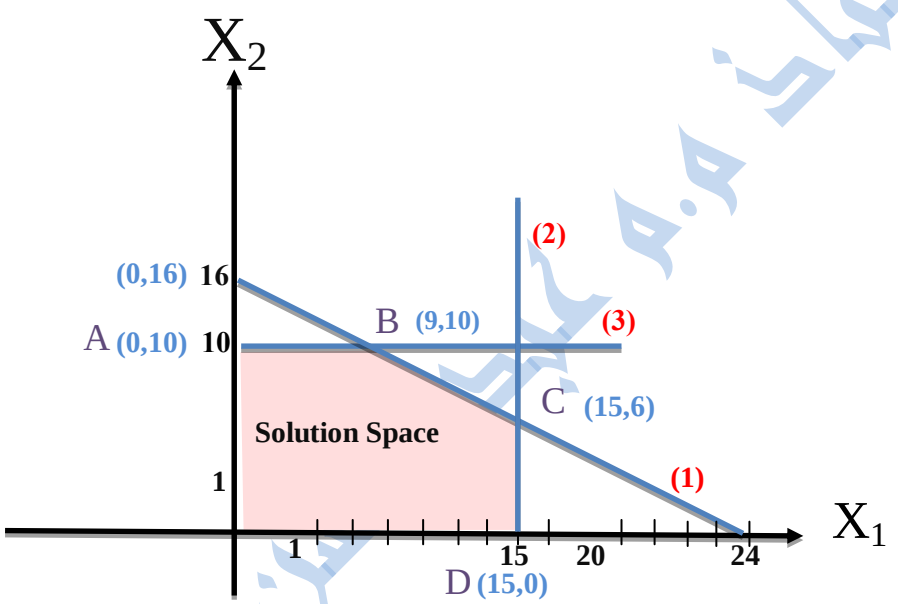
$X_1, X_2 \geq 0$

لرسم النموذج وتحديد الحل الامثل تتع ما يلي:

اولاً: نحدد نقاط تقاطع القيدين بالمحورين وكما يلي:

Constraints	Points
$2X_1 + 3X_2 = 48$	(0, 16) (24,0)
$X_2 = 15$	(15,0)
$X_2 = 10$	(0,10)

ثانياً: نرسم القيود وكما يلي في الشكل:



ثالثاً: من خلال الرسم البياني يتضح ان منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة.

رابعاً: نجد احداثيات النقاط المجهولة وكما يلي:

B : تمثل تقاطع القيدين (3) والقيد (1)

$X_2 = 10$ ……..…… (3) من القيد (3)

نعوض في المعادلة (1)

$2X_1 + 3(10) = 48$

$2X_1 = 18$

$\therefore X_1 = \frac{18}{2} = 9$

$\therefore$ B (9, 10)

$\therefore$ احداثيات النقطة B (9,10)

C : تمثل تقاطع القيدين (2) والقيد (1) ولاستخراج احداثياتها تقاطع المعادلتين:

$X_1 = 15$…….. (2) من المعادلة (2)

نعوض في المعادلة (1)

$2(15) + 3X_2 = 48$

$30 + 3X_2 = 48$

$3X_2 = 18$

$\therefore X_2 = 6$

∴ احداثيات النقطة C (15,6)

خامساً: تعوض جميع نقاط اركان منطقة الحلول الممكنة (نقاط التطرف) في معادلة دالة الهدف:

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 40X_1 + 80X_2$
A (0, 10)	**Z = 40(0) + 80(10) = 800**
B (9, 10)	**Z = 40(9) + 80(10) = 1160**
C (15, 6)	**Z = 40(15) + 80(6) = 1080**
D (15, 0)	**Z = 40(15) + 80(0) = 600**

بالنظر لكون دالة الهدف تكون قيمتها اكبر ما يمكن عند النقطة B لذا فأن الحل الامثل كما يلي:

Maximum Z = 1160

$X_1 = 9$

$X_2 = 10$

Example 5:

Solve the following L.P problem graphically:

Minimize (Z) = $3X_1 + 2X_2$

$5X_1 + X_2 \leq 10$ ……. (1)

$X_1 + X_2 \leq 6$ ……. (2)

$X_1 + 4X_2 \leq 12$ ……. (3)

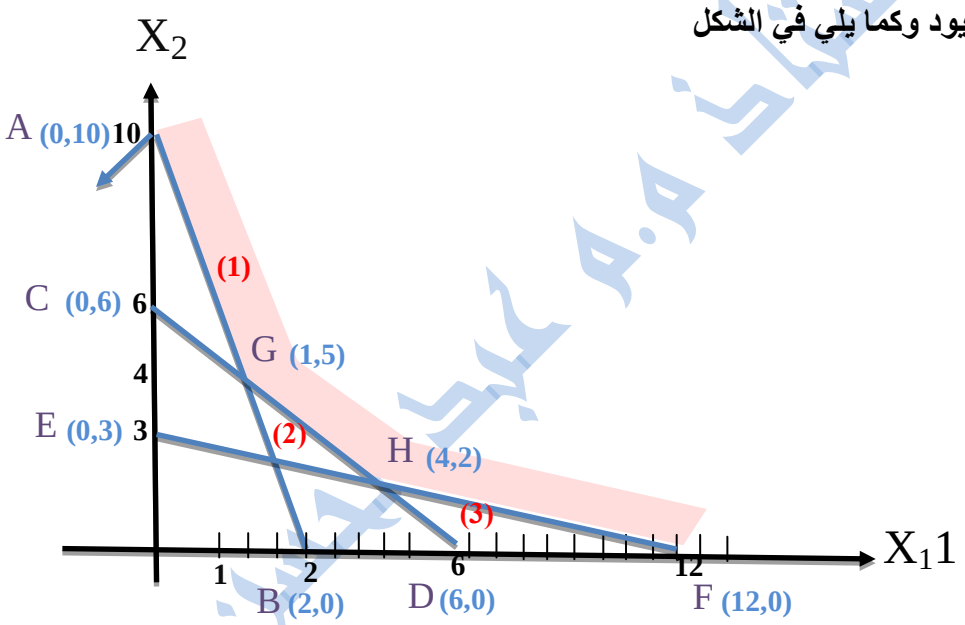
$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

اولاً: نحدد تقاطع القيود بالمحورين وكما يلي :

Constraints	Points
$5X_1 + X_2 = 10$	A (0,10) B (2,0)
$X_1 + X_2 = 6$	C (0,6) D (6,0)
$X_1 + 4X_2 = 12$	E (0,3) F (12,0)

ثانياً: نرسم القيود وكما يلي في الشكل



منطقة الحلول المثلى هي المنطقة المظللة كما في الشكل ولإيجاد احداثيات النقطة نجد احداثيات النقطة G تقاطع المعادلتين (1) و (2)

$5X_1 + X_2 = 10$ ..... (1)

$X_1 + X_2 = 6$ ..... (2)

يطرح (2) من (1) ينتج

$4X_1 = 4$

$\therefore X_1 = 1$

نعوض في المعادلة (2)

$X_2 = 5$

∴ احداثيات النقطة G (1,5)

النقطة H تقاطع المعادلتين (2) و (3)

$X_1 + X_2 = 6$ ..... (2)

$X_1 + 4X_2 = 12$ …….. (3)

يطرح (2) من (3) ينتج

$3X_2 = 6$

$X_2 = \frac{6}{3} = 2$

نعوض في المعادلة (2)

$\therefore X_1 = 4$

∴ احداثيات النقطة H (4,2)

نعوض احداثيات نقاط اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف فينتج ما يلي:

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 3X_1 + 2X_2$
A (0, 10)	**Z = 3(0) + 2(10) = 20**
G (1, 5)	**Z = 3(1) + 2(5) = 13**
H (4, 2)	**Z = 3(4) + 2(2) = 16**
F (12, 0)	**Z = 3(12) + 2(0) = 36**

اقل قيمة لدالة الهدف عند النقطة G

The optimum solution is $X_1 = 1$, $X_2 = 5$ and the Min Z = 13

Example 6:

Use the graphical method to solve the following L.P problem:

Minimize (Z) = $-X_1 + 2X_2$

Subject to the constraints:

$-X_1 + 3X_2 \leq 10$ ……. (1)

$X_1 + X_2 \leq 6$ …….. (2)

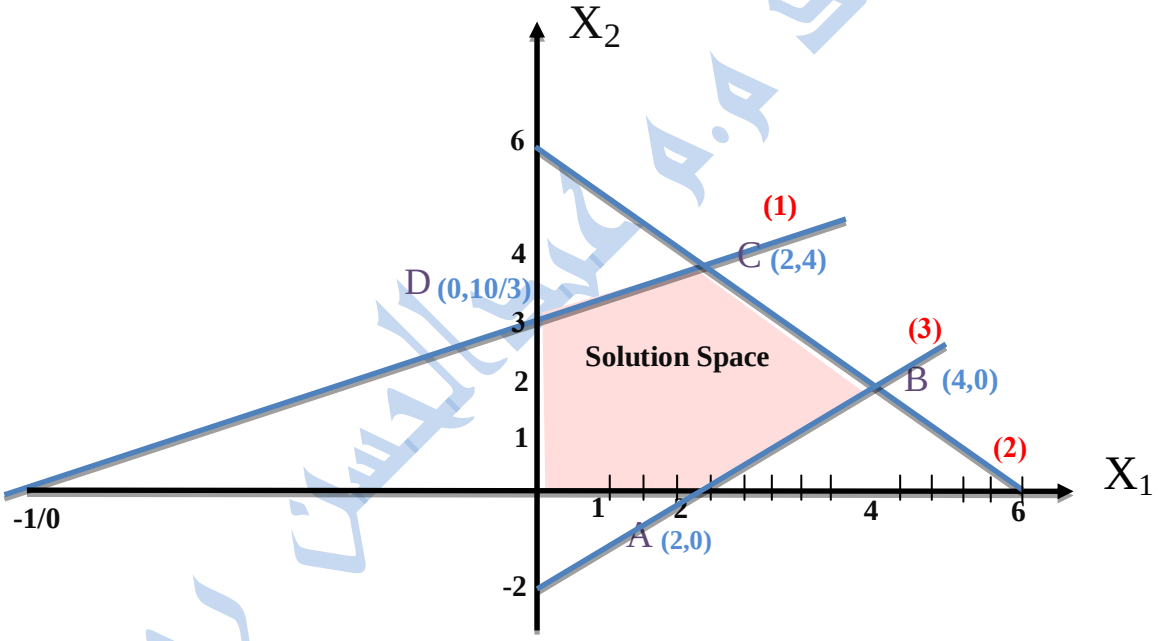
$X_1 - X_2 \leq 2$ …….. (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

Constraints	Points
$-X_1 + 3X_2 = 10$	$(0, \frac{10}{3})$ (-10, 0)
$X_1 + X_2 = 6$	(0, 6) (6, 0)
$X_1 - X_2 = 2$	(0, -2) (2, 0)

لرسم القيود بيانياً نحدد نقاط تقاطعهما بالمحورين وكمايلي :



من خلال الرسم البياني يتضح ان المنطقة المظللة هي منطقة الحلول الممكنة نستخرج الاركان المجهولة وكما يلي :

C : يمثل تقاطع المعادلة (1) و(2)

$-X_1 + 3X_2 = 10$ ..... (1)

$X_1 + X_2 = 6$ ..... (2)

بالجمع

$0 + 4X_2 = 16$

$\therefore X_2 = 4$

نعوض في المعادلة (2)

$X_1 + X_2 = 6$ ..... (2)

$X_1 + 4 = 6$

$\therefore X_1 = 2$

$\therefore$ احداثيات النقطة C (2,4)

B: تقاطع القيدين (3) و (2)

$X_1 + X_2 = 6$ ..... (2)

$X_1 - X_2 = 2$ ..... (3)

بالجمع

$2X_1 = 8$

$\therefore X_1 = 4$

نعوض في المعادلة (2)

$4 + X_2 = 6$ ..... (2)

$X_2 = 6 - 4 = 2$

$\therefore X_2 = 2$

$\therefore$ احداثيات النقطة B (4,2)

$-X_1 + 3X_2 = 10$ ..... (1)

$X_2 = \frac{10}{3}$

$\therefore$ احداثيات النقطة D $(0, \frac{10}{3})$

نعوض اركان منطقة الحلول الممكنة في معادلة دالة الهدف فينتج مايلي :

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = -X_1 + 2X_2$
A (2, 0)	**Z = -1(2) + 2(0) = -2**
B (4, 2)	**Z = -1(4) + 2(2) = 0**
C (2, 4)	**Z = -1(2) + 2(4) = 6**
D $(0, \frac{10}{3})$	**Z = -1(0) + 2$(\frac{10}{3})$ = $\frac{20}{3}$**

The Minimum value of the objective Function Z = -2 occur at the extreme point A (2, 0)

Example 7:

A diet Food for sick person must contain at last 4000 units of vitamins 50 units of minerals and 1400 calories two food A and B available at a cost $4 and $3 per unit, respectively. If one of A contain 200 unit of vitamin. 1 unit of mineral and 40 calories and one unit of food B contain 100 units of vitamin, 2 units of mineral and 40 calories find by graphic method what combination of foods be used to have least cost?

غداء (دايت) للمرضى يجب ان يتكون كحد ادنى 4000 من الفيتامينات و 50 وحدة من المعادن و 1400 من السعرات الحرارية . هناك نوعين من المواد الغذائية متوفرة بأقل التكاليف. ID (3) للنموذج A وID (4) للنموذج B. إذا كان الوحدة الواحدة من Aتتكون من 200 وحدة من الفيتامينات و (1) وحده من العناصر المعدنية و40 من السعرات الحرارية والمنتوج B يتكون من 100 وحده من الفيتامينات. (2) وحده من العناصر المعدنية , 40 وحده السعرات الحرارية اوجد التشكيلة المواد الغذائية التي تستخدم لتقليل التكاليف مستخدماً الطريق البيانية؟

Solution: -

The data of the given problem can be summarized as shown follows

البيانات للمشكلة يمكن تلخيصها كما يلي:

المادة الغذائية Food	الوحدة تتكون من Unite Content of			تكلفة الوحدة Cost per unit (R.S)
	Vitamin	Mineral	Calories	
A	200	1	40	3
B	100	2	40	4
اقل ما يمكن من الاحتياجات Minimum Requirement	4000	50	1400	

نفرض ان X_1 عدد الوحدات من المادة الغذائية A

نفرض ان X_2 عدد الوحدات من المادة الغذائية B

النموذج الرياضي للمشكلة

L.P model of the given problem

Minimize (total cost) $Z = 4X_1 + 3X_2$

Subject to constraints:

$200X_1 + 100X_2 \geq 4000$ ……. (1)

$X_1 + 2X_2 \geq 50$ ……..…… (2)

$40X_1 + 40X_2 \geq 1400$ …… (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

نحدد تقاطع القيود مع المحورين وكما يلي:

Constraints	Points
$200X_1 + 100X_2 = 4000$	(0, 40) (20, 0)
$X_1 + 2X_2 = 50$	(0, 25) (50, 0)
$40X_1 + 40X_2 = 1400$	(0, 35) (35, 0)

استخراج احداثيات النقطة B والتي تمثل تقاطع القيدين (1) و (3)

$200X_1 + 100X_2 = 4000$ ..... (1)

$40X_1 + 40X_2 = 1400$ ..... (3)

بقسمة المعادلة (1) على (5)

$40X_1 + 20X_2 = 800$ ..... (1)

$40X_1 + 40X_2 = 1400$ ..... (3)

بطرح (1) من (3)

$20X_2 = 600$

$\therefore X_2 = 30$

بالتعويض في (3)

$40X_1 + 20(30) = 800$

$40X_1 + 600 = 800$

$\therefore X_1 = \frac{200}{40} = 5$

∴ احداثيات النقطة B هي (5,30)

$X_1 + 2X_2 = 50$ ..... (2)

$40X_1 + 40X_2 = 1400$ ..... (3)

بقسمة المعادلة (1) على 5

$2X_1 + 2X_2 = 70$ ..... (3)

بطرح (1) من (3)

$\therefore X_1 = 20$

بالتعويض في (1)

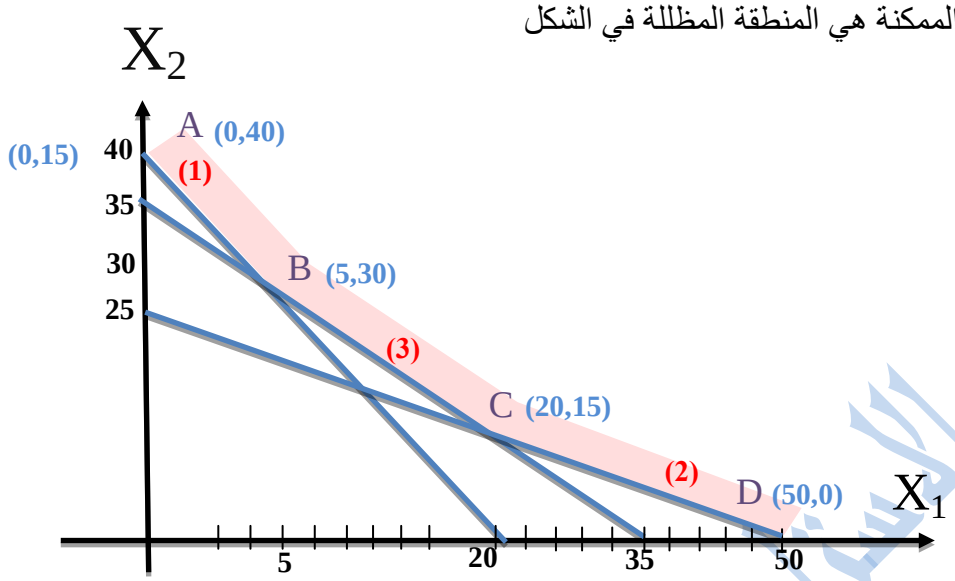
$20 + 2X_2 = 50$

$2X_2 = 30$

$\therefore X_2 = 15$

∴ احداثيات النقطة C (20,15)

منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة في الشكل



اركان منطقة الحلول الممكنة هي A,B,C,D

نعوض اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف وكما يلي :

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 4X_1 + 3X_2$
A (0, 40)	Z = 4(0) + 3(40) = 120
B (5, 30)	Z = 4(5) + 3(30) = 110
C (20, 15)	Z = 4(20) + 3(15) = 125
D (50, 0)	Z = 4(50) + 30 = 230

The optimum cost At A (0,40)

Example 8:

A Firm is engaged in breeding sheep's. The sheep's are fed on various products grown on the farm. In view of the need to ensure certain nutrient constituents (call them X, Y and Z), it is necessary to buy two additional products, say, A and B. One unit of product B contain 6 units of X and 10 units of Y, the minimum requirement of X, Y and Z is 108 units, 36 unit and 100 units respectively. Product A costs, Rs. 20 per unit and product B, Rs. 40 per unit. Formulate this problem as a LP problem to minimize the total cost, and solve the problem by using graphical method.

شركة لتربية وتكاثر الاغنام. الغنم يغذى بمنتجات مختلفة ولضمان توافر عناصر طبيعية والتي تعتبر من المكونات الغذائية الضرورية . ويجب شراء نوعين اضافيين من المنتجات تدعى A و B الوحدة من المنتوج A تتكون من 36 وحدة من X و3 وحدة من Y و 3 وحدة من Z الوحدة من المنتوج B تتكون من 6 وحدات من X و 12 وحدة من Y و 10 وحدة من Z والحد الادنى من الاحتياجات من X و Y و Z هي 108 وحدة و 36 و100 على التوالي . تكلفة المنتوج A 20 لكل وحدة والمنتوج B 40 . المطلوب ايجاد الصياغة الرياضية للمشكلة بهيئة نموذج برمجة خطية لتقليل التكاليف وحله بالطريقة البيانية.

Solution: -

The data of the given problem can be summarized as shown follows

البيانات للمشكلة يمكن تلخيصها كما يلي:

المنتجات Product	Type of nutrient constituents			Cost product
	X	Y	Z	
A	36	3	20	20
B	6	12	10	40
اقل ما يمكن من الاحتياجات Minimum Requirement	108	36	100	

نفرض ان X_1 كمية الانتاج من A

نفرض ان X_2 كمية الانتاج من B

النموذج الرياضي للمشكلة

L.P model of the given problem

Minimize (total cost) $Z = 20X_1 + 40X_2$

Subject to constraints:

$36X_1 + 6X_2 \geq 108$ ..... (1)

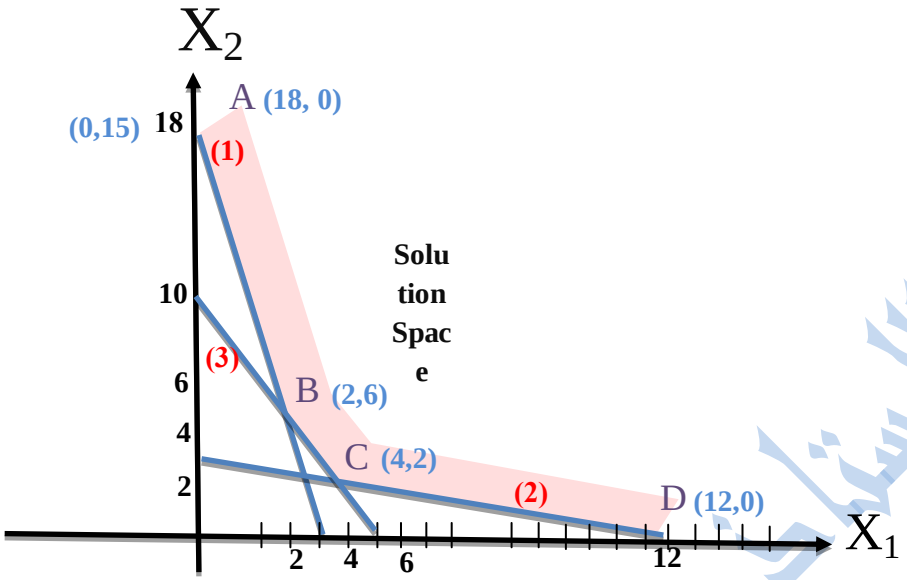
$3X_1 + 12X_2 \geq 36$..... (2)

$20X_1 + 10X_2 \geq 100$ ..... (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

Constraints	Points
$36X_1 + 6X_2 = 108$	(0, 18) (3, 0)
$3X_1 + 12X_2 = 36$	(0, 3) (12, 0)
$20X_1 + 10X_2 = 100$	(0, 10) (5, 0)

نحدد تقاطع القيود مع المحورين وكما يلي:



نلاحظ ان المنطقة المظلله هي منطقة الحلول الممكنة واركانها A و D معلومة الاحداثيات اما B و C فهي مجهولة لذا نستخرج احداثياتها بتقاطع القيود وكما يلي :

استخراج احداثيات النقطة B والتي تمثل تقاطع القيدين (1) و (3)

$36X_1 + 6X_2 = 108$ ..... (1)

$20X_1 + 10X_2 = 100$ ..... (2)

من معادلة رقم (2)

$10X_2 = 100 - 20X_1$

$\therefore X_2 = \frac{100-20X_1}{10} = 10 - 2X_1$ ..... (3)

نعوض في المعادلة (1)

$36X_1 + 6(10 - 2X_1) = 108$

$36X_1 + 60 - 12X_1 = 108$

$24X_1 = 48$

$\therefore X_1 = \frac{48}{24} = 2$

نعوض في المعادلة (3)

$X_2 = 10 - 2X_1$

$X_2 = 10 - 2(2)$

$\therefore X_2 = 6$

∴ احداثيات النقطة B (2,6)

استخراج احداثيات النقطة C والتي تمثل تقاطع القيدين (2) و (3)

$3X_1 + 12X_2 = 36$ ..... (2)

$20X_1 + 10X_2 = 100$ ..... (3)

من المعادلة (2)

$3X_1 = 36 - 12X_2$

$X_1 = \frac{36-12X_2}{3}$

$\therefore X_1 = 12 - 4X_2$

نعوض في المعادلة (3)

$20(12 - 4X_2) + 10X_2 = 100$

$240 - 80X_2 + 10X_2 = 100$

$240 - 70X_2 = 100$

$240 - 100 = 70X_2$

$140 = 70X_2$

$\therefore X_2 = 2$

نعوض في المعادلة (2)

$3X_1 + 12(2) = 36$

$3X_1 + 24 = 36$

$X_1 = \frac{12}{3} = 4$

$\therefore X_1 = 4$

∴ احداثيات النقطة C (4,2)

بعد ان اصبحت جميع النقاط معلومة نعوض احداثياتها في دالة الهدف:

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 20X_1 + 40X_2$
A (0, 18)	**Z = 20(0) + 40(18) = 720**
B (2, 6)	**Z = 20(2) + 40(6) = 280**
C (4, 2)	**Z = 20(4) + 40(2) = 160**
D (12, 0)	**Z = 20(12) + 40(0) = 240**

The Minimum objective Function occur at the extreme point C (4, 2) the optimum value =160

Example 3: **Use the graphical method to solve the following L.P. problem**

Maximize (Z) = $10X_1 + 20X_2$

Subject to the constraints:

$X_1 + X_2 \leq 30$ ……. (1)

$X_2 \leq 3$ ……..... (2)

$0 \leq X_2 \leq 12$ ……..... (3)

$0 \leq X_1 \leq 20$ ……..... (4)

$X_1 - X_2 \geq 0$ ……..…. (5)

$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

اولاً: تحويل المتباينات الى قيود

$X_1 + X_2 = 30$ ……. (1)

$X_2 = 3$ ……..... (2)

$0 \leq X_2 = 12$ ……..... (3)

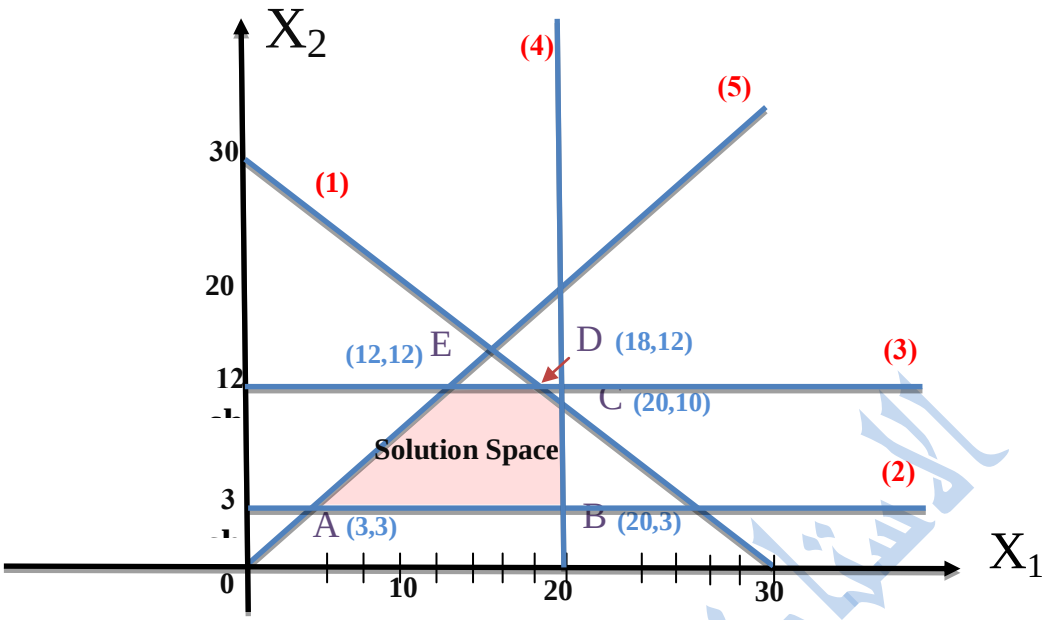
$0 \leq X_1 = 20$ ……..... (4)

$X_1 - X_2 = 0$ ……..…. (5)

ثانياً: نحدد تقاطع القيود بالمحورين

Constraints	Points
$X_1 + X_2 = 30$	(0, 30) (30, 0)
$X_2 = 3$	(0, 3)
$X_2 = 12$	(0, 12)
$X_1 = 20$	(20, 0)
$X_1 - X_2 = 0$	(0, 0)

ثالثاً: نرسم القيود بيانياً



رابعاً : تحديد المنطقة الملائمة او منطقة الحلول الممكنة A,B,C,D,E المظللة

خامساً: ايجاد احداثيات نقاط التطرف Extreme points المجهولة

النقطة A تمثل تقاطع القيدين (2) و (5)

$X_2 = 3$ ..... (2)

$X_1 - X_2 = 0$ ..... (5)

نعوض قيمة X2 في المعادلة (5)

$X_1 - 3 = 0$

$\therefore X_1 = 3$

∴ احداثيات النقطة A (33,)

النقطة B والتي تمثل تقاطع القيدين (2) و (3)

$X_2 = 3$

$X_1 = 20$

∴ احداثيات النقطة B (203,)

النقطة C والتي تمثل تقاطع القيدين (1) و (4)

$X_1 + X_2 = 30$ ..... (1)

$X_1 = 20$ ..... (4)

نعوض في المعادلة (1)

$20 + X_2 = 30$

$\therefore X_2 = 10$

$\therefore$ احداثيات النقطة C (20,10)

النقطة D والتي تمثل تقاطع القيدين (3) و (1)

$X_1 + X_2 = 30$ ..... (1)

$X_2 = 12$ ..... (3)

نعوض في المعادلة (1)

$X_1 + 12 = 30$

$\therefore X_1 = 18$

$\therefore$ احداثيات النقطة D (18,12)

النقطة E والتي تمثل تقاطع القيدين (5) و (3)

$X_1 - X_2 = 0$ ..... (5)

$X_2 = 12$ ..... (3)

نعوض في المعادلة (5)

$X_1 - 12 = 0$

$\therefore X_1 = 12$

$\therefore$ احداثيات النقطة E (12,12)

سادساً: بتعويض نقاط التطرف في دالة الهدف فينتج:

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 10X_1 + 20X_2$
A (3, 3)	**Z = 10(3) + 20(3) = 90**
B (20, 3)	**Z = 10(20) + 20(3) = 260**
C (20, 10)	**Z = 10(20) + 20(10) = 400**
D (18, 12)	**Z = 10(18) + 20(12) = 420**
E (12, 12)	**Z = 10(12) + 20(12) = 360**

The Maximum value of the objective Function Z = 420 occur at the extreme point D (18, 12)

Example 4:

Mr. Mohammed, a retired Govt. officer, has recently received his retirement benefits, viz, provident fund gratuity, etc. he is contemplating as to how much funds he should invest in various alternatives open to him so as to maximize return on investment. The investment alternatives are: government securities, fixed deposits of public limited company, equity shares, time deposits in banks, national saving certificates and real estate. He has made a subjective estimate of the risk involved. The data on the return on investment, the number of years for which the funds will be blocked to earn this return on investment and the subjective risk involved are as follows:

Investment alternatives	Return	No. of years	Risk
Govt. securities	6%	15	1
Company deposits	15%	3	3
Equity shares	20%	6	7
Time deposits	10%	3	1
Real estate	12%	6	1
	25%	10	2

He was wondering what percentage of funds he should invest in each alternative so as to maximize the return on investment. He decided that average risk should not be more than 4, and funds should not be locked up for more than 15 years. Formulate an L.P model for the problem if he does not want more than 30% of the investment to be put in the real estate.

السيد محمد ، موظف حكومي متقاعد ، تلقى مؤخرًا استحقاقات التقاعد ، أي صندوق الادخار ، المكافآت ، وما إلى ذلك. وهو يفكر في مقدار الأموال التي يجب أن يستثمرها في البدائل المختلفة المتاحة له لزيادة عائد الاستثمار إلى أقصى حد. بدائل الاستثمار هي: الأوراق المالية الحكومية والودائع الثابتة لشركة عامة محدودة وأسهم عادية والودائع لأجل في البنوك وشهادات التوفير الوطنية والعقارات. لقد قام بتقدير شخصي للمخاطر المحتملة. البيانات حول العائد على الاستثمار، وعدد من المتاجرة التي سيتم حظر الأموال من أجلها للحصول على هذا العائد على الاستثمار والمخاطر الشخصية المحتملة هي كما يلي:

بدائل الاستثمار	العائد	عدد السنيين	المخاطرة
الاوراق المالية الحكومية	%6	15	1
ودائع الشركة	%15	3	3
اسهم عادية	%20	6	7
ودائع لأجل	%10	3	1
شهادات التوفير الوطنية	%12	6	1
العقار	%25	10	2

كان يتساءل عن نسبة الأموال التي يجب أن يستثمرها في كل بديل لزيادة عائد الاستثمار إلى أقصى حد. وقرر أن متوسط المخاطر يجب ألا يزيد عن 4 ، ولا يجب إغلاق الأموال لأكثر من 15 عامًا. اوجد صياغة نموذج L.P. للمشكلة إذا لم يرغب في وضع أكثر من 30٪ من الاستثمار في العقار.

Example: (Portfolio Selection Problem)

The Agro Promotion Bank is trying to select investment portfolio for a cotton farmer. The bank has chosen a set of five investment alternatives, with subjective estimates of rates of return and risk, as follows:

Investment	Annual rate of return (%)	Risk
Tax-free municipal bonds	6.0	1.3
Corporate bonds	8.0	1.5
High grade common stock	5.0	1.9
Mutual fund	7.0	1.7
Real estate	15.0	2.7

The bank officer in charge of the portfolio would like to maximize the average annual rate of return on the portfolio. However, the wealthy investor has specified that the average risk of the portfolio should not exceed 2.0; and does not want more than 20% of the investment to be put into real estate. Formulate an L.P. model for the problem

(مشكلة اختيار المحفظة)

يحاول بنك الترويج الزراعي اختيار محفظة استثمارية لمزارع قطن. اختار البنك مجموعة من خمسة بدائل استثمارية، مع تقديرات ذاتية لمعدلات العائد والمخاطر، على النحو التالي:

الاستثمار	معدل العائد السنوي (%)	المخاطرة
سندات بلدية معفاة من الضرائب	6.0	1.3
سندات الشركات	8.0	1.5
الأسهم العادية عالية الجودة	5.0	1.9
الصندوق المشترك	7.0	1.7
العقارات	15.0	2.7

يود مسؤول البنك المسؤول عن المحفظة زيادة متوسط معدل العائد السنوي على المحفظة. ومع ذلك، حدد المستثمر الثري أن متوسط مخاطر المحفظة يجب ألا يتجاوز 2.0، ولا يريد أن يتم استثمار أكثر من 20٪ من الاستثمار في العقارات. صياغة نموذج L.P. للمشكلة.

Example: (Product Mix Problem)

The Delhi Florist Company is planning to make up floral arrangements for the upcoming festival. The company has available the following supply of flowers at the costs shown:

Type	Number available	Cost per flower $
Red roses	800	0.20
Gardenias	456	0.25
Carnations	4000	0.15
White roses	920	0.20
Yellow roses	422	0.22

These flowers can be used in any of the four popular arrangements whose make up and selling prices are as follows:

Arrangement	Requirements	Selling price
Economy	4 red roses 2 gardenias 8 carnations	$ 6
Maytime	8 white roses 5 gardenias 10 carnations	$ 8
Spring-color	4 yellow roses 9 red roses	$ 10

(مشكلة مزيج المنتج)

تخطط شركة دلهي للزهور لعمل ترتيبات زهور للمهرجان القادم. توفر الشركة الإمدادات التالية من الزهور بالتكلفة الموضحة:

النوع	الرقم المتاح	التكلفة لكل زهرة $
ورود حمراء	800	0.20
غارديليا	456	0.25
قرنفل	4,000	0.15
ورود بيضاء	920	0.20
ورود صفراء	422	0.22

يمكن استخدام هذه الأزهار في أي من الترتيبات الأربعة الشائعة التي تكون أسعار تكوينها وبيعها كما يلي:

الترتيب	المتطلبات	سعر البيع
الاقتصاد	4 ورود حمراء 2 الغرديليا 8 قرنفل	$ 6
ايار	8 ورود بيضاء 5 غارديليا 10 قرنفل	$ 8
لون الربيع	4 ورود صفراء 9 ورود حمراء	$ 10

Example: (Product Mix Problem)

A plant manufactures washing machines and dryers. The major manufacturing departments are the stamping deptt., motor and transmission deptt. and assembly deptt. The first two departments produce parts for both the products while the assembly lines are different for the two products. The monthly deptt. capacities are

Stamping deptt.	**: 1,000 washers or 1,000 dryers**
Motor and transmission deptt.	**: 1,600 washers or 7,000 dryers**
Washer assembly line	**: 9,000 washers only**
Dryer assembly line	**: 5,000 dryers only**

Profits per piece of washers and dryers are $ 2,700 and $ 3,000 respectively. Formulate the L.P. model.

يقوم مصنع بتصنيع الغسالات والمجففات. أقسام التصنيع الرئيسية هي قسم الختم ، قسم المحرك وناقل الحركة. وقسم التجميع . ينتج القسمان الأولان أجزاء لكل من المنتجين بينما تختلف خطوط التجميع للمنتجين.

قدرات القسم الشهرية هي:

قسم الختم	**:**	**1,000 غسالة او 1,000 مجفف**
قسم المحرك وناقل الحركة	**:**	**1,600 غسالة او 7,000 مجفف**
خط تجميع الغسالة	**:**	**9,000 غسالة فقط**
خط تجميع المجفف	**:**	**5,000 مجفف فقط**

الأرباح لكل قطعة من الغسالات والمجففات $ 2,700 و $ 3,000 على التوالي . صغ نموذج L.P.

Example: (Product Mix Problem)

Consider a company that must produce two products over a production period of three months of duration. The company can pay for materials and labour from two sources: company funds and borrowed funds. The firm faces three decisions:

1. **How many units should it produce of product 1?**
2. **How many units should it produce of product 2?**
3. **How much money should it borrow to support the production of the two products?**

In making these decisions the firm wishes to maximize the profit contribution subject to the conditions stated below:

(i) Since the company's products are enjoying a seller's market, it can sell as many units as it can produce. The company would, therefore, like to produce as many units as possible subject to production capacity and

financial constraints. The capacity constraints, together with cost and price data, are given in the table below:

Product	Selling price ($/unit)	Cost of production ($/unit)	Required hours per unit in deptt		
			A	B	C
1	14	10	0.5	0.3	0.2
2	11	8	0.3	0.4	0.1
	Available hours funds per production period of three months		500	400	200

(ii) The available company funds during the production period will be $ 3 lakhs.

(iii) A bank will give loans upto $ 2 lakhs per production period at an interest rate of 20 per cent per annum provided the company's acid (quick) test ratio is at least 1 to 1 while the loan is outstanding.

Take a simplified acid test ratio given by

$$\frac{\text{Surplus cash on hand after production + Accounts receivable}}{\text{Bank borrowings + Interest accrued thereon}}$$

(iv) Also make sure that the needed funds are made available for meeting the production costs.

Formulate the above as linear programming problem.

افترض ان على شركة انتاج منتجين على مدى فترة إنتاج مدتها ثلاثة أشهر. يمكن للشركة أن تدفع مقابل المواد والعمالة من مصدرين: أموال الشركة والأموال المقترضة. تواجه الشركة ثلاثة قرارات:

1. **كم عدد الوحدات التي يجب أن تنتجها للمنتج 1؟**
2. **كم عدد الوحدات التي يجب أن ينتجها للمنتج 2؟**
3. **كم من المال يجب ان تقترض لدعم إنتاج المنتجين؟**

عند اتخاذ هذه القرارات ، ترغب الشركة في زيادة مساهمة الربح إلى الحد الأقصى وفقًا للشروط الواردة أدناه:

(1) نظرًا لأن منتجات الشركة تتمتع بسوق البائع ، يمكنها بيع أكبر عدد ممكن من الوحدات التي يمكن أن تنتجها. لذلك ، ترغب الشركة في إنتاج أكبر عدد ممكن من الوحدات وفقًا للقدرة الإنتاجية والقيود المالية. ترد قيود السعة ، إلى جانب بيانات التكلفة والأسعار ، في الجدول أدناه:

المنتج	سعر البيع (بوحدة $)	تكلفة الإنتاج (بوحدة $)	الساعات المطلوبة لكل وحدة في القسم		
			A	B	C
1	14 11	10 8	0.5 0.3	0.3 0.4	0.2 0.1
2	عدد الساعات المتاحة لكل فترة إنتاج ثلاثة أشهر		500	400	200

(2) هل ستكون أموال الشركة المتاحة خلال فترة الإنتاج $ 3 لكح.

(3) يمنح البنك قروضاً تصل إلى $ 2 لكح لكل فترة إنتاج بمعدل فائدة 20 في المائة سنويًا بشرط أن تكون نسبة اختبار الأحماض (السريعة) للشركة 1 إلى 1 على الأقل بينما يكون القرض مستحقًا.

خذ نسبة اختبار حمض مبسطة مقدمة من

الفائض النقدي في متناول اليد بعد الإنتاج + حسابات القبض

قروض مصرفية + الفوائد المستحقة عليها

(4) وتأكد أيضًا من توفر الأموال اللازمة لتغطية تكاليف الإنتاج.

اوجد صياغة ما سبق كمشكلة برمجة خطية.

Example: (Product Mix Problem)

A company produces two parts P_1 and P_2 used in television sets. A unit of P_1 costs the company $ 5 in wages and $ 6 in material, while a unit of P_2 costs the company $ 20 in wages and $ 10 in material. The company sells both parts on one-period credit terms, but the company's labour and material expenses must be paid in cash. The selling price of P_1 is $ 25/ unit and P_2 is $ 60/ unit. The company's production capacity is limited by two considerations. First, at the beginning of period 1, the company has an initial balance of $ 35,000 (cash + bank credit + collections from past credit sales). Second, the company has available in each period 1,600 hours of machine time and 1,400 hours of assembly time. The production of each P_1 requires 2 hours of machine time and 1.5 hours of assembly time, while production of each P_2 requires 2 hours of machine time and 3 hours of assembly time. Formulate the problem as L.P. model to maximize the total profit to the company.

تنتج الشركة جزأين P_1 و P_2 يستخدمان في أجهزة التلفزيون. وحدة P، تكلف الشركة 5 $ في الأجور و 6 $ في المواد ، في حين أن وحدة P تكلف الشركة 20 $ في الأجور و 10 $ في المواد. تبيع الشركة كلا الجزئين بشروط ائتمانية لفترة واحدة، ولكن يجب دفع نفقات العمل والعمالة للشركة نقدًا. سعر بيع P1 25 $ / وحدة و P2 60 $ / وحدة. الطاقة الإنتاجية للشركة محدودة باعتبارين. أولاً، في بداية الفترة 1 ، كان لدى الشركة رصيد مبدئي قدره 35000 $ (نقد + ائتمان مصرفي + تحصيلات من مبيعات ائتمانية سابقة). ثانيًا ، يتوفر لدى الشركة في كل فترة 1600 ساعة من وقت

الماكينة و 1400 ساعة من وقت التجميع. يتطلب إنتاج كل P_1 ساعتين من وقت الماكينة و1.5 ساعة من وقت التجميع، بينما يتطلب إنتاج كل P_2 ساعتين من وقت الماكينة و 3 ساعات من وقت التجميع. صغ المشكلة كنموذج L.P. لزيادة إجمالي الربح للشركة الى اقصى حد.

Example: (Product Mix Problem)

A manufacturing company has two plants, which produce and supply two products X and Y. Each plant can work up to 15 hours a day. In plant A, it takes 3 hours to prepare and pack 1,000 liters of X and 2 hours to prepare and pack 1 ton of Y. In plant B, it takes 2 hours to prepare and pack 1,000 liters of X and 2.5 hours to prepare and pack 1 ton of Y. In plant A, it costs $ 20,000 to prepare and pack 1,000 litres of X and $ 25,000 to prepare and pack 1 ton of Y, whereas these costs are $ 22,000 and $ 23,000 respectively in plant B. The company wants to produce 12,000 litres of X and 10 tons of Y and wants to organize the production so as to produce the products at minimum cost. Formulate this problem as an L.P. model.

لدى شركة تصنيع مصنعان ينتجان ويوردان منتجين X و Y. يمكن لكل مصنع أن يعمل حتى 15 ساعة في اليوم. في المصنع A ، يستغرق تحضير وتعبئة 1000 لتر من X و 2 ساعة لتحضير وتعبئة 1 طن من Y . في المصنع B ، يستغرق الأمر ساعتين لإعداد وتعبئة 1000 لتر من X و 2.5 ساعة للتحضير و تعبئة 1 طن من Y. في المصنع A ، يكلف $ 20000 لأعداد وتعبئة 1000 لتر من X و $ 25,000 لإعداد وتعبئة طن واحد من Y ، في حين أن هذه التكاليف هي $ 22000 و $ 23000 على التوالي في المصنع B. تريد الشركة إنتاج 12,000 لترا من X و 10 أطنان من Y وتريد تنظيم الإنتاج لإنتاج المنتجات بأقل تكلفة. صغ هذه المشكلة كنموذج L.P.

Example: (Product Mix Problem)

A truck company has $ 50 lakh to invest and is to choose among three types of trucks A, B and C. Truck A has 12 tonne payload and is expected to average 50 km per hour. It costs $ 80,000. Truck B has a 20 tonne payload, is expected to average 45 km per hour and costs $ 1,00,000. Truck C is a modified form of B. It has sleeping space for the driver, which reduces its payload capacity to 17 tonne, while raising the cost to $ 1,20,000.

Truck A requires a crew of one man, and if driven on three shifts per day, could run for an average of 20 hours a day. Trucks B and C require a crew of two men each and if driven on three shifts per day, could be run for an average of 19 hours and 22 hours respectively. The company has a fleet of 120 crewmen available to it. If the total number of trucks are not to exceed 40, how many trucks of each type should be purchased if the

company wants to maximize its capacity in tone km per day? Formulate the problem as L.P. problem.

شركة شاحنات لديها $ 50 (لكح) للاستثمار وتستطيع الاختيار من بين ثلاثة أنواع من الشاحنات A وB و C. تحمل شاحنة A حمولة 12 طنًا ومن المتوقع أن يبلغ متوسطها 50 كم في الساعة. تكلف $ 80,000. تبلغ حمولة الشاحنة 20B طنًا، ومن المتوقع أن يبلغ متوسطها 45 كم في الساعة والتكاليف $ 100,000. الشاحنة C هي شكل معدّل من B. تحتوي على مساحة نوم للسائق، مما يقلل من حمولتها إلى 17 طنًا، بينما يرفع التكلفة إلى $ 1,20,000. تتطلب الشاحنة A طاقمًا من رجل واحد، وإذا تمت قيادتها على ثلاث نوبات في اليوم، يمكن أن تعمل لمدة 20 ساعة في المتوسط. تتطلب الشاحنتين B وC طاقمًا من رجلين لكل منهما وإذا تم تشغيلهما على ثلاث نوبات في اليوم، يمكن تشغيلهما بمعدل 19 ساعة و 22 ساعة على التوالي. الشركة لديها أسطول من 120 من أفراد الطاقم المتاح لها. إذا كان العدد الإجمالي للشاحنات لا يتجاوز 40 شاحنة، فكم عدد الشاحنات التي يجب شراؤها من كل نوع إذا كانت الشركة ترغب في تعظيم طاقتها بالطن كم في اليوم؟ صغ المشكلة على أنها مشكلة .L.P .

الإشراف د.م عبدالحسن رجيه

الحالات الخاصه لنماذج البرمجه الخطية

اولاً : الحل البياني لنماذج التدنية (Minimization)

في هذه الحالة عند التعويض في دالة الهدف يكون الحل الامثل عند النقطة او النقاط التي تحقق اقل قيمة لدالة الهدف وفيما يلي مثال يوضح ذلك :

Example 5: Find the Minimum value of

$$\text{Min } (Z) = 10X_1 - 6X_2$$

Subject to:

$$4X_1 + 6X_2 \geq 24 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution: -

$$4X_1 + 6X_2 = 24$$

$$4(0) + 6X_2 = 24$$

$$X_2 = \frac{24}{6} = 4$$

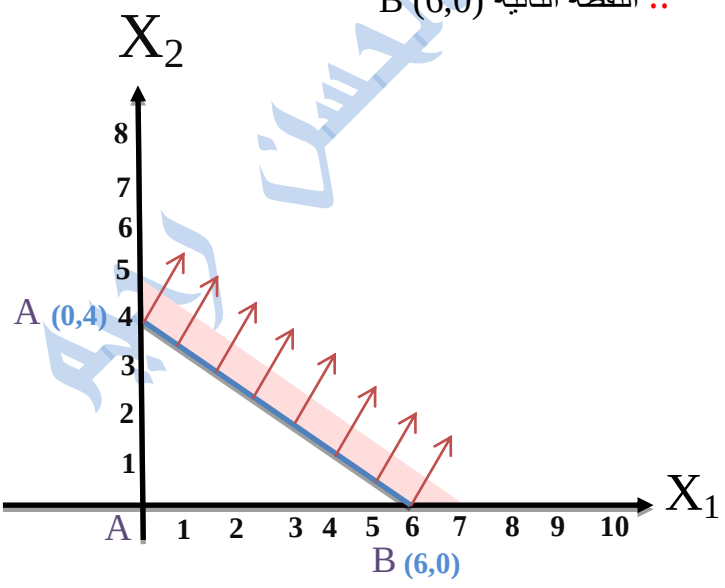
∴ النقطة الاولى A (0,4)

نفرض $X_1 = 0$

$$4X_1 + 6(0) = 24$$

$$X_1 = \frac{24}{4} = 6$$

∴ النقطة الثانية B (6,0)



شكل (2-10)

$$Z(B) = 10(6) - 6(0) = 60$$

$$Z(A) = 10(0) - 6(4) = -24$$

لذا فأن الحل الامثل عند النقطة A

$Z = -24$

$X_1 = 0$

$X_2 = 4$

ثانياً : الحل غير المحدود (Unbounded Solution)

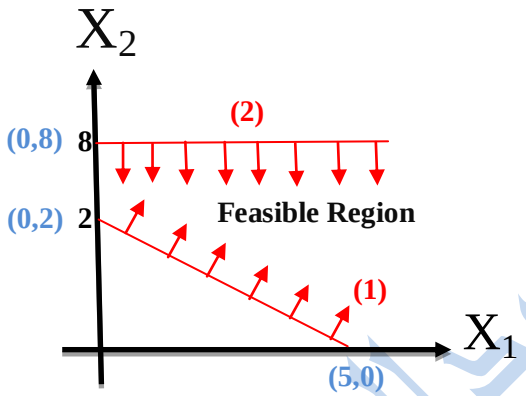
وهنا تكون منطقة الحلول الممكنة Feasible Region مفتوحة أي أن زيادة الموارد يؤدي الى زيادة قيمة دالة الهدف بدون حدود و كما يلي :

$$\text{Max } (Z) = 3X_1 - 2X_2$$

$$2X_1 + 5X_2 \geq 10 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$X_2 \leq 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

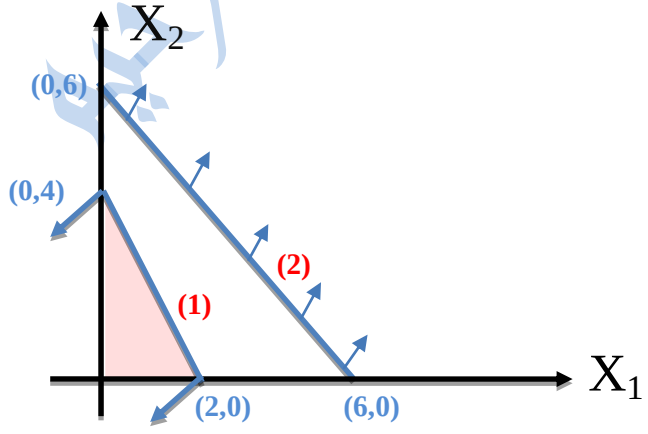
$$X_1, X_2 \geq 0$$



شكل (2-11)

ثالثاً : عدم وجود حل Infeasible Solution

وهذه الحالة غالبا ما تنتج عند وجود خطأ في الصياغة الرياضية أو وجود قيود متعارضة كما في المثال الأتي حيث لا توجد منطقه حل مشتركة بين القيود



شكل (2-12)

Max (Z) = $4X_1 + 2X_2$

Subject to:

$4X_1 + 2X_2 \leq 8$ ..... (1)

$5X_1 + 5X_2 \geq 30$ ..... (2)

رابعاً : حالة وجود اكثر من حل امثل Multiple Optimal Solution

وهنا يتكون اكثر من نقطة من اركان منطقة الحلول الممكنة تحقق نفس الحل الامثل

Example 6 : Use the graphical method to solve the following LP Problem

Maximize (Z) = $10X_1 - 6X_2$

Subject to the constraints

$5X_1 + 3X_2 \leq 30$ ..... (1)

$X_1 + 2X_2 \leq 18$ ..... (2)

$X_1, X_2 \geq 0$

Constraints	Points
$5X_1 + 3X_2 \leq 30$	(0,10) (6,0)
$X_1 + 2X_2 \leq 18$	(0,9) (18,0)

ايجاد احداثيات النقطة (B) والتي تمثل تقاطع القيدين

$5X_1 + 3X_2 = 30$ ..... (1)

$X_1 + 2X_2 = 18$ ..... (2)

بضرب المعادلة (2) بـ (5)

$5X_1 + 10X_2 = 90$ ..... (2)

يطرح المعادلة (1) من (2)

$5X_1 + 10X_2 = 90$ ..... (2)

$5X_1 + 3X_2 = 30$ ..... (1)

$7X_2 = 60$

$X_2 = \frac{60}{7}$

بالتعويض في المعادلة (1)

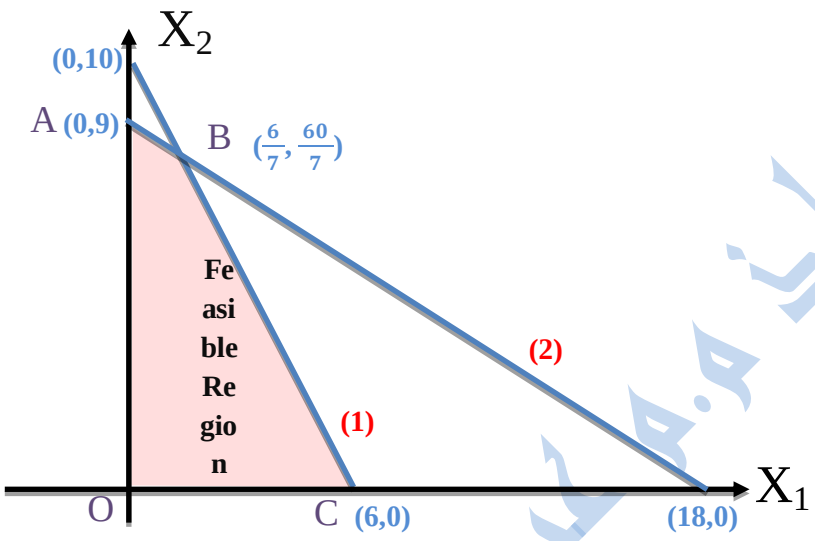
$5X_1 + 3(\frac{60}{7}) = 30$

$$5X_1 = 30 - \frac{180}{7}$$

$$5X_1 = \frac{210 - 180}{7}$$

$$5X_1 = \frac{30}{7}$$

$$X_1 = \frac{6}{7}$$



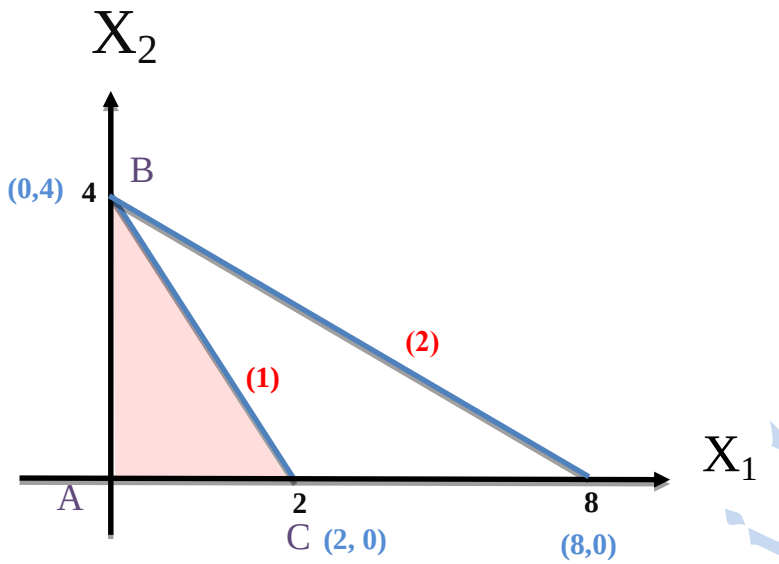
شكل (2-13)

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 10X_1 + 6X_2$
O (0,0)	Z = 10(0) + 6(0) = 0
A (0,9)	Z = 10(0) + 6(9) = 54
B $(\frac{6}{7}, \frac{60}{7})$	Z = 10$(\frac{6}{7})$ + 6$(\frac{60}{7})$ = 60
C (6,0)	Z = 10(6) + 6(0) = 60

لاحظ ان النقطتين B,C يحققان اعظم قيمة لدالة الهدف (الحل الامثل) هذا يعني تعدد الحلول

خامساً : الانحلالية Degeneracy

وهي حالة وجود قيد فائض عن الحل وليس له تأثير على الحل كما يلي :



شكل (2-14)

Max (Z) = $3X_1 + X_2$

$8X_1 + 4X_2 \leq 16$ ..... (1)

$X_1 + 2X_2 \leq 8$ ..... (2)

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 3X_1 + X_2$
A (0,0)	Z = 3(0) + (0) = 0
B (0,4)	Z = 3(0) + 4 = 4
C (2, 0)	Z = 3(2) + (0) = 6

لاحظ ان الحل الامثل عند النقطة C وان القيد الثاني هو قيد فائض