بحوث العمليات

OPERATIONAL RESEARCH

تأليف

الأستاذ المتمرس الدكتور محمد عبود طاهر

كلية شط العرب الجامعة

الفصل الاول

OPERATIONAL RESEARCH

مقدمة فى بحوث العمليات

تعريف بحوث العمليات DEFINITION OF OPERATIONAL RESEARCH

بحوث العمليات هو احد العلوم التي تستخدم الاساليب العلمية الحديثة لحل المشاكل التي تواجه الادارة بطريقة منظمة وعلمية ومن مميزات هذا العلم :-

1- **انه من احد العلوم اي انه علم يتضمن بناء نماذج علمية لحل المشاكل التي تواجه الادارة**
2- **يتطلب فريق عمل متكامل لبناء النماذج للوصول الى الحل الملائم للادارة**
3- **يتطلب دعم الادارة العليا**
4- **يعتمد على خبرة فريق بحوث العمليات**

اساليب بحوث العمليات OPERATIONAL RESEARCH METHODS

نشا علم بحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية الا ان هذا العلم تطور بشكل سريع جداحيث ظهرت الحاجة لهذا العلم في ايجاد الطرق العلمية في تطوير العمليات الانتاجية وادارة الموارد البشرية وادارة التجهيز ويستخدم هذا العلم في معظم المنظمات في الكثير من دول العالم في ظل المنافسة والسيطرة على السوق وتلبية و احتياجات الزبون

لقد ظهرت الكثير من الاساليب العلمية وخاصة بعد الثمانينات من القرن الماضي حيث يمكن استخدام اكثر من اسلوب لحل المشاكل ويمكن ان ندرج البعض من هذه الاساليب

اولا :- الاساليب الرياضية HARD OPERATIONAL RSRARCH

يطلق عليها الاساليب الكلاسيكية وهي الاساليب التي تتضمن نماذج رياضية لحل المشاكل الادارية ومن هذه الاساليب :-

1- **البرمجة الخطية**
2- **البرمجة العددية**
3- **البرمجة الاخطية**
4- **البرمجة الديناميكية**
5- **البرمجة التصادفية**
6- **البرمجة الشبكية**
7- **برمجة الاهداف**
8- **اساليب السيطرة على المخزون**
9- **اساليب النقل والتخصيص**
10- **الشبكات**
11- **نظرية القرار**
12- **نظرية صفوف الانتظار**
13- **نظرية المباراة الاستراتيجية**

ثانيا :- الاساليب المتكاملة مع الأنظمة

وهي الاساليب التي تربط بين الاساليب الرياضية وانظمة وبرامج علوم الحاسبات ومنها

1- **الاساليب التي تستخدم الخوارزميات الجينية والشبكات العصبية**

2- اساليب الانظمة الخبيرة والذكاء الاصطناعي
3- المحاكاة

ثالثا:- الاساليب المرنة SOFT OPERATIONAL RESEAECH

وهي الاساليب التي تعتمد على الحل الابداعي لمشاكل الادارة ومنها

1- اساليب فكر النظم
2- اسلوب ترز
3- الخيارات الاستراتيجية
4- علم السايبرنتك
5- الانظمة المرنة الذكية
6- الصورة الغنية

مجالات تطبيق بحوث العمليات APPLICATION OF OPERATIONAL RESEARCH

لقد طبق بحوث العمليات في مجالات عديدة جدا ومنها على سبيل المثال

اولا :- التوزيع

1- ايجاد الموقع الامثل في ظل الموارد المحددة
2- ايجاد الحجم الامثل للمخزون
3- ايجاد السياسة المثلى للتوزيع

ثانيا:- تخطيط العمليات الانتاجية

1- اختياروتصميم الخطوط الانتاجية
2- تحديد مواقع الانتاج
3- جدولة العمليات الانتاجية
4- التبؤ
5- السيطرة على المخزون
6- تخطيط عمليات الصيانة ةالاستبدال
7- تخطيط القوى العاملة

ثالثا:- عمليات الشراء

1- التطيط للسياسات الخاصة بعمليات الشراء
2- تحديد وتفييم الموردين

رابعا:- التسويق

1- بحوث التسويق
2- البحث عن مصادر جديدة للسوق

3- بحوث المستهلك
4- تقييم رضا الزبون

خامسا :- الادارة المالية

1- ادارة المشاريع المالية
2- البحث عن التمويل
3- تحليل التدفقات النقدية
4- اختيار السياسة المثلى للاستثمار
5- اختيار المشروع الافضل
6- تحديد مواقع البنوك والمصارف

سادسا:- ادارة المشاريع

1- تقييم المشاريع
2- السيطرة على الموارد البشرية للمشروع
3- ادارة تجهيز المشروع
4- تخطيط المشاريع
5- جدولة العمليات

سابعا:- النقل

1- جدولة عمليات الموانيء
2- جدولة عمليات المطارات
3- التنظيم الداخلي للمسافرين

ثامنا:- الخدمات الصحية

1- تخطيط وجدولة دخول وخروج المرضى من المستشفيات
2- السيطرة على مخزون الدم
3- السيطرة على مخزون الدواء
4- تحديد مواقع الاسعاف الفوري
5- تصميم انظمة لمعلجة مرضى الفشل الكلوي
6- تصميم انظمة لمعالجة مرضى السرطان

تاسعا :- سلسلة التجهيز

1- تقييم سلسلة التجهيز
2- تطوير انظمة سلسلة التجهيز

عاشرا :- في المجال الدفاع والعمليات العسكرية

1- تخطيط القوات العسكرية
2- ادارة الامدادات
3- تنظيم مخازن الذخيرة

4- صيانة المعدات والأجهزة
5- التدريب

المحاضرة الثانية

صيغ البرمجة الخطية

Forms of operational research

Forms of Linear Programming صيغ البرمجة الخطية

البرمجة الخطية هي احد أساليب بحوث العمليات وتضمن :

1- دالة الهدف حيث تكون هذه الدالة اما تعظيم الأرباح Maximize (max) او تقليل التكاليف Minimize (min)
2- قيود (محددات) وقد تكون ذات علاقة (≤) أو (=) أو (≥)
3- المتغيرات...... , X_1 , X_2.

ويتم صياغة البرمجة الخطية رياضياً بالصيغ التالية

1- الصيغة العامة General Forms
2- الصيغة القانونية Canonical Forms
3- الصيغة القياسية Standard Forms

اولاً :- الصيغة العامة General Forms

رياضياً تكتب بالشكل التالي

حيث

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots$$

$$\text{OR} \quad \text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots \quad \geq, =, \leq \quad b_1 \quad \text{S.T.}$$

$$a_3x_1 + a_4x_2 + \dots \quad \geq, =, \leq \quad b_2$$

$$anx_1 + an + 1\, x_2 + \dots$$

$$x_1, x_2, \dots \quad \geq 0$$

<u>مميزات الصيغة العامة هي:</u>

1- دالة الهدف اما max أو min

2- القيود (≤) أو (=) أو (≥).

3- المتغيرات دائماً مقيدة الإشارة أي يجب ان تكون (≥0) واذا كان احد المتغيرات غير مقيد الإشارة unrestricted فيتم استبداله بمتغيرين احداهما موجب والأخر سالب مثلا لو كان (غير مقيد) X1 unrestricted يتم استبداله بمتغيرين ونفرضها (Y1 , Y2).

<u>Ex1: Write the following Linear Program by General Form .</u>

اكتب البرمجة الخطية التالية حسب الصيغة العامة.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad Z = 4X_1 + 6x_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 3X_1 + 8X_2 \le 10 \\
&\qquad 6X_1 + 10X_2 = 20 \\
&\qquad X_1 - 10X_2 \ge 80 \\
&\qquad X_1 ,\ X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

<u>الحل :</u>

ملاحظة أن مميزات الصيغة العامة تنطبق على هذه المسألة لذا هذه فأن الصيغة العامة لهذه المسألة تكتب كما هي أي

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad Z = 4X_1 + 6X_2 \\
&\text{S.T.} \quad 3X_1 + 8X_2 \le 10 \\
&\qquad 6X_1 + 10X_2 = 10 \\
&\qquad X_1 - X_2 \ge 80 \\
&\qquad X_1 ,\ X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

ثانياً :الصيغة القانونية Canonical Forms

النموذج الرياضي لهذه الصيغة

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots \\
&\text{S.T.} \\
&a_1x_1 + a_2x_2 + \dots \le b_1 \\
&a_3x_1 + a_4x_4 + \dots \le b_2 \\
&\vdots \\
&an_{x1} + an_{+1}x_2 + \dots \le bn \\
&x_1 , x_2 , \dots \ge 0
\end{aligned}
$$

مميزات الصيغة القانونية:

1- دالة الهدف من نوع max فقط وفي حالة وجود مسألة ذات دالة هدف نوع min فيتم تحويلها الى max بضرب الطرفين * 1-

2- جميع القيود ذات العلاقة (≤) فقط

أ- في حالة احد القيود أو اكثر ذات العلاقة (≥) فيتم تحويل العلاقة الى (≤) بضرب الطرفين *1- .

ب- في حالة اذا كان احد قيود او اكثر ذات العلاقة (=) فيتم التعويض عنها بقيدين ذات علاقة (≤) ولكن إشارات الثاني عكس إشارات القيد الأول .

3- المتغيرات دائما متعددة الإشارة ولكنة اذا كان احد او بعض المتغيرات غير مقيدة الإشارة Unrestricted فيتم التعويض عن المتغير بمتغيرين احدهما موجب والأخر سالب .

Ex1: Write the following Linear Programing by Canonical Form.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad Z = 6x_1 + 5x_2 \\
&\text{s.t.} \\
&x_1 + 8x_2 \ge 10 \\
&2x_1 + 3x_2 = 5 \\
&6x_1 \quad 7x_2 \le 15
\end{aligned}
$$

X1 UNRESTRICTED
$x_2 \geq 0$

<u>الحل</u>

$$\text{Max} \quad Z = 6\,(y_1 - y_2) + 5\,x_2$$

$$\begin{array}{ll} \text{S.T.} & -\,(y_1 - y2) - 8\,x_2 \leq -10 \\ & 2\,(y_1 - y_2) + 3\,x_2 \leq 5 \\ & -\,2\,(y_1 - y_2) - 3\,x_2 \leq -5 \\ & 6\,(y_1 - y_2) + 7\,x_2 \leq 15 \\ & y_1, y_2, x_2 \leq 0 \end{array}$$

<u>ملاحظة :</u>

<u>1-</u> تم التعويض عن X1 بالمتغيرين (y_1,y_2) لان x1 غير مقيد الإشارة .
<u>2-</u> تم ضرب القيد الأول *1- لتغيره الى قيد ذات علاقة (≤) لأنه كان ذات علاقة (≥) .
<u>3-</u> تم التعويض عند القيد الثاني بمتغيرين ذات علاقة (≤) ولكن إشارة المتغيرات الثاني عكس إشارة الأول لان القيد ذات علاقة (=) .

الصيغة القياسية Standard Form:

النموذج الرياضي لهذه الصيغة

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots \\
 & \text{S.T.} \quad \text{or} \\
a_1x_1 + a_2x_2 + \dots & = b_1 \\
a_3x_1 + a_4x_2 + \dots & = b_2 \\
 & \dots\dots\dots \\
anx_1 + an_{+1}x_2 + \dots & \le bn \\
x_1, x_2, \dots & \ge 0
\end{array}
$$

مميزات الصيغة القياسية

1- دالة الهدف نوع Max أوMin.

2- القيود دائماً ذات علاقة (=) .

أ- اذا كان القيد ذات العلاقة (≤) يتم تحويله الى قيد (=) وذلك بإضافة متغير Si .

ب- اذا كان القيد ذات علاقة (≥) يتم تحويلة الى قيد (=) وذلك بطرح متغير Li .

3- المتغيرات دائماً مقيد الإشارة .

Ex1: Write the following Linear Programing by Standard Form.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & Z = 10x_1 + 15x_2 & \\
\text{S.T.} & x_1 + 5x_2 & = 15 \\
 & 3x_1 + 8x_2 & \ge 20 \\
 & 5x_1 + 9x_2 & \le 30 \\
 & x_1 \ \text{unresected} & \\
 & x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

الحل:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & Z = 10(y_1 - y_2) + 15x_2 & \\
\text{S.T.} & (y_1 - y_2) + 5x_2 & = 15 \\
 & 3(y_1 - y_2) + 8x_2 - L_1 & = 20
\end{array}
$$

$$5\,(y_1 - y_2) + 9\,x_2 + S_1 \qquad = 30$$
$$y_1 ,\, y_2 ,\, x_2 \qquad \geq 0$$

الفصل الثالث

صياغة مسائل البر مجة الخطية

صياغة مسائل البرمجة الخطية Problem Formulation

هناك عدة طرق للصياغة مسائل البرمجة الخطية رياضياً ومن هذه الطرق :

1. الطريقة المهيكلة Structuring
2. طريقة التجزئة Decomposition

ولكل من هذه الطرق ميزاتها واستخداماتها وخاصة في المسائل الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات والقيود سوف نتطرق الى هذه الطرق في كتابنا البرمجة الرياضية .mathematical programming والمخصص لطلبة الدراسات العليا ولكن كل الطرق تتضمن ثلاثة خطوات وهي :

الخطوة الأولى (صياغة المتغيرات)

من خلال دراسة وتحليل لمسالة البرمجة الخطية نحدد المتغيرات التي يتطلب اتخاذ القرار بشأنها حيث من خلال تحليل مفتاح القرار نستطيع تحديد ماهي المتغيرات ، مثلاً لو كان القرار هو انتاج عدد محدد من الوحدات من المادة A ومن المادة B اذن فان المتغيرات هي انتاج عدد محدد من الوحدات من المادة B،A ولو كان القرار هو نقل عدد من الوحدات من المادة التي يتم نقلها من مراكز الإنتاج الى مراكز التوزيع .

رياضياً يتم صياغة المتغيرات ب X_i

$$X_i \text{ for } i=1,2,.....L$$

الخطوة الثانية (صياغة دالة الهدف)

الخطوة الثانية هي صياغة دالة الهدف رياضياً وهذا يعتمد على هدف صانعي القرار فاذا كان الهدف هو التعظيم فسيكون الهدف maximize ويرمز بmax ، مثلا ص تعظيم الأرباح ، تنظيم الكفاءة ، تعظيم المبيعات ، تعظيم القوى العاملة واذا كان الهدف هو تدنية فسيكون الهدف هو minimize ويرمز له min مثلاً تدنيه الكلفة ، المسافة ، الانحراف ، القوى العاملة .

رياضياً يتم صياغة الهدف $\text{Max } Z=C_1X_1+C_2X_2+C_2X_3+...+C_nX_n$

$\text{Min } Z=C_1X_1+C_2X_2+C_2X_3+...+C_nX_n$

حيث $X_n,....,X_3,X_2,X_1$ هي المتغيرات

$C_n,....,C_3,C_2,C_1$ هي كلفة / ربح الوحدة الواحدة للمتغيرات

الخطوة الثالثة (صياغة القيود والمحددات)

القيود او المحددات هي التي تحقق الهدف وهي التي تربط المتغيرات بعضها مع البعض من المحددات

- محددات مالية كأن يكون تخصيص مبلغ معين لعملية الإنتاج
- محددات تسويقية
- محددات موارد مثل
  - أ- عدد ساعات عمل متاحة للعمل
  - ب- عدد مكائن او أجهزة متاحة للعمل
  - ج- قوى عاملة
- محددات طلب

- محددات انتاج

وهكذا ويتم إيجاد هذه القيود من خلال دراستنا للمسالة بشكل دقيق

رياضياً يتم صياغة القيود حسب العلاقات المنطقية التي تربط المتغيرات مثلاً

$$a_{12}X_1+a_2X_2+....+a_{1m}X_n \le b_1$$

$$a_{21}X_1+a_{22}X_2+....+a_{2m}X_n = b_1$$

$$a_{31}X_1+a_{32}X_2+....+a_{3m}X_n \ge b_3$$

حيث ان a_{in},a_{12},a_{11} هي مقدار ما يستخدم من قيمة المحدد b_1 للمتغيرات X_n,X_2,X_1

هذا فأن إشارة المحددات ≤ , = , ≥ مهمة جداً ويتم تحديدها من المسالة ولكن دائماً الموارد ذات العلاقة (≤)

<u>الخطوة الرابعة</u>

في الخطوة الرابعة يتم ربط دالة الهدف والقيود معاً بعلاقة رياضية وكالاتي :

$$\text{Max } Z=C_1X_1+C_2X_2+....+C_nX_n$$

$$\text{Or Min } Z=C_1X_1+C_2X_2+....+C_nX_n$$

S.T

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+....+a_{1m}X_n \begin{matrix}\le \\ = \\ \ge\end{matrix} b_m$$

$$X_1,X_2,...,X_n \ge 0$$

هذه تسمى بمصفوفة السمبلكس

$$\text{Max } Z=C_1X_1+C_2X_2+....+C_nX_n$$

Or Min

S.T

$$a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+....+a_{mn}X_n \begin{matrix}\le \\ = \\ \ge\end{matrix} b_m$$

$$X_1,X_2,...,X_n \ge 0$$

حيث يسمى القيد $x,x_1,...,x_2 \ge 0$ بالقيد اللاسلبي حيث دائماً قيمة المتغيرات هي موجبة او صفر

<u>تمارين في صياغة البرمجة الخطية</u>

Ex1: Iraq co. produces two products A,B by using two types of Raw materials M1,M2 table shows some information Formulate the problem by LP model .

Material	Usage of raw material to produce one unit of product		Raw material Available
	Product B	Product A	
M1	6	4	24 units

M2	1	2	6 units
Profit per unit	$5	$4	

<u>المثال الاول :</u>

شركة العراق الصناعية تقوم بإنتاج نوعين من المنتجات A,B وذلك باستخدام نوعين من المواد الاولية M2,M1 الجدول التالي يوضح بعض المعلومات عن المسالة .

المطلوب : صياغة المسالة باستخدام البرمجة الخطية علماً انه لا يمكن انتاج اكثر من وحدتين من المادة A

المادة	عدد وحدات المادة لإنتاج وحدة واحدة من المنتج		عدد الوحدات المتوفرة من المادة
	المنتوج B	المنتوج A	
المادة M1	6	4	24
المادة M2	1	2	6
ربح الوحدة الواحدة	$5	$4	

<u>الحل :</u>

1) **صياغة المتغيرات** عدد الوحدات المنتجة من المادة A = X_1
عدد الوحدات المنتجة من المادة B = X_2
2) **صياغة دالة الهدف** $\text{Max } Z = 5X_1 + 4X_2$
3) **صياغة القيود**
- **قيود المواد الاولية**
  $6X_1 + 4X_2 \leq 24$
  $X_1 + 2X_2 \leq 6$
- **قيد انتاج المادة A**
  $X_1 \leq 2$
- **قيود عدم السلبية**
  $X_1, X_2 \geq 0$

$\text{Then Max } Z = 5X_1 + 4X_2$

$\text{S.T } 6X_1 + 4X_2 \leq 2$

$X_1 + 2X_2 \leq 6$

$X_1 \leq 2$

$X_1, X_2 \geq 0$

Ex2: Accompany produces 3 product by using 3 machines m1,m2,m3 . time available for produce these product and profit for each unite of product are shown in the following table Formulate this Problem by General .

Machine	Time required to produce each product (hours)			Time available hours
	Product 1	Product 2	Product 3	
M1	6	-	2	400
M2	4	5	-	500
M3	3	6	4	600
Profit for each unit of Profit product	$5	$4	$7	

<u>المثال الثاني :</u>

شركة تصنع ثلاثة منتجات وذلك باستخدام ثلاثة مكائن m3,m2,m1 الوقت اللازم لإنتاج وحدة واحدة من هذه المنتجات والوقت المتوفر وربح الوحدة الواحدة من هذه المنتجات موضحة في الجدول التالي .

المطلوب : صياغة المسالة باستخدام البرمجة الخطية .

الوقت المتوفر	الوقت اللازم لإنتاج وحدة واحدة من المنتج (ساعة)			الماكنة
	المنتج 1	المنتج 2	المنتج 3	
400	2	-	6	M1
500	-	5	4	M2
600	4	6	3	M3
	$7	$4	$5	ربح الوحدة الواحدة

<u>الحل :</u>

1) صياغة المتغيرات عدد الوحدات التي تنتج من المنتج 1 = X_1

عدد الوحدات التي تنتج من المنتج 2 = X_2

عدد الوحدات التي تنتج من المنتج 3 = X_3

2) صياغة دالة الهدف $\text{Max } Z = 5X_4 + 4X_2 + 7X_3$

3) صياغة المحددات

$$6X_1 + 0X_2 + 2X_2 \leq 400$$

$$4X_1 + 5X_2 + 0X_3 \leq 500$$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \le 600$$

$$\text{Then Max } Z = 5X_1 + 4X_2 + 7X_3$$
$$\text{S.T } 6X_1 + 2X_3 \le 400$$
$$4X_1 + 5X_2 \le 500$$
$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \le 600$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Ex3: Accompany distributes its product from three production branches to two sales centers .
the following table shows some information .

	Sales Center 1	Sales Center 2	Supply
production branch 1	$3	$2	100 units
production branch 2	$4	$5	150 units
production branch 3	$6	$7	80 units
Demand	180 units	180 units	

المثال الثالث :

شركة تقوم بتوزيع منتجاتها المصنعة في ثلاثة فروع تابعة لها في مركزين للبيع ، الطاقة الإنتاجية للفروع الثلاثة على التوالي 100,150,80 وحدة ، الطاقة الاستيعابية للمركز الأول 180 وحدة في حين الطاقة الاستيعابية كمركز البيع الثاني 150 وحدة ، كلفة النقل للوحدة الواحدة من الفروع الى مراكز البيع موضحة في الجدول التالي .

المطلوب : صياغة المسالة بالبرمجة الخطية .

	مركز البيع 1	مركز البيع 2
الفرع الإنتاجي 1	$3	$2
الفرع الإنتاجي 2	$4	$5
الفرع الإنتاجي 3	$6	$7

الحل :

1) صياغة المتغيرات عدد الوحدات التي تنقل من الفرع 1 الى المركز 1 = X_1

عدد الوحدات التي تنقل من الفرع 2 الى المركز 2 = X_2

عدد الوحدات التي تنقل من الفرع 3 الى المركز 3 = X_3

عدد الوحدات التي تنقل من الفرع 4 الى المركز 4 = X_4

عدد الوحدات التي تنقل من الفرع 5 الى المركز 5 = X_5

عدد الوحدات التي تنقل من الفرع 6 الى المركز 6 = X_6

1) صياغة دالة الهدف $Min\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 5X_4 + 6X_5 + 7X_6$

2) صياغة المحددات

$X_1 + X_2 \leq 100$

$X_3 + X_4 \leq 150$

$X_5 + X_6 \leq 80$

$X_1 + X_3 + X_5 \leq 180$

$X_2 + X_4 + X_6 \leq 150$

$Min\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 5X_4 + 6X_5 + 7X_6$

S.T

$X_1 + X_2 \leq 100$

$X_3 + X_4 \leq 150$

$X_5 + X_6 \leq 80$

$X_1 + X_3 + X_5 \leq 180$

$X_2 + X_4 + X_6 \leq 150$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

الفصل الرابع

طريقة الرسم البيانى لحل مسائل البرمجة الخطية

Graphical method

ملاحظة :- تستخدم هذه الطريقة في حل المسائل البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرين (X_1 , X_2) فقط

الأمثلة التالية توضح هذه الطريقة

<u>Solve the following linear programming problem by Graphical method</u>

Max $Z = 4x_1 + 5x_2$

S.T.

$3X_1 + 2X_2 \quad \leq 6 \ldots$ القيد 1

$8X_1 + 4X_2 \quad \geq 8 \ldots$ القيد 2

$X_1 , X_2 \quad \geq 0 \ldots$

<u>خطوات الحل :-</u>

1- **نحول كافة القيود الى معدلات متساوية وذلك بألغاء إشارة القيود وبذلك تصبح القيود**

$3X_1 + 2X_2 \quad = 6 \ldots$ القيد1

$8X_1 + 4X_2 \quad = 8 \ldots$ القيد 2

2- **رسم المعادلات هذه، حيث لرسم أي معادلة يتطلب نقطتين لكل معادلة وذلك بالتعويض عن x1صفر ونجد X_2 وبعد ذلك نعوض عن X_2 = صفر ونجد X_1.**

$3X_1 + 2X_2 \quad = 6 \ldots \quad 1$

$X_1 = 0 \Rightarrow 0 + 2X_2 = 6$

$2X_2 = 6$

$X_2 = 6/2 = 3$

- **النقطة الأولى هي (3 ، 0).**

$X_2 = 0 \Rightarrow 3X_1 + 0 = 6$

$3X_1 = 6$

$X_1 = 6/2 = 2$

- **النقطة الثانية هي (0 ، 2) .**

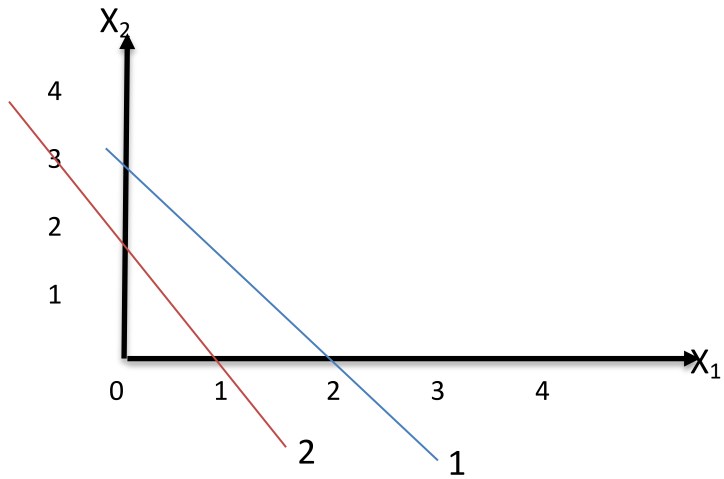
$8X_1 + 4X_2 \quad = 8 \ldots \quad 2$

$X_1 = 0 \Rightarrow 4X_2 = 8 \Rightarrow X_2 = 2 \quad (0 , 2)$

$X_2 = 0 \Rightarrow 8X_1 = 8 \Rightarrow X_1 = 1 \quad (1 , 0)$

3- يتم رسم المعادلات كما في الشكل التالي

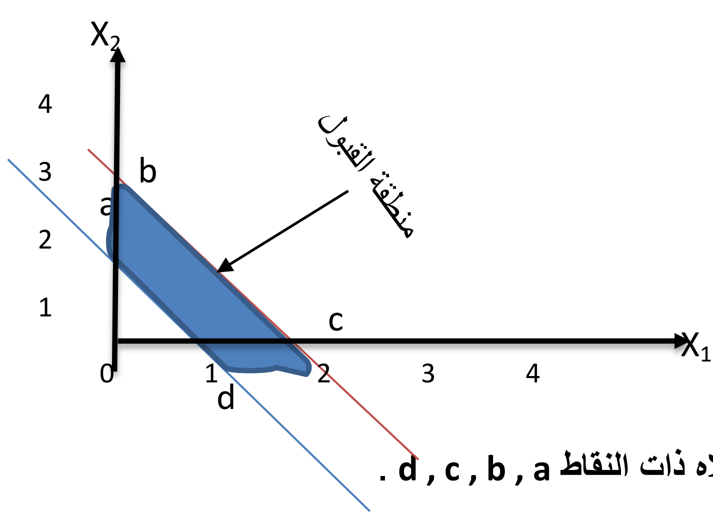
ملاحظة: يتم تقسيم محدد X_2 , X_1 حسب القيم x1 , x2 في النقاط للمعادلات .



4- نحدد الاتجاه المقبول لكل قيد وليكن ذلك

- اذا كانت إشارة القيد اقل او يساوي (≤) فأن الاتجاه المقبول باتجاه نقطة الأصل (0) .
- اذا كانت إشارة القيد اكبر او يساوي (≥) فأن الاتجاه المقبول باتجاه الجهة الأخرى لنقطة الأصل كما هو موضح في الرسم التالي.

5- نحدد منطقة القبول وهي المنطقة المحصورة بين القيود والتي تكون مقبولة لكافة القيود كما هو موضح في الرسم .



أن منطقة القبول هي كما موضحة في الرسم أعلاه ذات النقاط a , b , c , d .

6- نجد قيم X_2 , X_1 لكل نقطة من الرسم وثم نعوض قيم X_2 , X_1 في معادلة دالة الهدف وكما موضح في الجدول التالي.

النقطة	X_1	X_2	$Z = 4X_1+5X_2$
A	0	2	10
B	0	3	15 ⟸ Max
C	2	0	8
D	1	0	4

- الدالة هي max
- النقطة b هي التي ينتج عنها اعلى قيمة لـ Z
- الحل الأمثل هو

$$X1 = 0$$

$$X2 = 3$$

$$Z = 15$$

ملاحظة:

1- أي نقطة على المحور X_2 فان قيمة X_1 = صفر
أي نقطة على المحور X_1 فان قيمة X_2 = صفر

2- اذا كانت الدالة Min فان النقطة التي ينتج عنها الحل الأمثل هي التي ينتج عنها اقل قيمة ل Z .

3- اذا كان القيد يحتوي على متغير X1 فقط فان القيد سيكون عموديا على المحور X_1 واذا كان يحتوي على متغير X_2 فقط فان القيد سيكون عمودياً على محور X_2 او موازيا للمحور X1. والامثلة التالية توضح ذلك .

<u>Solve the following linear programming by Graphical method</u>

$$\text{Max} \quad Z = 8x_1 + 6x_2$$

S.T. $10X_1 + 15X_2 \leq 30$

$X_1 \leq 2$

$X_1 \;,\; X_2 \geq 0$

<u>الحل:-</u>

$10X_1 + 15X_2 = 30 \ldots \quad 1$

$X_1 = 8 \quad \ldots \quad 2$

<u>نقتط القيد الاول</u>

$10X_1 + 15X_2 = 30$

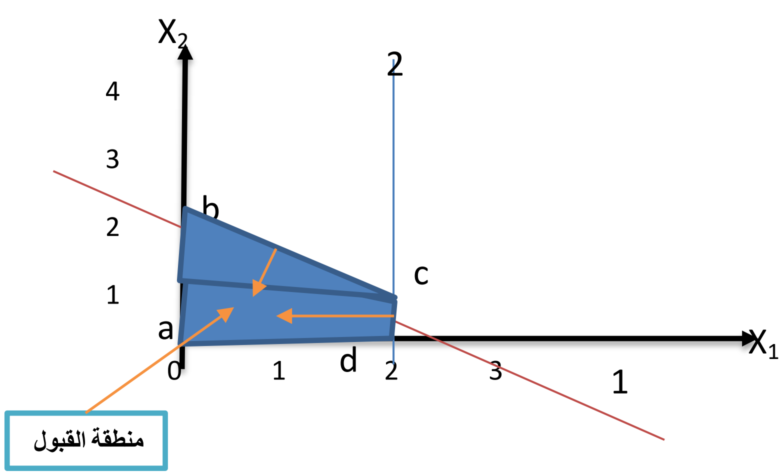
$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2 \qquad (0, 2)$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 3 \qquad (3, 0)$

<u>نقاط القيد الثاني</u>

X1 = 2 (2 , 0)

*نرسم المعادلات ونحدد الاتجاه المقبول لكل قيد وكذلك نحدد منطقة القبول وحسب الخطوات في المثال السابق .



❖ جدول الحل

النقطة	X_1	X_2	$Z = 8X_1+6X_2$
A	0	0	0
B	0	2	12
C	2	2/3	20
D	2	0	16

Max

ملاحظة: تم إيجاد X_1 , X_2 في النقطة C وذلك بحل المعادلات التي تتقاطع في هذه النقطة بالطريقة الاتية :

$$10X_1 + 15X_2 = 30$$
$$X_1 = 2$$

- ❖ X_1 = صفر يتم التعويض عنها في القيد الأول

$$10 \times 2 + 15X2 = 30$$
$$20 + 15X2 = 30 - 20$$
$$15X2 = 10$$
$$X_2 = \frac{10}{15} = 2/3$$

أي ان قيم X_1 , X_2 في النقطة C هي (2/3، 2)

- ❖ **الحل الأمثل**

X1 = 2

X_2 = 2/3

Z = 20

Solve the following linear programming by Graphical method

Min $Z = 3x_1 + 2x_2$

S.T. $6X_1 + 3X_2 \leq 18$

$X_2 \leq 2$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحل:-

$6X_1 + 3X_2 = 18 \ \ldots \ 1$

$X_2 = 2 \ \ldots \ 2$

القيد الأول

$6X_1 + 3X_2 = 18 \ \ldots \ 1$

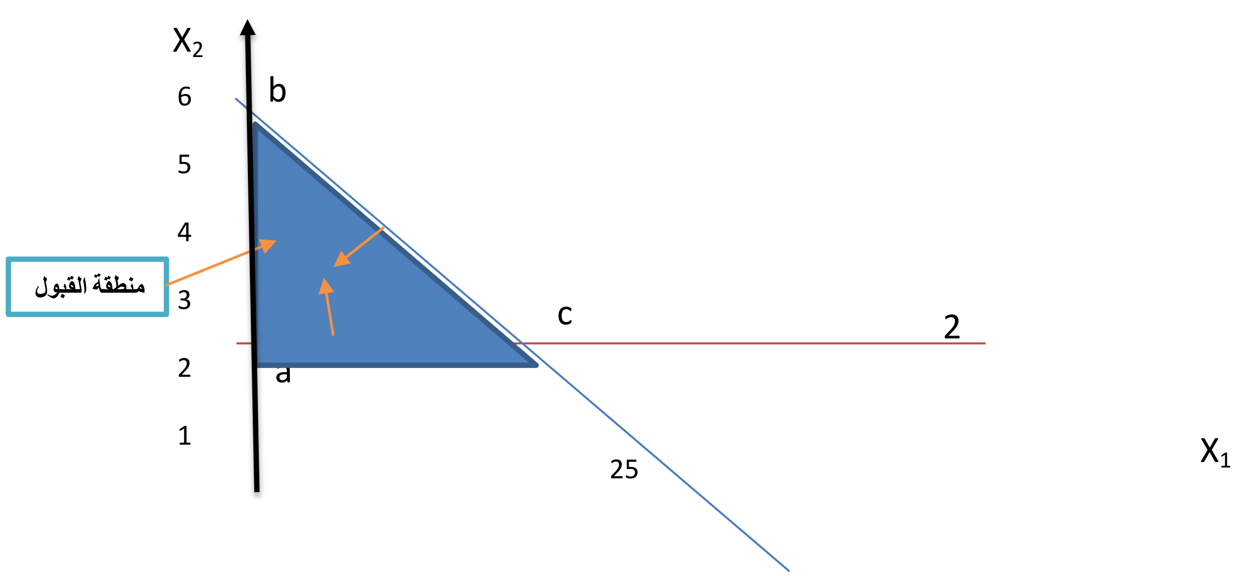
$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 6 \quad (0 , 6)$

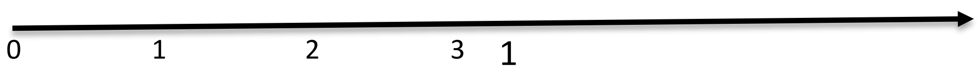
$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 3 \quad (3 , 0)$

القيد الثاني

X1 = 2 (2 , 0)

*نرسم المعادلات ونحدد الاتجاه المقبول لكل قيد وكذلك نحدد منطقة القبول وحسب الخطوات السابق.





جدول الحل

النقطة	X_1	X_2	$Z = 3X_1+2X_2$
A	0	2	4
B	0	6	12
C	2	2	10

Min

- ❖ **نقطة C بحل المعادلات**

$$6X_1 + 3X_2 = 18$$
$$X_2 = 2$$

- ❖ **بالتعويض عن $X_2 = 2$ ينتج**

$$6X_1 + 3 \times 2 = 18$$
$$6X_1 + 6 = 18$$
$$6X_1 = 18 - 6$$
$$6X_1 = 12$$
$$X_1 = 2$$

- ❖ **نقطة C هي (2 ، 2) .**
- ❖ **الدالة هي = Min**
- ❖ **نقطة a هي الحل الأمثل**

الحل هو

$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 2$$
$$Z = 4$$

ملاحظة: يمكن اختصار بعض الخطوات وذلك من اجل اختصار الوقت كما في الأمثلة التالية ـ

solve the following linear programming by graphical method

Max $Z = 4X_1 + 5X_2$

S.T. $3X_1 + 2X_2 \le 6$

$2X_1 + 8X_2 \le 8$

$X_1 , X_2 \ge 0$

الحل :-

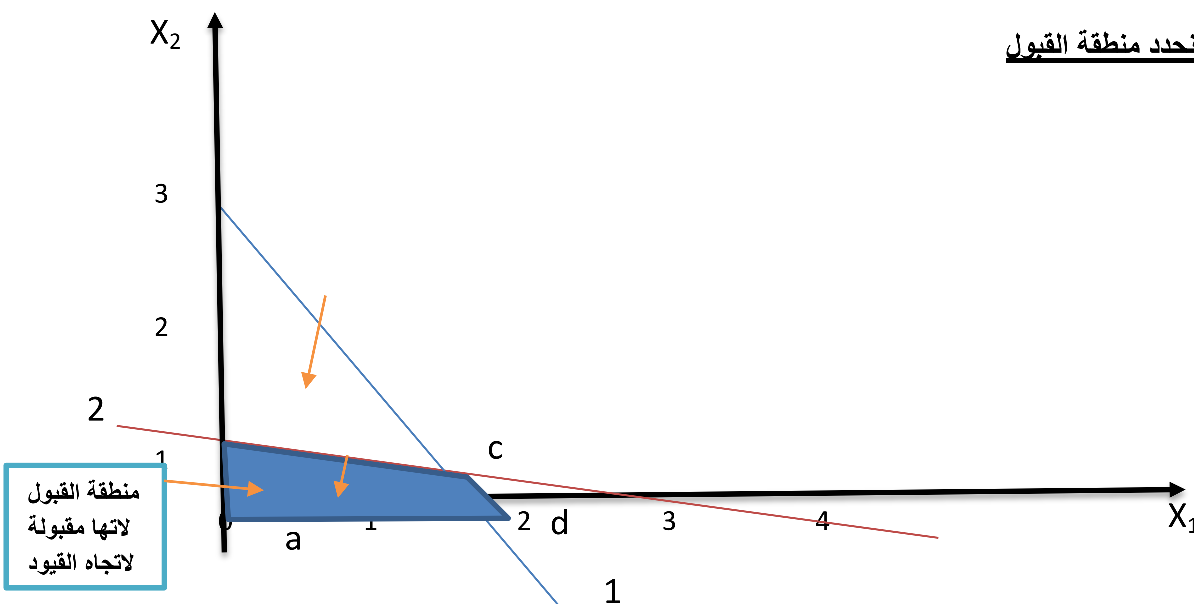
نقاط القيود هي

$3X_1 + 2X_2 = 6$ (2 , 3)

$2X_1 + 8X_2 = 8$ (4 , 1)

ملاحظة: للاختصار نعوض عن X_2 = صفر وغير قيمة X_1 وثم نعوض عن X_1 = صفر ونجد قيمة X_2 وكما وجدنا النقاط أعلاه

نرسم ونحدد منطقة القبول



النقطة	X_1	X_2	$Z = 4X_1+5X_2$
A	0	0	0
B	0	1	5
C	1.8	0.6	9.4
D	2	0	4

Max

❖ نقطة C نجدها بحل المعادلتين
(حسب المعادلة الأولى)

$$3X_1 + 2X_2 = 6$$
$$3X_1 + 2X_2 = 6$$

$$12X_1 + 8X_2 = 24$$
$$\pm 2X_1 \pm 8X_2 = \pm 8$$

<u>يطرح</u>

$$10X_1 = 18 \Rightarrow X_1 = \frac{16}{10}$$

بالتعويض عن X_1 في المعادلة الثانية

$$2 \times \frac{16}{10} + 8X_2 = 8$$
$$\frac{32}{10} + 8X_2 = 8$$
$$3.2 + 8X_2 = 8$$
$$8X_2 = 8 - 3.2$$
$$8X_2 = 4.8$$
$$X_2 = \frac{4.8}{8} = 0.6$$

❖ نقطة C هي (0.6 ، $\frac{12}{10}$) أو (1.2 ، 0.6)

❖ الحل الأمثل :

$$X_1 = 1.2$$
$$X_2 = 0.6$$
$$Z = 9.4$$

الفصل الخامس

طريقة السمبلكس Simplex Method

ملاحظة :

- تستخدم هذه الطريقة في حالة اذا كانت القيود (المحددات) ذات علاقة (≤) اقل او يساوي
- عدد المتغيرات متغيرين او اكثر

Solve the Following Linear Programming Problem by Simplex method .

حل مسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة السمبلكس .

$$\max \quad Z = 5X_1 + X_2$$
$$S.T. \quad 4X_1 + 6X_2 \leq 12$$
$$X_1 + X_2 \leq 20$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

خطوات الحل :

1- يتم إضافة متغيرات راكدة Si الى المحددات لتحويلها الى معادلات متساوية ونقل الجهة اليمنى لدالة الهدف الى الجهة اليسرى

$$\max \quad Z - 5X_1 - X_2 = 0$$
$$S.T. \quad 4X_1 + 6X_2 + S_1 = 12$$
$$X_1 + X_2 + S_2 = 20$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

2- يتم تنظيم المسألة في جدول يطلق عليه جدول السمبلكس

المتغيرات غير الأساسية

المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2	عمود الحل
Z	-5	-1	0	0	0
S_1	4	6	1	0	12
S_2	1	1	0	1	20

حيث يطلق على هذا الجدول بالجدول الابتدائي ومن خصائصه

- **قيم المتغيرات الأساسية**

  $S_1 = 12$

  $S_2 = 20$

- **قيمة Z = صفر لأن قيم X_1 ، X_2 = صفر لعدم وجودها ضمن المتغيرات الأساسية وعلى هذا الأساس يتم تحسين الحل الى أن نحصل على الحل الأمثل**

1. في حالة دالة الهدف max نحصل على الحل الأمثل عندما تكون كافة القيم في صف Z موجبة او صفر
2. في حالة دالة الصف min نحصل على الحل الأمثل عندما تكون كافة القيم في صف Z سالبة او صفر

خطوات تحسين الحل

المتغير الداخل

الصف المحوري

المتغير الخارج

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	-5	-1	0	0	0
S_1	4	6	1	0	12
S_2	1	1	0	1	20

12/4 =3

20/1 =20

العمود المحوري

القيمة المحورية

1- في جدول السمبلكس أعلاه يتم

أ- اختيار المتغير الداخل بالحل وفي هذه المسألة المتغير X_1 لأن معامله اكبر قيمة سالبة في صف دالة الهدف ولكونها max

ب- عمود المتغير الداخل وهو حسب هذه المسألة X_1 يطلق عليه بالعمود المحوري

ج- نجد المتغير الخارج من الحل (اما S_1 او S_2) حيث يتم تقسيم قيم عمود الحل والتي هي 12 ، 20 على قيم العمود المحوري والتي هي 4 ، 1 حيث أن المتغير الذي يخرج من الحل هو الذي يقترن بأقل حاصل قسمة قيم عمود الحل على قيم العمود المحوري

د- المتغير الخارج من الحل في هذه المسألة هو S_1 لأن يقترن بأقل حاصل القسمة والتي تساوي 3

2- نكون جدول سمبلكس جديد

أ- نستبدل المتغير الخارج بالمتغير الداخل ففي المثال يتم استبدال S_1 ب X_1

ب- نستبدل الصف المحوري بصف محوري جديد وذلك بقسمته على القيمة المحورية

❖ الصف المحوري الجديد حسب هذا السؤال

(4 6 1 0 12)/4

❖ الناتج = 3 0 1/4 6/4 1

ج- نستبدل بقيمة الصفوف وكالأتي

الصف الجديد = (الصف القديم)

+ (الصف المحوري الجديد) * (معامل الصف القديم الموجود في الصف المحوري القديم) بعكس الإشارة

<u>صف دالة الهدف الجديد لهذا السؤال</u>

الصف القديم للدالة

الصف المحوري الجديد

معامل الصف القديم للدالة في الصف المحوري القديم وبعكس الاشارة

(-5 -1 0 0 0)

(5) (1 6/4 1/4 0 3) +

=

((5*1-5)،(5*6/4-1)،(5*1/4+0)،(5*0+0)،(5*3-0))

(0 ، 30/4 -1 ، 5/4 ، 0 ، 15)

(0 ، 30-4/4 ، 5/4 ، 0 ،15)

(0 ، 26/4 ، 5/4 ، 0 ، 15)

<u>صف القيد الثاني لهذا السؤال</u>

(1 1 0 1 20)

(-1) (1 6/4 1/4 0 3) +

=

0 ، -6/4+1 ، -1/4+0 ، 0+1 ، -3+20

(0 ، -2/4 ، -1/4 ، 1 ، 17)

3- ننظم جدول جديد

	X_1	X_2	S1	S_2	
Z	0	26/4	5/4	0	15
X_1	1	6/4	1/4	0	3
S_2	0	-2/4	-1/4	1	17

يتم إعادة خطوات تحسين الحل السابقة في حالة أذا كانت قيم صف دالة الهدف تضمن قيم سالبة وأن الدالة max وفي حالة أذا كانت قيم صف دالة الهدف تضمن قيم موجبة وأن الدالة min

نلاحظ من هذا الجدول أن كافة القيم او المعاملات في دالة الهدف موجبة او صفر وأن دالة الهدف max

- **توصلنا الى الحل الامثل**
- **الحل الامثل**

$X_1 = 3$

$X_2 = 0$

$Z = 15$

<u>ملاحظة</u> : قيمة X_2 = صفر لأنها غير موجودة ضمن المتغيرات الأساسية .

Solve the Following LP Problem by Simplex method

$$\max Z = 2X_1 + 4X_2$$
$$\text{S.T.} \quad 4X_1 + 6X_2 \le 24$$
$$X_1 \le 8$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

الحل:

$$\max \; Z - 2X_1 - 4X_2 = 0$$
$$\text{S.T.} \quad 4X_1 + 6X_2 + S_1 = 24$$
$$X_1 + S_2 = 8$$
$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \ge 0$$

صف Z

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	-2	-4	0	0	0
S_1	4	6	1	0	24
S_2	1	0	0	1	8

(-2 -4 0 0 0)
(4) (2/3 1 1/6 0 4)

2/3 0 4/6 0 16

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	2/3	0	4/6	0	16
S_1	2/3	1	1/6	0	4
S_2	1	0	0	1	8

- كافة المعاملات في صف Z هي موجبة / صفر وأن الدالة Z هي max
- الحل الأمثل

$X_1 = 0$

$X_2 = 4$

$Z = 16$

Solve the Following LP Problem by Simplex method

$$\min \quad Z = 5X_1 + 10X_2$$
$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + 6X_2 \le 12$$
$$X_2 \le 7$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

الحل:

$$\min Z - 5X_1 + 10X_2 = 0$$
$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + 6X_2 + S_1 = 12$$
$$X_2 + S_2 = 7$$
$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \ge 0$$

صف Z

$$(-5 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$
$$(-10)\ (1/3 \quad 1 \quad 1/6 \quad 0 \quad 2)$$
$$-25/3 \quad 0 \quad -10/6 \quad 0 \quad -20$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	-5	10	0	0	0
S_1	2	6	1	0	12
S_2	0	1	0	1	7

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	-25/3	0	-10/6	0	-20
X_2	1/3	1	1/6	0	2
S_2	-1/3	0	-1/6	1	5

صف S_2

$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 7)$$
$$(-1)\ (1/3 \quad 1 \quad 1/6 \quad 0 \quad 2)$$
$$-1/3 \quad 0 \quad -1/6 \quad 1 \quad 5$$

- كافة معاملات Z هي سالبة / صفر وأن الدالة Z هي min
- الحل الأمثل

$X_1 = 0$

$X_2 = 2$

$Z = -20$

Solve the Following Linear programming Problem by Simplex method

$$\min \quad Z = X_1 - 4X_2$$
$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + 4X_2 \le 12$$
$$X_1 \le 6$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

ملاحظة: نتبع نفس الخطوات لحل مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس
لكن

- ❖ **دالة الهدف min**
- ❖ **نختار المتغير الداخل بالحل ذات اكبر اشارة موجبة ونستمر بنفس الخطوات الى أن نصل الى الحل الأمثل عندما تكون كافة القيم (المعاملات) في صف دالة الهدف سالبة او صفر لأن الدالة min**

الحل:

$$\min \quad Z - X_1 + 4X_2 = 0$$
$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + 4X_2 + S_1 = 12$$
$$X_2 + S_2 = 6$$
$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \ge 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	-1	4	0	0	0
S_1	3	4	1	0	12
S_2	1	0	0	1	6

12/4 = 4

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	-16/4	0	-1	0	-12
X_2	3/4	1	1/4	0	3
S_2	1	0	0	1	6

الحل الأمثل

$X_1 = 0$

$X_2 = 3$

$Z = -12$

صف دالة الهدف الجديد

(-1 4 0 0 0)
(-4) (3/4 1 1/4 0 3) +
=

(-4*3/4-1) ، (-4*1+4) ، (-4*1/4+0) ، 0 ،(-4*3+0)

-12-4/4	0	-1	0	-12
-16/4	0	-1	0	-12

صف القيد الثانى

$$\begin{array}{l} (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 6) \\ (0)\ (3/4 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 3) \\ \hline (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 6) \end{array}$$

القيم لا تتغير لأنـها مضروبة * صفر

Solve the Following Linear programming Problem by Simplex method

$$\max \quad Z = 5X_1 + 3X_2$$
$$\text{S.T.} \quad 6X_1 + 6X_2 \le 12$$
$$X_1 \le 4$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

الحل:

$$\max \quad Z - 5X_1 - 3X_2 = 0$$
$$\text{S.T.} \quad 6X_1 + 6X_2 + S_1 = 12$$
$$X_1 + S_2 = 4$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	-5	-3	0	0	0
S_1	6	6	1	0	12
S_2	1	0	0	1	4

12/6 = 4
4/1 = 4

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	0	2	5/6	0	10
X_1	1	1	1/6	0	2
S_2	0	-1	-1/6	1	2

$$\begin{array}{l} -5 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ (5)\ 1 \quad 1 \quad 1/6 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 5/6 \quad 0 \quad 10 \end{array}$$

	1	0	0	1	4
(-1)	1	1	1/6	0	2
	0	-1	-1/6	1	2

<u>الحل الأمثل</u>

$X_1 = 2$

$X_2 = 0$

$Z = 10$

Solve the following linear programming problem by simplex method

$$\max \quad Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 8X_1 + 2X_2 \le 16$$

$$X_1 + X_2 \le 20$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

<u>الحل:</u>

$$\max \quad Z - 2X_1 - 4X_2 = 0$$

$$\text{S.T.} \quad 8X_1 + 2X_2 + S_1 = 16$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 20$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	-2	-4	0	0	0
S_1	8	2	1	0	16
S_2	1	1	0	1	20

$16/2 = 8$

$20/1 = 20$

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	14	0	4/8	0	32
X_2	4	1	1/2	0	8
S_2	-3	0	-1/8	1	12

	-2	-4	0	0	0
(4)	4	1	1/8	0	8
	14	0	4/8	0	32

	1	1	0	1	20
(-1)	4	1	1/8	0	8
	-3	0	-1/8	1	12

<u>الحل الأمثل</u>

$X_1 = 0$

$X_2 = 8$

$Z = 32$

الفصل السادس

طريقة M الكبرى

طريقة M الكبرى لإيجاد الحل الأمثل للبرمجة الخطية

ملاحظة : تستخدم هذه الطريقة في حالة اذا تضمنت المسالة محددات ذات العلاقة (=) او محددات ذات العلاقة (≥)

عندما تكون لدينا مسالة تحتوي على محددات ذات علاقة اكبر او يساوي (≥) مثل

$3X_1 + X_2 \geq 10$

لو فرضنا اننا نطرح متغير إضافي وليكن L_1 لغرض جعل المحدد ذات علاقة متساوية

$3X_1 + X_2 - L_1 = 10$

هذا وعند استخدام طريقة السمبلكس وفي جدول الحل الابتدائي حيث نفرض ان X_1,X_2 تساوي صفر

$0+0-L_1=10$

$-L = 10$

$L_1 = -10$

وهذا غير ممكن لأنه يجب ان تكون المتغيرات موجبة ، اذن في هذه الحالة يجب إضافة متغير اصطناعي ويرمز له بA_1 للتخلص من هذه المشكلة لذا سيكون المحدد بالكل التالي :

$3X_1 + X_2 - L_1 + A_1 = 10$

وفي حالة اذا كان لدينا قيد ذات علاقة (=)

$5X_1 + 6X_2 = 10$

وحسب الجدول الحل الابتدائي فانه X_2,X_1 ستساوي صفر

$0+0=10$ $0=10$ وهذا غير ممكن لذا يجب إضافة متغير اصطناعي لهذا المحدد

$5X_1 + 6X_2 + 2 = 10$

لذا يتطلب إيجاد طريقة بديلة لطريقة السمبلكس لحل مثل هذه المسائل والتي تحتوي على متغيرات اصطناعية ومن هذه الطرق هي طريقة M الكبرى .

ملاحظة : عند استخدام طريقة M لايجوز التعويض عن M بقيمة مثل ما يعتقد البعض بأنه ممكن وذلك قد لا يكون للمسالة حل امثل ونعرف ذلك في حالة اذا كانت قيمة Z بدلالة M في جدول الحل الأمثل او ان احد المتغيرات الأساسية ذات قيمة بدلالة M او ان أسعار الظل بدلالة M كبيرة هذا وان قيمة M كبيرة جداً ولا تتحدد بمقدار معين.

مثال : اوجد الحل الأمثل لمسالة البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة M الكبرى.

$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2$

S.T

$3X_1 + X_2 = 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + 2X_2 \leq 4$

$X_1,X_2 \geq 0$

<u>الخطوات :</u>

1. يتم إضافة متغير اصطناعي A_1 الى القيد ذات العلاقة =
2. يتم إضافة متغير اصطناعي A_2 وطرح متغير إضافي L_1 من القيد ذات العلاقة ≥
3. يتم إضافة متغير اصطناعي واكثر S_1 الى القيد ذات العلاقة ≤
4. يتم إضافة المتغيرات (A_2,A_1) بعد ضربها بـM لدالة الهدف نوع min وطرح المتغيرات A_2,A_1 الاصطناعية بعد ضربها بـM لدالة الهدف نوع max

بما ان المسالة هي min

اذن يعاد صياغتها بالشكل التالي

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2 + mA_1 + mA_2$$

S.T

$$3X_1 + X_2 + A_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 + A_2 - L_1 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 4$$
$$X_1, X_2, A_1, A_2, L_1, S_1 \geq 0$$

5. نجد قيمة A_1 من القيد الأول و A_2 من القيد الثاني ونعوضهما في معادلة Z

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2 + m(3-3X_1 - X_2) + m(6-4X_1 - 3X_2 + L_1)$$
$$= 4X_1 + X_2 + 3m - 3X_1 - mX_2 + 6m - 4mX_1 - 3mX_2 + mL_1$$
$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2 + 9m - 7mX_1 - 4mX_2 + mL_1$$
$$\text{Min } Z = 4X_1 - 7mX_1 + X_2 - 4mX_2 + mL_1 + 9m$$

6. يتم نقل الجهة اليمنى لمتغيرات دالة الهدف ماعدا 9M الى الجهة اليسرى

$$\text{Min } Z = X_1 + 7m - X_2 + 4mX_2 - mL_1 = 9m$$

S.T

$$\left.\begin{aligned} 3X_1 + X_2 + A_1 &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 + A_2 - L_1 &= 6 \\ X_1 + 2X_2 + S_1 &= 4 \\ X_1, X_2, A_1, A_2, L_1, S_1 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{المسالة الجديدة}$$

7. يتم تنظيم المسالة في الجدول التالي

	X_1	X_2	L_1	A_1	A_2	S_1	

Z	(-4+7m)	(-1+4m)	-m	0	0	0	9m
A_1	3	1	0	1	0	0	3
A_2	4	3	-1	0	1	0	6
S_1	1	2	0	0	0	1	4

3/3 = 1
6/4 = 3/2
4/1 = 4

8. نتبع نفس خطوات تحسين الحل المتبعة في طريقة السمبلكس

اذن المسالة هي min

اذن المتغير الداخل هو X_1 والمتغير الخارج هو A_1

نعيد احتساب قيم الصفوف كما هي في طريقة السمبلكس

1) قيم الصف المحوري الجديدة هي (1 1/3 0 1/3 0 0 1)

2) قيم صف Z الجديدة هي

(-4+7m) (-1+4m) -m 0 0 0 9m
(-4+7m) (1 1/3 0 1/3 0 0 1)
0 1+5m/3 -m -4+7m/3 0 0 4+m

3) قيم القيد الثاني

4 3 -1 0 1 0 6
-(4) (1 1/3 0 1/3 0 0 1)
0 5/3 -1 -4/3 1 0 2

4) قيم القيد الثالث

1 2 0 0 0 1 4
-(1) (1 1/3 0 1/3 0 0 1)
0 5/3 0 -1/3 0 1 3

والآن نكون جدول جديد

	X_1	X_2	L_1	A_1	A_2	S_1	
Z	0	1+5m/3	-m	4-7m/3	0	0	4+2m
X_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1
A_2	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2
S_1	0	5/3	0	-1/3	0	1	3

	X_1	X_2	L_1	A_1	A_2	S_1	
Z	0	0	1/5	8/5-m	-1/5-m	0	18/5
X_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
X_2	0	1	-3/5	-4/3	3/5	0	6/5
S_1	0	0	1	1	-1	1	1

	X_1	X_2	L_1	A_1	A_2	S_1	
Z	0	0	0	7/5-m	-m	-1/5	17/5
X_1	1	0	0	2/5	0	-1/5	2/5
X_2	0	1	0	-1/5	0	3/5	9/5
L_1	0	0	1	1	-1	1	1

اذن المسالة هي min وان كافة قيم Z لا تحتوي على موجب

اذن توصلنا الى الحل الامثل

الحل الامثل هو

$X_1 = 2/5$

$X_2 = 9/5$

$Z = 17/5$

Ex: Solve the Following L P Problem by Big M method .

$$\max \quad Z = 2X_1 + 3X_2$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 = 6$$
$$X_2 \leq 8$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

<u>الحل :</u>

$$\max \quad Z = 2X_1 + 3X_2 - mA_1$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + = 6 \qquad \Rightarrow A_1 = 6 - X_1 - X_2$$
$$A_1$$
$$X_2 + S_1 = 8$$
$$X_1 , X_2 , S_1 , A_1 \geq 0$$
$$\max \quad Z = 2X_1 + 3X_2 - m(6 - X_1 - X_2)$$
$$= 2X_1 + 3X_2 - 6m + mX_1 + mX_2$$
$$\max \quad Z = 2X_1 + mX_1 + 3X_2 + mX_2 - 6m$$

$$\max \quad Z - 2X_1 - mX_1 - 3X_2 - mX_2 = -6m$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + A_1 = 6$$

$$X_2 + S_1 = 8$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , A_1 \geq 0$$

	X_1	X_2	A_1	S_1	
Z	(-2-m)	(-3-m)	0	0	-6m
A_1	1	1	1	0	6
S_1	0	1	0	1	8

	X_1	X_2	A_1	S_1	
Z	1	0	3+m	0	18
X_2	1	1	1	0	6
S_1	-1	1	-1	1	2

الحل الأمثل هو

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 6$$

$$Z = 18$$

Ex: Solve the Following Linear Programming Problem by Big M method .

$$\max \quad Z = 2X_1 + 4X_2$$

S.T. $2X_1 + \leq 6$ $\qquad$ $2X_1 + 4X_2 + S_1 = 4$

$4X_2$

$X_1 \geq 1$ $\quad \Rightarrow \quad X_1 - L_1 + A_1 = 1$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

<u>الحل :</u>

$X_1 - L_1 + A_1 = 1 \qquad A_1 = 1 - X_1 + L_1$

$$\max \quad Z = 2X_1 + 4X_2 - mA_1$$

$$= 2X_1 + 4X_2 - m(1 - X_1 - L_1)$$

$$\max \quad Z = 2X_1 + 4X_2 - m + mX_1 - mL_1$$

$$\max \quad Z = 2X_1 + mX_1 + 4X_2 - m - mL_1$$

$$\max \quad Z - 2X_1 - mX_1 - 4X_2 + mL_1 = -m$$

	X_1	X_2	L_1	A_1	S_1	
Z	-2-m	-4	m	0	0	-m
S_1	2	4	0	0	1	4

A_1	1	0	-1	1	0	1

صف Z

$(2+m)(\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0\ )$ $\qquad$ $(\ -2-m \quad -4 \quad m \quad 0 \quad 0\ )$

صف S_1

	X_1	X_2	L_1	A_1	S_1	
Z	0	-4	-2	2+m	0	2
S_1	0	4	2	-2	1	2
X_1	1	0	-1	1	0	1

(-2)((2 4 0 0 1 4)
1 0 -1 1 0 1)

0 4 2 -2 1 2

صف Z

	X_1	X_2	L_1	A_1	S_1	
Z	0	0	0	m	1	4
X_2	0	1	1/2	-1/2	1/4	1/2
X_1	1	0	-1	1	0	1

(-4)((0 -4 -2 2+m 0 2)
0 0 0 1 1/2 -1/2 1/4 1/2)

0 m 1 4

اذن كافة معاملات Z موجبة / صفر الحل الأمثل هو $X_1 = 1$
وان الدالة Z هي max $X_2 = 1/2$
$Z = 4$

Ex: Solve the Following Linear Programming Problem by Big M method .

$$\min \quad Z = 4X_1 + X_2$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 = 2$$
$$X_1 \leq 2$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل :

$$\min \quad Z = 4X_1 + X_2 + mA_1$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + A = 2$$
$$A_1 = 2 - X_1 - X_2$$
$$X_1 + S_1 = 2$$
$$X_1 , X_2 , S_1 , A_1 \geq 0$$

❖ $Z = 4X_1 + X_2 + m\,(2 - X_1 - X_2)$
$= 4X_1 + X_2 + 2m - mX_1 - mX_2$
$= 4X_1 - mX_1 + X_2 - mX_2 + 2m$
$Z - 4X_1 + mX_1 - X_2 + mX_2 = 2m$

	X_1	X_2	A_1	S_1	
Z	-4+m	-1+m	0	0	2m

A_1	1	1	1	0	2
S_1	1	0	0	1	2

	X_1	X_2	A_1	S_1	
Z	-3	0	1-m	0	2
X_2	1	1	1	0	2
S_1	1	0	0	1	2

صف Z

$$
\begin{array}{rcccccl}
 (& -4+m & -1+m & 0 & 0 & 2m &) \\
(1-m)(& 1 & 1 & 1 & 0 & 2 &) \\
\hline
 & -3 & 0 & 1-m & 0 & 2 &
\end{array}
$$

- **كافة معاملات 2 سالبة / صفر**

وأن الدالة Z هي max

الحل الأمثل هو

$X_1 = 0$

$X_2 = 2$

$Z = 2$

الفصل السابع

النموذج المقابل او الثنائية للبرمجة الخطية

Duality Model of Linear Programming

الفصل السابع

النموذج المقابل او الثنائية للبرمجة الخطية Duality Model of Linear Programming

الثنائية للبرمجة الخطية Duality of LP

في بعض الحالات يتطلب تحويل نموذج البرمجة الخطية الأولي Primal الى نموذج الثنائية Duality ومن هذه الحالات

1. قيمة الجهة اليمنى للقيود سالبة مثل

$$4X_1 + 6X_2 \leq -10$$

2. ظهور قيم سالبة للجهة اليمنى للقيود نتيجة تغيير في بعض القيود (المحددات) .
3. الوقت اللازم لحل مسائل البرمجة الخطية ذات عدد كبير من المتغيرات والقيود يستغرق وقتاً وخاصة باستخدام الحاسوب .

ان صيغة الثنائية للبرمجة الخطية تعني الجهة اليمنى للقيود تصبح دالة هدف ودالة الهدف max تصبح min والعكس بالعكس وان قيم دالة الهدف تصبح قيم الجهة اليمنى للقيود ومعاملات القيود الاعمدة تصبح صفوف وكذلك إشارة القيود تتغير وفق قواعد

مثلاً

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3X_1 + 4X_2 \\ \text{S.T.} \quad & 2X_1 + 5X_2 \leq 10 \ ....Y_1 \\ & 6X_1 + 8X_2 \leq 15 \ ....Y_2 \\ & X_1 , X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- الثنائية تصبح

$$\begin{aligned} \min \quad & W = 10Y_1 + 15Y_2 \\ \text{S.T.} \quad & 2Y_1 + 6Y_2 \geq 3 \\ & 5Y_1 + 8Y_2 \geq 4 \\ & Y_1 , Y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

حيث أن Y_1 , Y_2 هي متغيرات النموذج الثنائي Dual هذا وأن من فوائد النموذج الثنائي استخدامه في تحليل ما بعد الحل الأمثل او كما يطلق عليه بتحليل الحساسية . إضافة الى التركيز على تقليل المواد بدلاً من تحقيق اعلى ربح .

في الأمثلة التالية نوضح كيف يتم التحويل من النموذج الأولي Primal الى النموذج المقابل Dual Model

اذا كانت دالة الهدف max

1. في حالة اذا كانت دالة الهدف للنموذج الأولي max فيجب أن تكون كافة القيود ذات علاقة (≤) قبل تحويل النموذج الى النموذج الثنائي (المقابل) Dual .
   - اذا كان أحد القيود ذات علاقة (≥) فيتم ضرب الطرفين *(-1) لتحويله الى (≤)
   - اذا كان أحد القيود ذات علاقة (=) فيتم استبداله بقيدين ذات علاقة (≤) لكن إشارة المتغيرات للجهة اليمنى واليسرى للقيد الثاني بعكس إشارات القيد الاول
2. بعد تحويل كافة قيود النموذج الأولي Primal الى (≤) يتم كتابة النموذج المقابل (الثنائية) Dual وذلك
   - دالة الهدف تصبح min
   - القيود تصبح (≥)
   - عدد متغيرات النموذج المقابل بعدد قيود النموذج الأولي Primal
   - معاملات دالة الهدف للنموذج الأولي تصبح الجهة اليمنى للقيود في النموذج المقابل
   - الجهة اليمنى للقيود في النموذج الأولي تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج المقابل
   - الأعمدة في القيود للنموذج الأولي تصبح صفوف في النموذج المقابل

Ex: Write the Duality of the Following Linear Programming .

$$\max \quad Z = 3X_1 + 6X_2 + 7X_3$$

S.T.

$$5X_1 + 8X_2 - 3X_3 \geq 60$$
$$2X_1 + 9X_2 + 10X_3 \leq 80$$
$$4X_1 + 7X_2 + 2X_3 = 70$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

الحل:

Primal	Dual
$\max \quad Z = 3X_1 + 6X_2 + 7X_3$ S.T. $- 5X_1 - 8X_2 + 3X_3 \leq - 60 \;....Y_1$ $2X_1 + 9X_2 \leq 80 \;....Y_2$ $+ 10X_3$ $4X_1 + 7X_2 + 2X_3 \leq 70 \;....Y_3$ $-4X_1 - 7X_2 - 2X_3 \leq -70 \;....Y_4$ $X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$	$\min \quad W = -60Y_1 + 80Y_2 + 70Y_3 -70Y_4$ S.T. $- 5Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 - 4Y_4 \geq 3$ $-8Y_1 + 9Y_2 + 7Y_3 -7Y_4 \geq 6$ $3Y_1 + 10Y_2 + 2Y_3 -2Y_4 \geq 7$ $Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 \geq 0$

Ex: Write the Duality of the Following Linear Programming .

$$\max \quad Z = 6X_1 + 8X_2$$

S.T.

$$4X_1 + 7X_2 \leq 10$$

$2X_1 + X_2 \le 5$
$3X_1 + 5X_2 \le 6$
$X_1 , X_2 \ge 0$

الحل:

Primal	Dual
max $Z = 6X_1 + 8X_2$ S.T. $4X_1 + 7X_2 \le 10 \quad ....Y_1$ $2X_1 + X_2 \le 5 \quad ....Y_2$ $3X_1 + 5X_2 \le 6 \quad ....Y_3$ $X_1 , X_2 \ge 0$	min $W = 10Y_1 + 5Y_2 + 6Y_3$ S.T. $4Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \ge 6$ $7Y_1 + Y_2 + 5Y_3 \ge 8$ $Y_1 , Y_2 , Y_3 \ge 0$

اذا كانت دالة الهدف min

1. في حالة اذا كانت دالة الهدف للنموذج الأولي min فيجب أن تكون كافة القيود ذات علاقة (≥) قبل تحويل النموذج الى النموذج المقابل Dual

- **اذا كان احد القيود ذات علاقة (≤) فيتم ضرب الطرفين ب (1-) لتحويله الى (≥)**
- **اذا كان احد القيود ذات علاقة (=) فيتم استبداله بقيدين ذات علاقة (≥) لكن إشارة المتغيرات للجهة اليمنى واليسرى للقيد الثاني بعكس إشارات القيد الأول**

2. بعد تحويل كافة قيود النموذج الأولي Primal الى (≥) يتم كتابة النموذج المقابل (الثاني) Dual وذلك

- **دالة الهدف تصبح max**
- **القيود تصبح (≤)**
- **عدد متغيرات النموذج القابل بعدد قيود النموذج الأولي**
- **معاملات دالة الهدف للنموذج الأولي تصبح الجهة اليمنى للقيود في النموذج المقابل**
- **الجهة اليمنى للقيود في النموذج الأولي تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج المقابل**
- **الأعمدة في القيود للنموذج الأولي تصبح صفوف في النموذج الأولي**

Ex: Write the Duality of the Following Linear Programming model .

$$\min \quad Z = 6X_1 + 7X_2$$

S.T.

$$2X_1 + 3X_2 \geq 10$$
$$5X_1 + 8X_2 \leq 20$$
$$3X_1 + 9X_2 = 30$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

Primal	Dual
$\min \quad Z = 6X_1 + 7X_2$	$\max \quad W = 10Y_1 - 20Y_2 + 30Y_3 - 30y_4$
S.T.	S.T.
$2X_1 + 3X_2 \geq 10 \; ....Y_1$	$2Y_1 - 5Y_2 + 3Y_3 - 3Y_4 \leq 6$
$-5X_1 - \geq -20 \; ....Y_2$	$3Y_1 - 8Y_2 + 9Y_3 - 9Y_4 \leq 7$
$8X_2$	$Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 \geq 0$
$3X_1 + 9X_2 \geq 30 \; ....Y_3$	
$-3X_1 - 9X_2 \geq -30 \; ....Y_4$	
$X_1 , X_2 \geq 0$	

Duality الثنائية

Ex: Write the Duality of the Following Linear Programming Problems .

1)

$$\max \quad Z = 3X_1 + 6X_2 + 4X_3$$

S.T.

$$6X_1 + 7X_2 + 8X_3 \geq 10$$
$$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 = 20$$

$$8X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 15$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

الحل:

يتم تحويل القيود الى (≤)

القيود (=) يتم التعويض عنها بقيدين (≤) ولكن الثاني بعكس إشارة الأول

القيد (≥)يتم تحويله الى (≤) بضرب الطرفين * (-1)

$$\max \quad Z = 3X_1 + 6X_2 + 4X_3$$

S.T.

$$-6X_1 - 7X_2 - 8X_3 \leq -10 \quad \ldots.Y_1$$
$$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 20 \quad \ldots.\ Y_2$$
$$-3X_1 - 6X_2 - 2X_3 \leq -20 \quad \ldots.\ Y_3$$
$$8X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 15 \quad \ldots.\ Y_4$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

Duality الثنائية

$$\min \quad Z = -10Y_1 + 20Y_2 - 20Y_3 + 15Y_4$$

S.T.

$$-6Y_1 + 3Y_2 - 3Y_3 + 8Y_4 \geq 3$$
$$-7Y_1 + 6Y_2 - 6Y_3 + 2Y_4 \geq 6$$
$$8Y_1 + 2Y_2 - 2Y_3 + Y_4 \geq 4$$
$$Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 \geq 0$$

2)

$$\min \quad Z = 5X_1 + 6X_2$$

S.T.

$$6X_1 + 7X_2 = 15$$
$$8X_1 + 9X_2 \geq 10$$
$$10X_1 + X_2 \leq 20$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

اولاً :

يتم تحويل كافة القيود الى (≥)

$$\min \quad Z = 5X_1 + 6X_2$$

S.T.

$$6X_1 + 7X_2 \geq 15$$
$$-6X_1 - 7X_2 \geq -15$$
$$8X_1 + 9X_2 \geq 10$$
$$-10X_1 - X_2 \geq -20$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يتم تحويل القيود (=) الى قيدين (≥) ولكن احدهما متغيراته بعكس إشارة الأول

نضرب الطرفين (-1) لتحويل القيد الى (≥)

min $Z = 5X_1 + 6X_2$
S.T.

$$6X_1 + 7X_2 \geq 15 \;....Y_1$$
$$-6X_1 - 7X_2 \geq -15 \;....Y_2$$
$$8X_1 + 9X_2 \geq 10 \;....\; Y_3$$
$$-10X_1 - X_2 \geq -20 \;....\; Y_4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

<u>Duality الثنائية</u>

max $Z = 15Y_1 - 15Y_2 + 10Y_3 - 20Y_4$
S.T.

$$6Y_1 - 6Y_2 + 8Y_3 - 10Y_4 \leq 5$$
$$7Y_1 - 7Y_2 + 9Y_3 - Y_4 \leq 6$$
$$Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 \geq 0$$

Optimal Soluion for Dual إيجاد الحل الأمثل للنموذج الثنائية

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج الثنائية أي إيجاد قيم Z , Y_3 , Y_2 , Y_1 يتم استخدام معلومات جدول الحل الأمثل النموذج الأولي كما موضح في الأمثلة التالية

Ex: Given below LP Problem and its optimal tabl .
Write the Dual Model and its optimal Solution .

min $Z = 4X_1 - 8X_2$
S.T.

$$X_1 + 2X_2 \leq 4 \qquad ....Y_1$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 6 \qquad ....Y_2$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل

	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	-8	0	-4	0	-16
X_2	1/2	1	1/2	0	2
S_2	2	0	-1	1	2

<u>الحل:</u>

نحن نعرف من خلال طريقة السمبلكس بأننا اضفنا S_1 ، S_2 الى القيود أعلاه لأننا (≤) ، هذا وان لهذه المسألة متغيرين للثنائية هما Y_1 ، Y_2

$$Y_1 = -4$$
$$Y_2 = 0$$
$$W = Z = -16$$

وان النموذج الثنائي هو

$$\max \quad W = 4Y_1 - 6Y_2$$

S.T.

$$Y_1 + 3Y_2 \geq 4$$
$$2Y_1 + 2Y_2 \geq -8$$
$$Y_1 , Y_2 \geq 0$$

الفصل الثامن

نماذج النقل Transportation Models

نماذج النقل Transportation Models

يقصد بنماذج النقل الأساليب التي يتم فيها تجهيز مصادر الطلب من المصادر الرئيسية بأقل كلفة حيث يتم صياغة مسائل النقل في مصفوفة كما موضحة ادناه .

مراكز الطلب Destinations

مصادر التجهيز Sources	D_1	D_2	D_3	...	طاقة المصادر Supply
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	...	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	...	a_2
S_3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	...	a_3
⋮	⋮	⋮	⋮	...	...
كمية الطلب Demand	b_1	b_2	b_3	...	

حيث ان :

S_1 ، S_2 ، S_3 ، .... تمثل مصادر التجهيز

D_1 ، D_2 ، D_3 ، .... تمثل مراكز الطلب

Xij تمثل كميات النقل من المصدر i الى مركز الطلب j

Cij تمثل كلفة النقل للوحدة الواحدة من المصدر i الى مركز الطلب j

a1 ، a2 ، a3 ، .... تمثل طاقة المصادر Si

b_1، b_2 ، b_3 ، .... تمثل كمية الطلب لمركز Dj

ملاحظة :

- (ij) تمثل الخلية ذات رقم الصف i والعمود j مثلاً (11) الخلية الواقعة في الصف 1 والعمود 1
- يجب أن تتساوى مجموع طاقة المصادر مع مجموع كميات طلب المراكز

وفي حالة :

1. اذا كانت مجموع كميات طاقة المصادر اكبر من مجموع كميات الطلب فيتم في هذه الحالة أضافة عمود وهمي يمثل مركز طلب وهمي ويرمز له D حيث كمية الطلب لهذا المركز الوهمي تساوي الفرق بين مجموع طاقة المصادر ومجموع كميات طلب المراكز وكلف خلايا هذا العمود الوهمي تساوي صفر لأنه وهمي .
2. في حالة اذا كانت مجموع كميات طلب المراكز اكبر من مجموع كميات طاقة المصادر فيتم في هذه الحالة أضافة صف وهمي يمثل مصدر تجهيز وهمي ونرمز له ب S حيث أن طاقة التجهيز لهذا المصدر تساوي الفرق بين مجموع كميات طلب المراكز وكميات طاقة المصادر وكلف خلايا هذا الصف تساوي صفر لأنه وهمي .
3. لحل مسائل النقل توجد عدة أساليب وهي
   1) أسلوب أقل كلفة Least Cost Method
   2) أسلوب الركن الشمالي الغربي North West Corner Method
   3) أسلوب فوجل Vogel Method
   4) البرمجة الخطية

أسلوب أقل كلفة Least Cost Method

خطوات الحل :

1. **يتم موازنة مسألة النقل اذا لم تكن متوازنة أي يجب أن يكون كميات الطلب = مجموع كميات التجهيز**
2. **تبدأ تحميل الخلية ذات أقل كلفة مع مراعاة كمية a_i ، b_j للخلية**
3. **ثم نحمل الخلايا ذات أقل كلف وهذا الى أن يتم استيفاء بما تحتاجه مراكز الطلب**

Ex: Solve the Following Transportation Problem by Least Cost Method .

حل مسألة النقل التالية بأستخدام طريقة أقل كلفة

Destinations

		D_1	D_2	D_3	Supply
	S_1	3	4	1	~~100~~ ~~20~~
Sources	S_2	5	3	2	50
	S_3	6	7	6	80
					230
Demand		60	90	~~80~~ صفر	230

الحل:

1. نلاحظ أن مجموع الطلب = مجموع التجهيز
   ❖ المسألة متوازنة
2. يتم تحميل الخلية (1,3) ب 80 وحدة لأنها اقل كلفة وأن D_3 يحتاج الى 80 وحدة فقط لذا يتم تصفير احتياجات D_3 ونقلل من S_1 ب 80 وحدة والباقي 20 وحدة
3. الخلية ذات أقل كلفة التالية هي خلية (2,3) لكن D_3 تم تصفيره لذا ننتقل الى الخلية (1,1) أو الخلية (2,2) لأنها متساويان بالكلفة ولنفرض نحمل الخلية (1,1) بالباقي من S_1 وهو 20 وحدة حيث يتم تصفير S_1 وتقليل D_1 ب 20 وحدة والباقي 40 وحدة

Destinations

Sources	**D_1**	**D_2**	**D_3**	
S_1	3 20	4	1 80	~~100~~ ~~20~~ 0
S_2	5	3 50	2	~~50~~ 0
S_3	6 40	7 40	6	~~80~~ ~~20~~ 0
	60	90	~~80~~	
	~~40~~	~~40~~	0	
	0	0		

4. ننتقل الى الخلية (2,2) ونحملها ب 50 وحدة ونصفر S_2 والباقي احتياجات D_2 40 وحدة
5. ننتقل الى الخلية (3,1) ونحملها ب 40 وحدة وكذلك الخلية (3,2) ب 40 وحدة ايضاً وبذلك يتم تصفير كافة احتياجات مراكز الطلب
6. نعمل الجدول التالي وهو جدول الحل

From	TO	Xij	Cost
S_1	D_1	20	20*3=60
S_1	D_3	80	80*1=80
S_2	D_2	50	50*3=150
S_3	D_1	40	40*6=240
S_3	D_2	40	40*7=280
			الكلفة الكلية $ 810

140
150
290
240
280
10

<u>طريقة الركن الشمالي الغربي North West Corner Method</u>

<u>خطوات الحل :</u>

1. **يتم موازنة المسألة اذا لم تكن متوازنة**
2. **يتم اولاً تحميل الخلية (1,1) اي الخلية الواقعة في الصف الاول والعمود الاول ويتم التحميل وفق القواعد التالية**

- **اذا كانت قيمة b_1 اكبر من a_1 فيتم تحميل الخلية بمقدار a_1 وتصفير a_1 وطرح b_1 من a_1 وثم ننتقل الى الخلية التي تقع تحت الخلية (1,1) اي الخلية (2,1)**
- **اذا كانت قيمة b_1 اقل من a_1 فيتم تحميل الخلية بمقدار b_1 وتصفير b_1 وطرح a_1 من b_1 وثم ننتقل الى الخلية المجاورة للخلية (1,1) اي الخلية (1,2)**
- **اذا كانت قيمة $a_1 = b_1$ فيتم تحميل الخلية بمقدار b_1 وتصفير b_1 ، a_1 وننتقل الى الخلية (2,2)**

3. **يتم بعد ذلك تحميل الخلايا وفق القواعد اعلاه الى أن يتم الإيفاء بكافة ما تطلبه مراكز الطلب .**

Ex: Solve the Following Transportation Problem by North West Corner Method .

<u>Sources</u>	D_1	D_2	D_3	<u>Supply</u>
S_1	5	4	2	100
S_2	3	6	1	50
S_3	2	4	5	60
<u>Demand</u>	40	70	100	

ا

لحل:

1. يتم تحميل الخلية (1,1) بمقدار 40 وحدة ونشطب هذه القيمة وثم نطرح 100 من 40 وننتقل الى الخلية المجاورة أي (1,2)

	D_1	D_2	D_3	
S_1	5 40	4 60	2	~~100~~ ~~60~~ 0
S_2	3	6 10	1 40	~~50~~ ~~40~~ 0
S_3	2	4	5 60	~~60~~ 0
	40 0	70 ~~10~~ 0	~~100~~ ~~60~~ 0	

2. ننتقل الى الخلية (1,2) ونحملها ب 60 وحدة ونصفر هذه القيمة ونطرح 70 من 60
3. ننتقل الى الخلية (2,2) ونحملها ب 10 وحدات ونطرح ال 10 وحدات من ال 50
4. ننتقل الى الخلية المجاورة أي (2,3) ونحملها ب 40 وحدة ونطرح هذه القيمة من ال 100
5. ننتقل الى الخلية (3,3) ونحملها ب 60 وحدة ونصفر كل من a_3 ، b_3
6. ننظم جدول

From	TO	Xij	Cost
S_1	D_1	40	40*5=200
S_1	D_2	60	60*4=240

S_2	D_2	10	10*6=60
S_2	D_3	40	40*1=40
S_3	D_3	60	60*5=300
الكلفة الكلية $ 840			

Ex: Solve the Following Transportation Problem by North West Corner Method .

Destinations

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	1	4	3	5	100
S_2	2	6	4	6	60
S_3	5	1	1	2	40
S_4	1	2	3	3	50
S_5	3	4	1	1	30
	40	40	100	100	280 / 280

الحل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	1 40	4 40	3 20		~~100~~ ~~60~~
S_2	2	6	4 60	6	~~60~~ 0
S_3	5	1	1 20	2 20	~~40~~ 0
S_4	1	2	3	3	0 -

				50	50		
S_5	3	4	1	1 30	~~30~~	0	~~20~~ 0
	~~40~~ 0	~~40~~ 0	~~100~~ 80	~~100~~ 80			

~~20~~ ~~30~~

0 0

From	TO	Xij	Cost
S_1	D_1	40	40*1=40
S_1	D_2	40	40*4=160
S_1	D_3	20	20*3=60
S_2	D_3	60	60*4=240
S_3	D_3	20	20*1=20
S_3	D_4	20	20*2=40
S_4	D_4	50	50*3=150
S_5	D_4	30	30*1=30
			Total Cost $ 740

طريقة فوجل Vogel Method

خطوات الحل :

1. **نطرح اصغر كلفتين في كل صف وفي كل عمود ونكتب هذا الفرق لكل صف وكل عمود**
2. **نختار اكبر فرق بين اصغر التكاليف في الخطوة (1) ويتم تحميل الخلية ذات اقل كلفة نقل مع مراعاة قيم ai ، bj**

3. **نشطب الصف او العمود الذي أصبحت قيمة تساوي صفر**
4. **نكرر الخطوات أعلاه الى أن يتم الإيفاء بكافة احتياجات مراكز الطلب**

Ex: Solve the Following Transportation Problem by Vogel Method .

Destinations

Sources		D_1	D_2	D_3	**Supply**
	S_1	5	3	1	60
	S_2	6	4	2	30
	S_3	3	2	1	70
		40	40	80	

الحل:

1. يتم طرح أقل كلفتين في كل صف وعمود

5	3	1	60	(2)
6	4	2	30	(2)
3	2	1	70	(1)
40	40	80		
(2)	(1)	(0)		

2. نختار اكبر فرق ولكن حسب هذا السؤال اكبر فرق هو 2 وهو في اكثر من صف وعمود لذا نختار أي منهما وليكن نختار الصف الأول
3. نحمل الخلية ذات أقل كلفة وهي الخلية (1,3) ونحملها ب 60 وحدة ونشطب الصف الأول ونقلل b_3 ب 60 أي الباقي 20

		1 60	~~60~~ 0

			30	(2)
			70	(1)
40	40	~~80~~ 20		
(2)	(1)			

6	4	2	30	(2)
3	2	1	~~70~~ 30	(1)
~~40~~ 0	40	20		
(3)	(2)	(1)		

4. نعيد الخطوات السابقة ونختار العمود الأول لأن هو الأكبر 3 ونحمل الخلية ذات كلفة 3 ب 40 وحدة ونشطب العمود الأول

4 / 10	2 / 20	~~30~~ 0	(2)
2 / 30	1	30	(1)
40	20		
(2)	(1)		

5. نعيد الخطوات السابقة ونحمل الخلايا بالوحدات المطلوبة

	D_1	**D_2**	**D_3**	
S_1	5	3	1 / 60	60
S_2	6	4 / 10	2 / 20	30
S_3	3 / 40	2 / 30	1	70

40	40	80	

From	TO	Xij	Cost
S_1	D_3	60	60*1=60
S_2	D_2	10	10*4=40
S_2	D_3	20	20*2=40
S_3	D_1	40	40*3=120
S_3	D_2	30	30*2=60
		Total Cost	$ 320

Vogel Method طريقة فوجل التقريبية

Ex: Solve the Following Transportation Problem by Vogel Method .

حل مسالة النقل التالية باستخدام طريقة فوجل

مراكز الطلبDestinations

	D_1	D_2	D_3	كميات التجهيزSupply
S_1	2	5	1	80
S_2	4	3	2	

				70
S_3	2	4	5	50
	60	80	60	

كميات الطلبDemand

المصادرSources

الحل:

	D_1	D_2	D_3	
S_1	2 10	5 10	1 60	~~80~~ ~~70~~ ~~10~~ 0

S_2	4	3 70	2	$\cancel{70}$ 0
S_3	2 50	4	5	$\cancel{50}$ 0
	0 $\cancel{10}$ $\cancel{60}$	0 $\cancel{80}$	0 $\cancel{60}$	

1 1

1 1 4

2

1

1 1 1

2 2 1

2 1

جدول نتائج النقل

كلفة الكمية	كلفة الوحدة	الكمية Xij	الطلب	المصدر
$20	2	10	D_1	S_1
$50	5	10	D_2	S_1
$60	1	60	D_3	S_1
$210	3	70	D_2	S_2
$100	2	50	D_1	S_3
$440	الكلفة الكلية			

Testing The Transportation Solution for Optimality

ملاحظة :

هذه الطريقة موضحة في الصفحة 81 ، 82 ، 83

Ex: Test for Optimality the Following Transportation Solution .

	D_1	D_2	D_3
S_1	3 50	4 50	1
S_2	2	0 50	5 20
S_3	1	6	2 80

الحل:

1) نأخذ كلف الخلايا المحملة فقط ونرمز للصفوف بالمتغيرات u_1 ، u_2 ، u_3 والاعمدة بالمتغيرات v_1 ، v_2 ، v_3

2) نجد قيم المتغيرات u_1 ، u_2 ، u_3 ، v_1 ، v_2 ، v_3 من خلال استخدام المعادلة $\boxed{C_{ij} = u_i + u_j}$
نفرض احد المتغيرات = صفر وليكن u_1 = صفر

❖ قيم المتغيرات الأخرى موضحة في المصفوفة التالية

		3	4	9
		v_1	v_2	v_3
0	u_1	3	4	
-4	u_2		0	5
-7	u_3			2

3) نجد قيم المتغيرات Cij من خلال المعادلة التالية $\boxed{\bar{C}_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j}$
وذلك باستخدام كلف الخلايا الغير محملة Cij

	3	4	9
0			1
-4	2		
-7	1	6	

$\bar{C}_{13} = 1 - 0 - 9 = -8$ سالبة

$\bar{C}_{21} = 2 - (-4) - 3$

$= 2 + 4 - 3 = 3$

$\bar{C}_{31} = 1 - (-7) - 3 = 1 + 7 - 3 = 5$

$\bar{C}_{32} = 6 - (-7) - 4 = 6 + 7 - 4 = 9$

❖ توجد قيم سالبة

❖ <u>الحل غير أمثل</u>

الفصل التاسع

التخصيص Assignment

1.في حالة الربح
2.في حالة الكلفة

يتم استخدام هذا الاسلوب لتعيين او تخصيص عمل لكل عامل

1) **<u>في حالة الكلفة In Case of Cost</u>**

<u>خطوات الحل :</u>

1. يجب أن تكون المصفوفة مربعة أي عدد الصفوف = عدد الاعمدة وفي حالة عدم المساواة يجب أضافة صف او عمود حسب حالة المصفوفة وكلفة خلايا هذا الصف او العمود المضاف = صفر ويطلق على هذا الصف او العمود ب Dummy
2. في حالة اذا كان هناك عمل لا يمكن أن يخصص لأحد العمال ، نجعل الخلية الناتجة من تقاطع هذا العمل مع العامل كلفتها = ∞
3. يتم طرح اقل كلفة في كل صف من بقية الكلف في الصف
4. يتم طرح اقل كلفة في كل عمود من بقية الكلف في العمود
5. يتم شطب الاعمدة والصفوف التي تحتوي على اصفار بأقل عدد ممكنة من الخطوط الأفقية والعمودية اذا كانت عدد هذه الخطوط = عدد الصفوف فيتم التخصيص وبعكسه نذهب الى الخطوة (6)
6. في حالة عدد الخطوط ≠ عدد الصفوف فيتم طرح أقل قيمة من القيم الغير مشطوبة من بقية القيم الغير مشطوبة واضافة هذه القيمة الى القيم الواقعة في تقاطع الخطوط

Ex: Assign each job for each worker at minimum total Cost .

خصص عمل لكل عامل وبأقل كلفة ممكنة

<u>Jobsالأعمال</u>

<u>Workorsالعمال</u>

	J_1	J_2	J_3	J_4
W_1	15	13	14	12
W_2	11	12	15	13
W_3	13	12	10	11
W_4	15	17	14	16

<u>الحل:</u>

15	13	14	12
11	12	15	13
13	12	10	11
15	17	14	16

3	1	2	0
0	1	4	2
3	2	0	1
1	3	0	2

3	0	2	0
0	0	1	2
3	1	0	1
1	2	0	2

عدد الخطوط ≠ عدد الصفوف

3	0	3	0
0	0	5	2
2	0	0	0
0	1	0	1

عدد الخطوط = عدد الصفوف

			0
0			
	0		
		0	

Workors	Job	Cost
W_1	J_4	12
W_2	J_1	11
W_3	J_2	12
W_4	J_3	14
	الكلفة الكلية	49

2) في حالة الربح Profit

خطوات الحل :

1. يتم جعل المصفوفة مربعة اذا لم تكن كذلك وذلك بإضافة صف او عمود حسب حالة المصفوفة حيث ان ربح خلايا هذا الصف او العمود المضاف تساوي اعلى قيمة في المصفوفة .
2. اذا كان هناك احد العمال لا يستطيع انجاز عمل معين فيتم جعل ربح الخلية الناتجة من تقاطع هذا العامل مع العمل تساوي صفر .
3. نطرح اكبر قيمة موجودة في المصفوفة من بقية القيم في المصفوفة .
4. نتبع خطوات الكلفة من الخطوة 3

Ex: Assign each job for each worker at maximize total Profit .

خصص لكل عامل عمل بأعلى ربح

الأعمالJobs

العمالWorkors

	J_1	J_2	J_3	J_4
W_1	8	10	11	6
W_2	14	12	7	8
W_3	12	13	10	9
W_4	9	8	6	7

الحل:

8	10	11	6
14	12	7	8
12	13	10	9
9	8	6	7

6	4	3	8
0	2	7	6
2	1	4	5
5	6	8	7

3	1	0	5
0	2	7	6
1	0	3	4
0	1	3	2

3	1	0	3
0	2	7	4
1	0	3	2
0	1	3	0

عدد الخطوط = عدد الصفوف

		0	
0			
	0		
			0

Workors	Job	Profit
W_1	J_3	11
W_2	J_1	14
W_3	J_2	13
W_4	J_4	7
	الربح الكلي	45

الفصل العاشر

شبكات الاعمال

شبكات الاعمال Networks Analysis

يعرف المشروع بأنه مجموعة من الأنشطة المترابطة منطقياً بينها والتي يجب أن تنفذ في زمن معين يحدد من قبل مهندسي المشاريع بناء على خبراتهم السابقة . تستخدم جدولة المشاريع من قبل المهندسين والاداريين لضمان انجاز المشروع في الوقت المحدد وإيجاد مؤشرات تنبه للحالات الغير اعتيادية حين ظهورها .

مراحل تنفيذ تخطيط المشروع

اولاً : انشاء شبكة الأعمال للمشروع

- تحليل المشاريع الى أنشطة او فعاليات واحداث
- تتابع الأنشطة والاحداث
- رسم تخطيطي للمشروع
- ت
- قدير الأزمنة لكل نشاط او فعالية

ثانياً : تخطيط المشروع

- تحديد أنشطة الحرجة
- إيجاد المسار الحرج
- حساب الفائض عن كل وقت من أوقات الأنشطة

ثالثاً : ضبط المشروع

- مراقبة الأزمنة ومقارنتها مع خطة المشروع النظرية
- محاولة قدر المستطاع اتباع الخطة المزمع تنفيذها
- نقل الإمكانيات من نشاط ذات وقت فائض الى الحرج أن أمكن

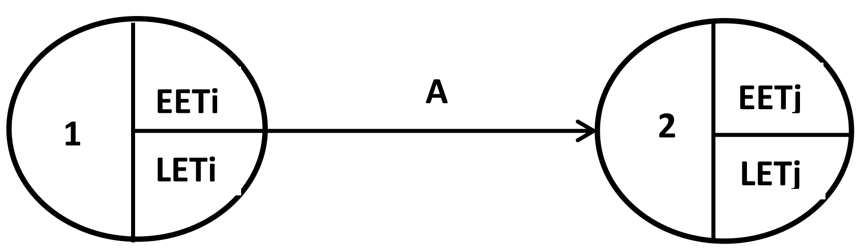
هناك اسلوبين تستخدم في تخطيط المشاريع وهي

1. أسلوب المسار الحرج Critical Path Method (CPM)
2. أسلوب مراجعة وتقييم المشاريع Project evaluation and review technique (PERT)

ولكل الاسلوبين مزاياها الخاصة ولكن يجب أن يتم رسم أنشطة المشروع اولاً

رسم شبكة المشروع

لكل نشاط او فعالية Activity من أنشطة المشروع عقدتان هما عقدة البداية وعقدة النهاية . مثل النشاط A



حيث أن :

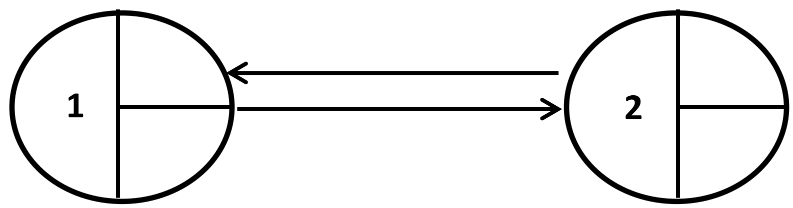
EETi = الوقت المبكر لبداية النشاط

LETi = الوقت المتأخر لبداية النشاط

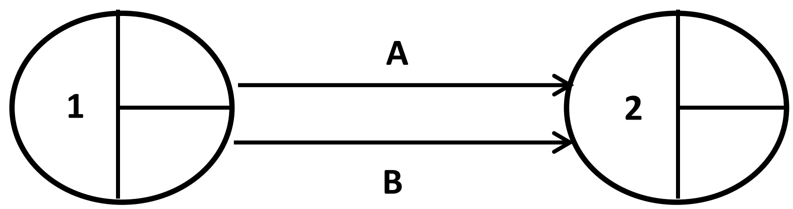
EETj = الوقت المبكر لنهاية النشاط

LETj = الوقت المتأخر لنهاية النشاط

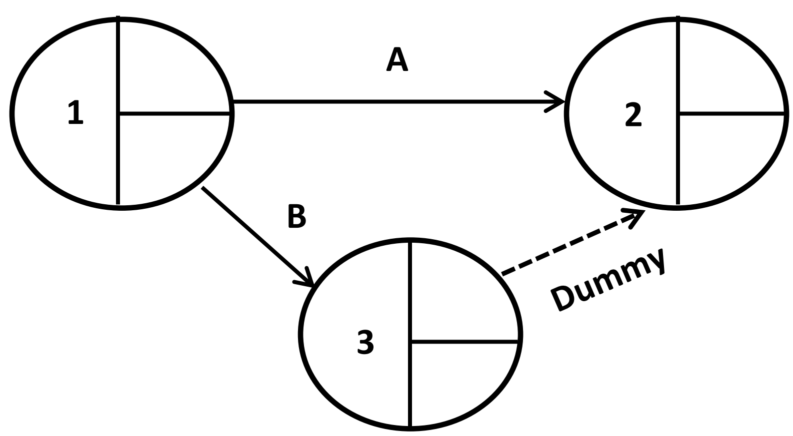
لا يجوز العودة الى نشاط سابق



لا يجوز لنشاطين او اكثر ان يشتركا بنفس بداية ونفس نهاية العقدة مثلاً

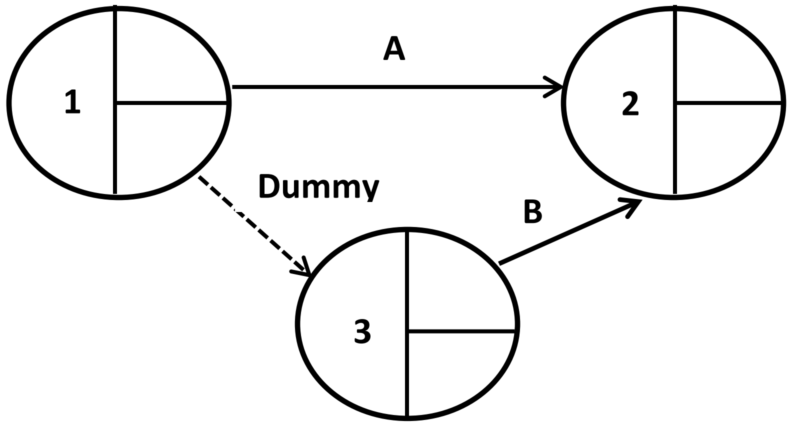


اذا تطلب الأمر ربط عقدتين ببداية عقدة ونهاية عقدة واحدة فإنه يتم استخدام الأنشطة الوهمية ويرمز لها ب Dummy



او

=



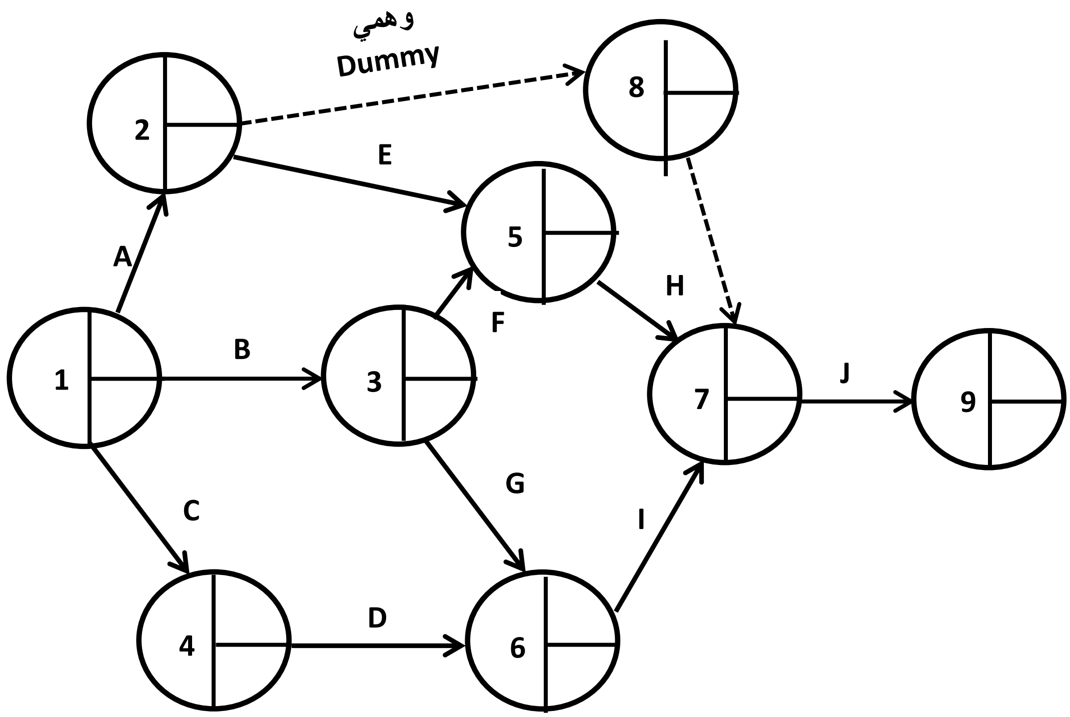
Ex: Consider a Project with the follow information .

المعلومات التالية لأحدى المشاريع . المطلوب رسم الشبكة

النشاط Activity	الانشطة السابقة Predessors
A	—
B	—
C	—
D	C
E	A
F	B
G	B
H	E,F
I	G,D
J	A,H,I

ا

لرسم



أسلوب المسار الحرج Critical Path Method (CPM)

اسلوب CPM هو احد الاساليب المستخدمة لتخطيط المشاريع ويتم بواسطة هذا الاسلوب ايجاد المسار الحرج Critical Path والانشطة التي تقع على هذا المسار .

ويعرف المسار الحرج بأنه المسار الذي تقع عليه الانشطة التي يجب أن تنفذ في زمنها المحدد والا تأخر زمن انجاز المشروع .

أن أسلوب المسار الحرج يستخدم لإيجاد :

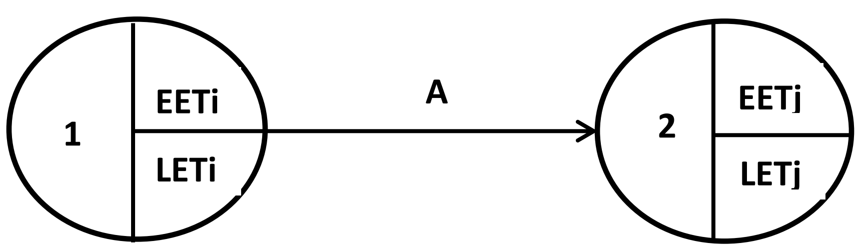
1. اوقات البداية والنهاية لكل نشاط

أي اوقات EET ، LET لكل عقدة

EET هي مختصر الى Earliest event Time

LET هي مختصر الى Latest event Time

مثلاً للنشاط A :



ويتم احتساب هذه الاوقات كما يلي

$EETi = 0$ }
$LETi = 0$ } لأول عقدة في الشبكة

$EETj = \max\{EETi + dij\}$ لكل عقدة

$LETi = EETi$ للعقدة الاخيرة في المشروع

$LETi = \min\{LETj - Dij\}$ للعقد الاخرى

2. ايجاد المسار الحرج وهو المسار الذي تتساوى فيه $(LETi = EETi)$ $(EETj = LETj)$

ولا يوجد فيه وقت فائض

3. ايجاد الوقت اللازم لإنجاز المشروع Project Completion Time
4. تحليل الأوقات لكل العقد

لمعلومات التالية لأحدى المشاريع

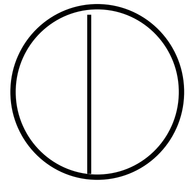
Ex: Given the following information for a project .

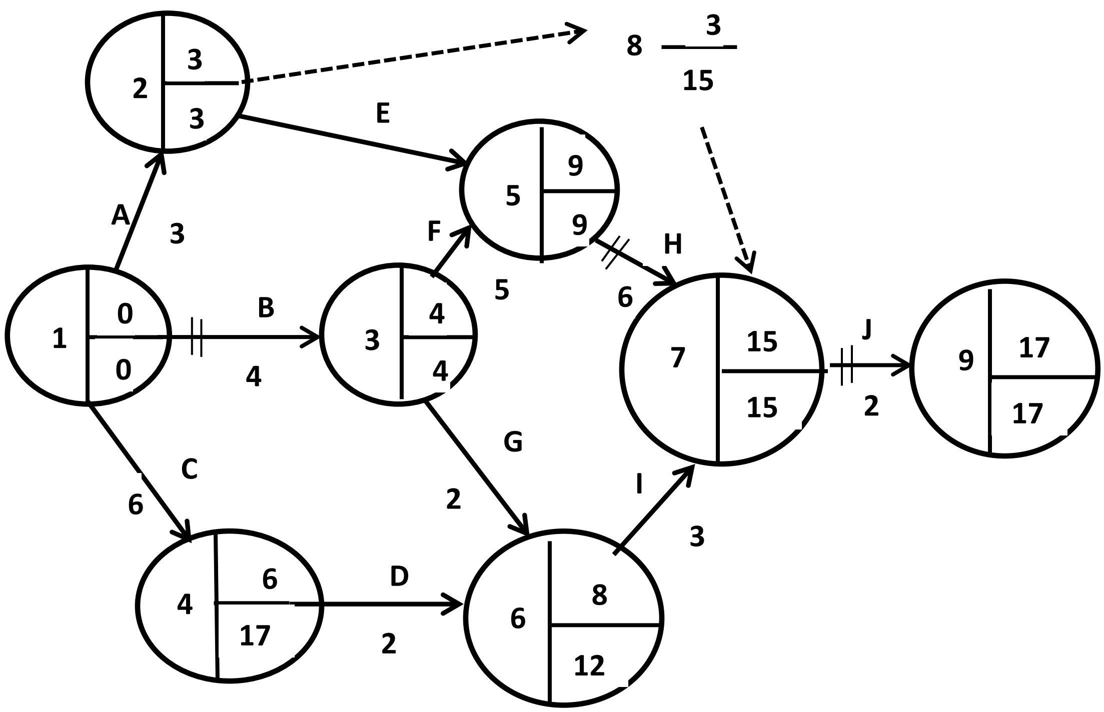
1. **Draw the Project Network** ارسم شبكة المشروع
2. **Find the Critical Path** اوجد المسار الحرج
3. **Find Project duration Time** اوجد فترة انجاز المشروع
4. **Analyze the Nodes Time** حلل اوقات العقد

النشاط Activity	الانشطة السابقة Predessors	وقت انجاز كل نشاط Duration Time in days
A	—	3
B	—	4
C	—	6
D	C	2
E	A	4
F	B	5
G	B	4
H	E,F	6
I	G,D	3
J	A,H,I	2

الرسم

النشاط	فترة انجاز	العقد	بداية العقدة	نهاية العقدة	TF	FF





Critical Path = B F ➡ H ➡ J ➡ المسار الحرج هو

Project duration Time = 17 days وقت انجاز المشروع

Activity	النشاط Activity	Nodes	EETi	LETi	EETj	LETj		
A	3	1 - 2	0	0	3	5	2	0
B	4	1 - 3	0	0	4	4	0	0
C	6	1 - 4	0	0	6	10	6	0
D	2	4 - 6	6	10	8	12	0	0
E	4	2 - 5	3	3	9	9	2	2
F	5	3 - 5	4	4	9	9	0	0
G	4	3 - 6	4	4	8	12	4	0
H	6	5 - 7	9	9	15	15	0	0
I	3	6 - 7	8	12	15	15	0	4
J	2	7 - 9	15	15	17	17	0	0

تحليل الأوقات للعقد Analysis of Nodes Time

حيث أن TF وهي الفترة الفائضة الكلية

TF = LETj – LETi – Dij

وأن FF وهي الفترة الفائضة الحرة

FF = EETj – EETi – Dij

<u>أسلوب مراجعة وتقييم المشاريع Project evaluation and review technique (PERT)</u>

يختلف هذا الأسلوب CPM بأنه يأخذ في نظر الاعتبار احتمالات الفترة الازمة لإنجاز كل نشاط او فعالية من أنشطة المشروع حيث يفترض ثلاثة فترات زمنية لإنجاز كل نشاط وهي :

1. **Most likely Time الزمن الأكثر توقع ويرمز له ب c**
2. **Optimistic Time الزمن التفاؤلي ويرمز له ب b**
3. **Pessimistic Time الزمن التشاؤمي ويرمز له ب a**

<u>خطوات استخدام أسلوب PERT</u>

1. **حساب متوسط الزمن المتوقع لتنفيذ كل نشاط وذلك حسب المعادلة**

$$\bar{d} = \frac{a + b + 4C}{6}$$

2. حساب التباين لزمن تنفيذ كل نشاط حسب المعادلة

$$V = \left(\frac{a - b}{6}\right)^2$$

3. رسم شبكة المشروع
4. ايجاد المسار الحرج
5. ايجاد الفترة المتوقعة لإنجاز المشروع
6. ايجاد تباين المسار الحرج وهو مجموع تباين انشطة المسار الحرج S^2
7. ايجاد القيمة المعيارية Z

$$Z = \frac{a = b + 4C}{\sqrt{S^2}}$$

والمثال التالي يوضح ذلك

Ex: Use PERT to Find the Critical Path , expduration Time , Variance of the Critical Path and Value of Z if D = 15 Days .

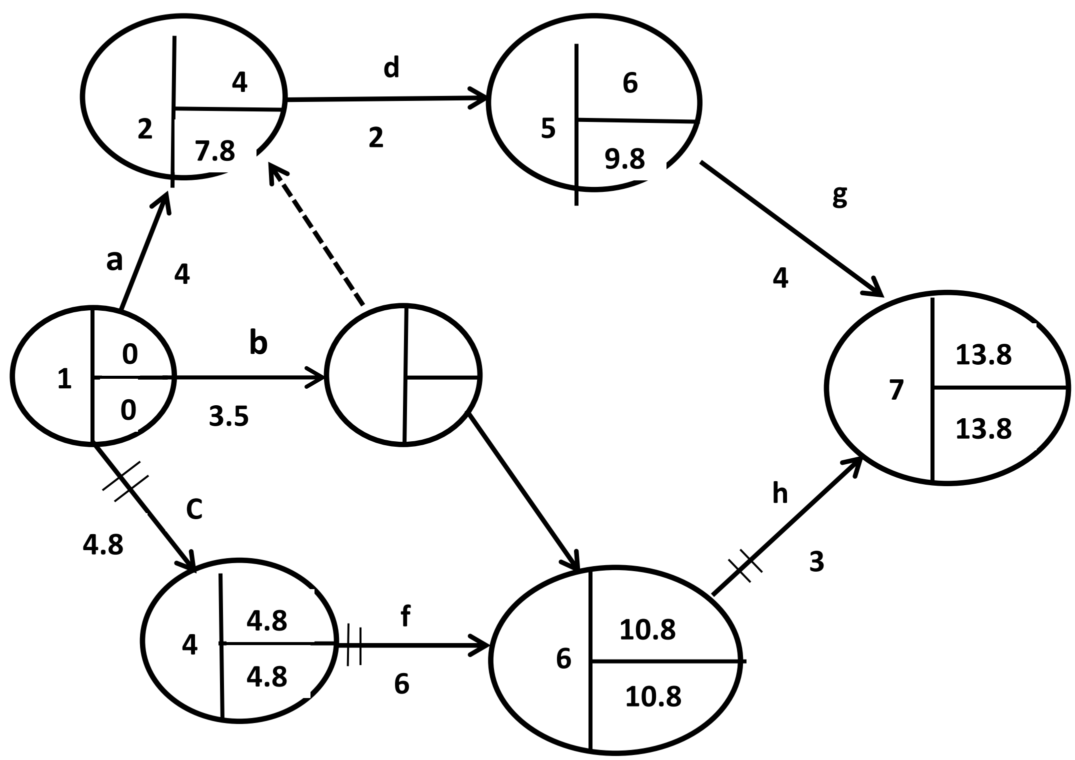
Duration activity Time

activity	Predessors	mos likely time	optimistic	Pessimistic
A	-	4	3	5
B	-	4	2	3
C	-	5	3	6
D	a,b	2	1	3
E	b	5	4	7
F	c	6	5	7
G	d	4	3	5
H	e,f	3	2	4

إ

لحل :

activity	Predessors	$\bar{d}$	V
a	-	4	0.11
b	-	3.5	0.028
c	-	4.8	0.25
d	a,b	2	0.11
e	b	5.2	0.25
f	c	6	0.11
g	d	4	0.11
h	e,f	3	0.11



❖ المسار الحرج = c ➡ f ➡ h

الفترة المتوقعة لإنجاز المشروع = 13.8 يوم

تباين المسار الحرج $S^2 = 0.25 + 0.11 + 0.11$

$= 0.47$

القيمة المعيارية عند D = 15

$$Z = \frac{15 - 13.8}{\sqrt{0.47}}$$

$= 1.75$

<u>ملاحظة :</u> يمكن ايجاد TF,FF باستخدام العمليات السابقة حسب طريقة CPM

activity	Nodes	Dij	EEi	LEi	EEj	LEj	TF	FF
a		8	0	0	8	8	0	O
b		4	0	0	4	10	6	O
c		5	4	10	10	15	0	1
d		10						
e		2						
f		3	10	15	18	18	0	5

استخدام الكلفة للتعجيل بزمن انجاز المشروع CRASH COST

تستخدم الكلفة للتعجيل بفترة انجاز المشروع أي تقليص فترة انجاز المشروع وذلك بزيادة الكلف اللازمة بتعجيل انجاز فعاليات / أنشطة المشروع والمثال التالي يوضح ذلك .

Ex: Find the Minimum duration Completion Time at Minimum Cost for the fallowing Project .

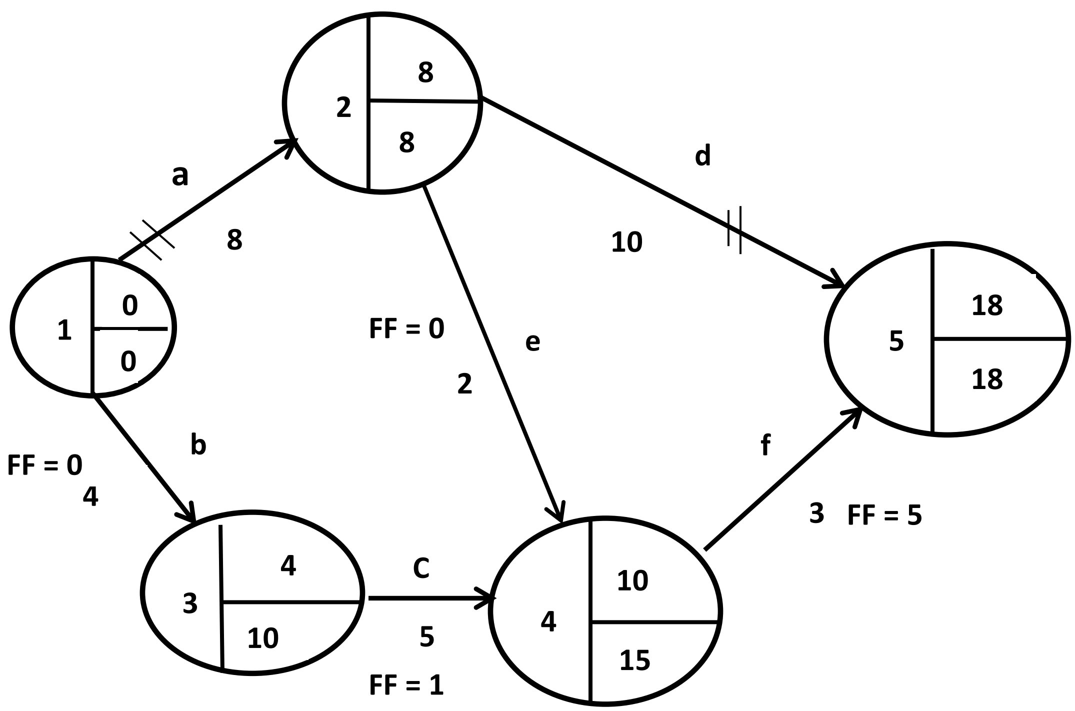
		Normal		Crash	
activity	Predessors	duration	Cost	duration	Cost
A	-	8	100	6	200
B	-	4	150	2	350
C	b	5	50	1	90
D	a	10	100	5	400
E	a	2	100	1	200
F	c,e	3	80	1	100

خطوات:

1. نرسم شبكة المشروع ونجد المسار الحرج وفترة انجاز المشروع وكلفة الإنجاز حسب الوقت الاعتيادي .
2. نجد الميل لكل نشاط / فعالية حيث .

$$\text{الميل} = \frac{\text{الكلفة حسب التعجيل - الكلفة حسب الوقت الاعتيادي}}{\text{الوقت الاعتيادي - الوقت المعجل}}$$

$$\text{الميل Slope} = \frac{C_C - C_n}{D_n - D_C}$$



activity	Slope
a	50
b	100
c	40
d	60
e	25
f	10

زمن انجاز المشروع = 18 يوم

المسار الحرج a → d

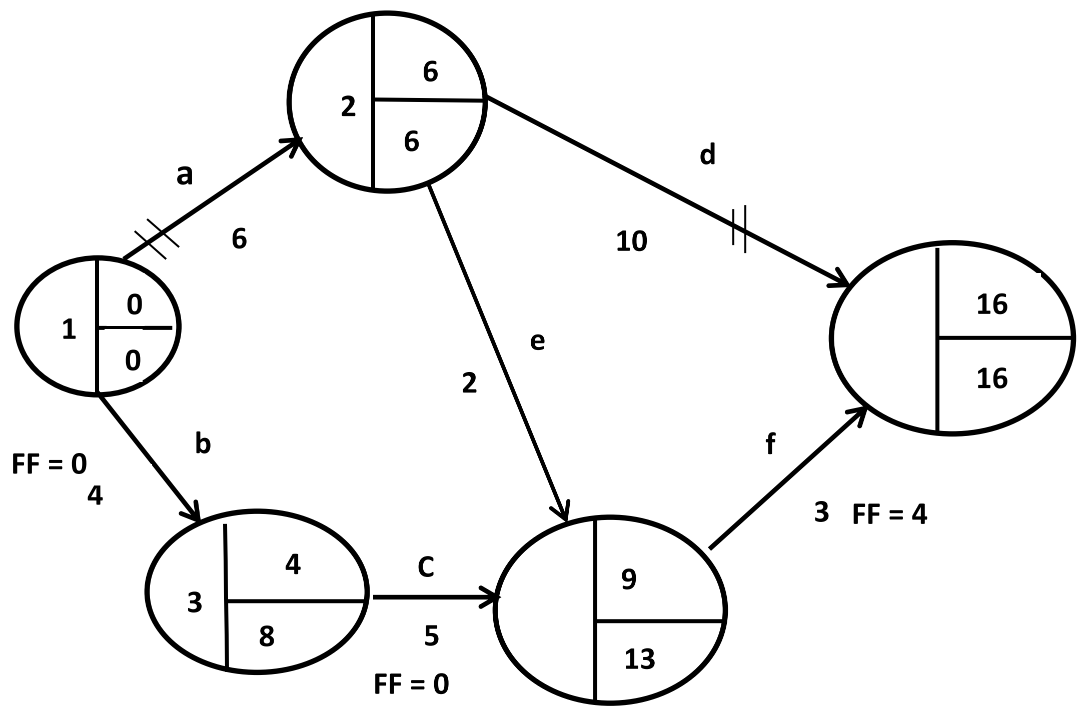
الكلفة = 580

3. نجد ال FF لكل نشاط غير حرج

$FF = ES_j – ES_i – D_{ij}$

4. نختار النشاط الذي يقع على المسار الحرج وأن ميله أقل ما ممكن
   - ❖ النشاط a يقع على المسار الحرج

     ميل النشاط هو 50
   - ❖ نستطيع ان نقلل الفترة للنشاط a يومان فقط
5. نعيدالرسم واستخراج المعلومات أعلاه



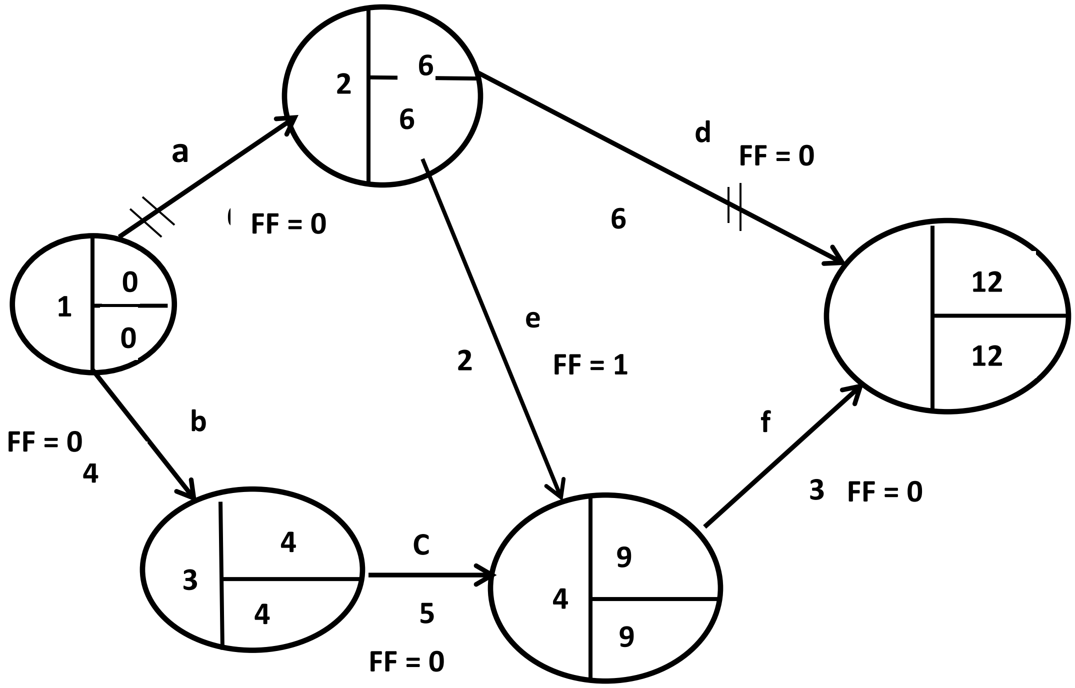
المسار الحرج a d

الفترة الزمنية = 16

الكلفة = 2 * 50 + 580 = 680

عدد الأيام ميل

6. يتم تخفيض d الى 6 أيام فقط لأن اعلى FF = 4



a d ➡ المسار الحرج

b C ➡ f ➡

الزمن = 12 يوم

الكلفة = 680 + 4 * 60 = 680 + 240

= 920

الفصل الحادي عشر

المباراة الاستراتيجية

Strategic Games Theory نظرية المباراة الاستراتيجية

اولاً :

استخدام اسلوب maxmin (min max) في حالة وجود نقطة اتزان Sadde Point اي النقطة التي تتعادل فيها

$$\text{maxmin} = \text{min max}$$

Ex: Find the Optimal Strategies and the value of Game .

أوجد الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباراة

Player B اللاعب

Player A اللاعب

	B_1	B_2	B_3	B_4	Min	
A_1	8	-2	9	-3	-3	
A_2	6	5	6	8	5	max
A_3	-2	4	-9	5	-9	
max	8	5	9	8		
		min				

- الاستراتيجيات المثلى هي A_2 ، B_2
- قيمة المباراة $V = 5$

ملاحظة : دائماً القيم في المصفوفة تمثل ربح الى اللاعب A وخسارة الى اللاعب B لذا فإن اللاعب A يحاول زيادة أرباحه والفوز اما اللاعب B فإنه يحاول تقليل خسارته ، لذا يتم دائماً صياغة المسألة بمصفوفة حيث يلعب اللاعب A بمجموعة من الاستراتيجيات A_1 ، A_2 ، A_3 ، ... واللاعب B يلعب بمجموعة اخرى من الاستراتيجيات تمثل B_1 ، B_2 ، B_3 ، ... تستخدم هذه النظرية في صياغة المشاكل الاقتصادية والعسكرية عندما يكون هناك طرفان او اكثر متنازعين ويحاول كل منهما الفوز او تقليل خسارته .

ثانياً :

في حالة عدم وجود نقطة اتزان . هناك عدة طرق لحل مسائل المباراة الاستراتيجية في حالة عدم وجود نقطة اتزان وهي

1. الطريقة الجدية التحليلية Analytical Method
2. طريقة الرسم البياني Graphical Method
3. طريقة البرمجة الخطية Linear Programming

الطريقة التحليلية Analytical Method

Ex: Solve the Following Strategic Game Problem by Analytical Method .

حل مسألة المباراة الاستراتيجية بأستخدام الطريقة التحليلية

Player B اللاعب

Player A اللاعب		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	3	7	6	-1
	A_2	2	5	4	6
	A_3	5	4	3	2
	A_4	5	3	-3	4

الخطوات :

1. **تحذف الاستراتيجيات التي ينتج عنها اعلى خسارة لل B**

وكذلك حذف الاستراتيجيات التي ينتج عنها ادنى ربح لل A

بحيث تبقى المصفوفة 2*2 ، نلاحظ ان الاستراتيجيات B_1 ، B_2 و A_3 ، A_4 هي التي تحذف لذا تبقى المصفوفة

	B_3	B_4	
A_1	6	-1	X
A_2	4	6	(1-X)

نفرض ان اللاعب A يلعب الاستراتيجية A_1 باحتمال X والاستراتيجية A_2 باحتمال 1-X

❖ $6X + 4(1-X) = -X + 6(1-X)$

$6X + 4 - 4X = -X + 6 - 6X$

$6X - 4X + X + 6X = 6 - 4$

$9X = 2 \qquad X \Rightarrow 2/9$

❖ **قيمة المباراة** $V = 6X + 4(1-X)$

$= 6 * 2/9 + 4(1 - 2/9) = 40/9$

الاستراتيجيات المثلى A_2 ، A_1 ، B_4 ، B_3

Graphical Method 2 * m طريقة الرسم البياني لحل المباراة الاستراتيجية

Ex: Solve the Following Game Problem by Graphical Method .

حل مسألة المباراة الاستراتيجية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني

Player B اللاعب

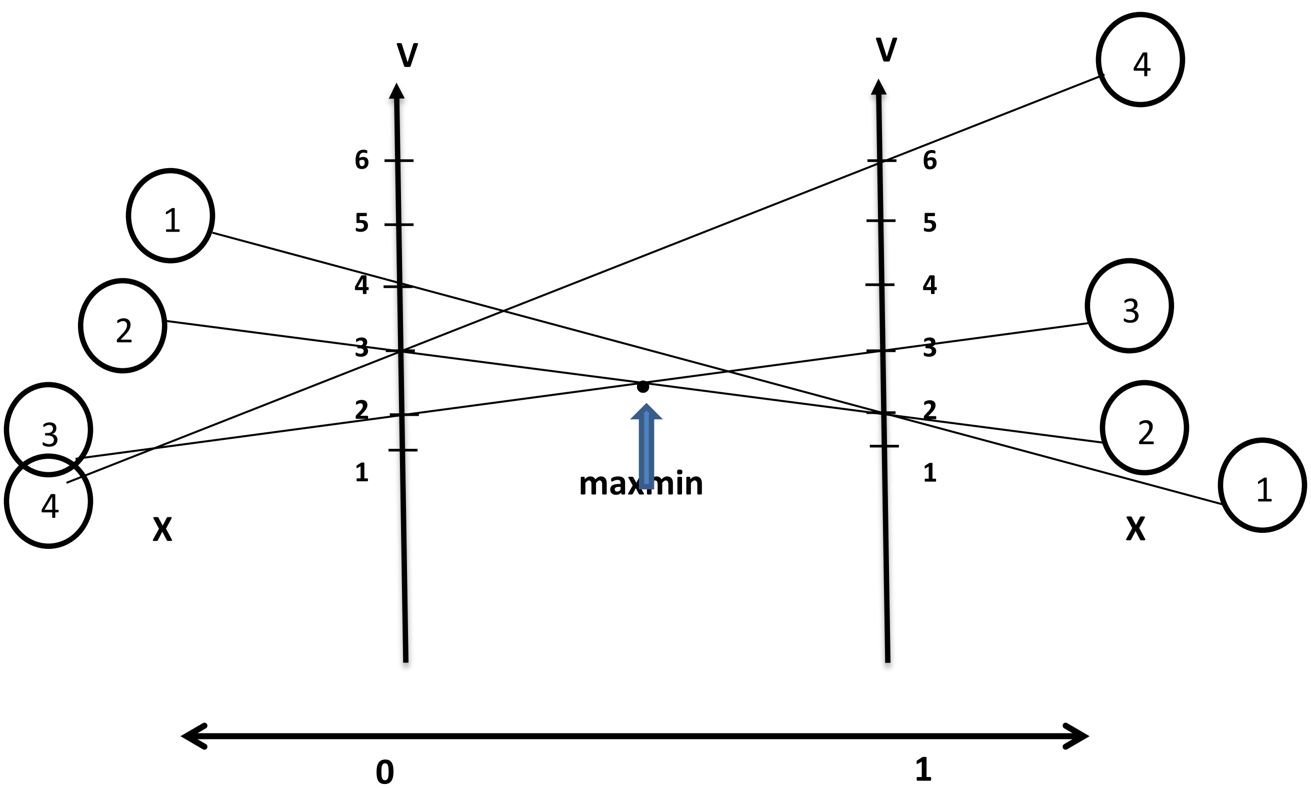
Player A اللاعب	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	2	3	6	X
A_2	4	3	2	3	(1-X)

الحل :

نفرض أن اللاعب A يستخدم الاستراتيجية A_1 باحتمال X والاستراتيجية A_2 باحتمال 1-X

استراتيجية B	العائد لل A
B_1	$2X + 4(1-X) = - 2X + 4$
B_2	$2X + 3(1-X) = - X + 3$
B_3	$3X + 2(1-X) = X + 2$
B_4	$6X + 3(1-X) = 3X + 3$

نرسم العائد لل A وذلك بالتعويض عن X = 0 وثم X = 1



3 2

التقاطع الأسفل يمثل maxmin والنقطة هي تقاطع ،

❖ $-X + 3 = X + 2$

$3 - 2 = X + X$ $\Rightarrow$ $X = 1/2$

$1 = 2X$

❖ قيمة المباراة $V = X + 2$

$= 1/2 + 2 = 5/2$

الاستراتيجيات المثلى A_2 ، A_1 ، B_3 ، B_2

طريقة الرسم البياني لحل المباراة الاستراتيجية Graphical Method n * 2

Ex: Solve the Following Strategic Game Problem by Graphical Method .

حل مسألة المباراة الاستراتيجية باستخدام طريقة الرسم البياني

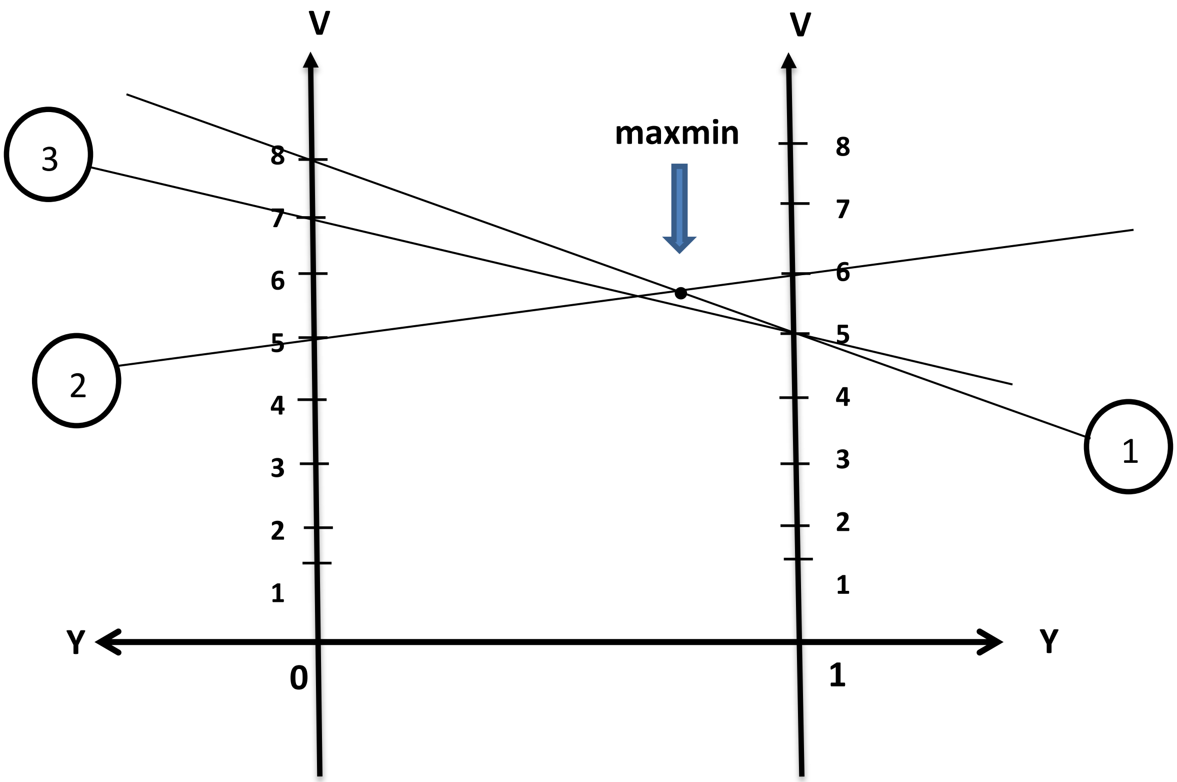
Player B اللاعب

Player A اللاعب		B_1	B_2
	A_1	5	8
	A_2	6	5
	A_3	5	7
		y	(1-y)

<u>الحل :</u>

نفرض أن اللاعب B يستخدم الاستراتيجية B_1 باحتمال Y , B_2 باحتمال 1-Y

استراتيجية A	قيمة الخسارة لل B
A_1	5Y + 8(1-Y) = 8 + 3Y
A_2	6Y + 5(1-Y) = 5 + Y
A_3	5Y + 7(1-Y) = 7 - 2Y



التقاطع الاعلى يمثل minmax بالنقطة 1 ، 2

❖ **$8 - 3y = 5 + y$**

$8 - 5 = y + 3y$

$3 = 4y \qquad y = {}^{3}/_{4}$

❖ **قيمة المباراة $V = 5 + y$**

$= 5 + {}^{3}/_{4}$

$= {}^{23}/_{4}$

الاستراتيجيات المثلى A_2 ، A_1 ، B_2 ، B_1

الفصل الثانى عشر

صفوف الانتظار

نظرية صفوف الانتظار Queuing Theory

تستخدم نظرية صفوف الانتظار في المشاكل التي يوجد فيها انتظار ولهذه النظرية أهمية كبيرة في خفض التكاليف الناتجة من الانتظار الناتج من عمليات الإنتاج والتشغيل ومثال على استخدام هذه النظرية :

1. تخطيط تفريغ وشحن البضائع من السفن في الموانئ .
2. جدولة هبوط ومغادرة الطائرات .
3. جدولة اعمال الصيانة .
4. جدولة عمليات دخول وخروج المرضى من المستشفيات .
5. تصميم البدالات ومحطات الهواتف المركزية .
6. تنظيم عمليات التسوق في الأسواق المركزية .

وهناك العديد من النماذج الرياضية التي تستخدم لحل مسائل صفوف الانتظار والتي تختلف بعضها عن البعض من خلال التوزيعات الاحتمالية للوصول والخدمة وعدد محطات الخدمة في النظام . لكل نموذج ما يميزه عن النموذج الأخر حسب الحروف التالية : (a/b/c) : (d/e/f)

a : ترمز الى التوزيع الاحتمالي لعدد الوصول الى النظام فإذا كان التوزيع الاحتمالي هو توزيع بواسون Poisson dist. فيرمز له ب(M) وإذا كان توزيع عام فيرمز له ب(G) وإذا كان عدد الوصول له معدل ثابت فيرمز له ب(D) .

b : يرمز الى التوزيع الاحتمالي لزمن الخدمة فإذا كان التوزيع الاحتمالي هو توزيع أسي Exponential dist. فيرمز له ب(M) وإذا كان توزيع عام General فيرمز له ب(G) وإذا كان معدل ثابت فيرمز له ب(D) .

C : يرمز الى عدد محطات الخدمة Servers فإذا كان عدد محطات الخدمة واحدة فيرمز لها ب(1) وإذا اكثر من واحد يرمز لها ب(C) وبعدد المحطات .

d : يرمز الى الأولوية في الخدمة فإذا كان من يصل اولاً يخدم اولاً ويرمز له ب(GD) وإذا كان هناك أولوية يرمز له ب(Priority) .

e : يرمز الى العدد الذي يستطيع النظام تحملهم في صف الانتظار فإذا كان غير محدد يرمز له ب (∞) وبعكسه يرمز له ب(N) .

f : يرمز الى حجم المصدر أي مصدر القادمين الى النظام فإذا كان غير محدد يرمز له ب(∞) وإذا كان محدد فيرمز له ب(N) .

1. <u>نموذج صف الانتظار m/m/1 : GD/∞/∞</u>

ويعني ذلك ان النظام System يحتوي على محطة خدمة واحدة One Server يتبع التوزيع الاحتمالي لعدد الوصول الى النظام التوزيع البواسوني Poisson dist. وأن زمن الخدمة يتبع توزيع أسي Exponential dist وأن النظام يتحمل عدد غير محدد من الاشخاص او المعدات في صف الانتظار .

<u>ملاحظة :</u> نستخدم مصطلح الى الاشخاص لعدد الوصول الى النظام

<u>الرموز المستخدمة في هذا النموذج :</u>

a : Number of Customers arrive عدد الواصلين الى النظام

s : Service Vate Per Unit of Time معدل الخدمة في وحدة الزمن

u : Utilization factor or probability that the System is buzy معامل الانتفاع او احتمال ان النظام مشغول

P_0 : Probability that the System is empty احتمال النظام فارغ

P_n : Probability that n Customers in the System احتمال وجود n من الاشخاص في النظام

L_s : Expected Number of Customers in the System العدد المتوقع من الاشخاص في النظام

L_q : Expected Number of Customers in the Queue العدد المتوقع من الاشخاص في صف الانتظار

W_s : Expected Time in the System الوقت المتوقع في صف الانتظار

W_q : Expected Time in the queue الوقت المتوقع في صف الانتظار

القوانين المستخدمة

1. $u = a/s \leq 1$
2. $P_0 = 1 - u$
3. $P_n = P_0 u^n$
4. $L_s = u/1 - u$
5. $L_q = u^2/1 - u$
6. $W_s = L_s / A$
7. $W_q = L_q / A$

Ex: Consider a queuing System has one Server and can have unlimited number of Customer in the System .

Arrival rate = 8 Customers / hour

Service rate = 16 Customers / hour

Find :

1. Probability that the System is busy
2. Probability that the System is empty
3. Probability that 3 Customer in the System
4. Expected Number of Customer in the System
5. Expected Number of Customer in the Queue
6. Expected Time in the System

7. Expected Waiting Time

الحل :

a = 8 Customers / hour
s = 16 Customers / hour

- ❖ $u = {}^{a}/_{s} = {}^{8}/_{16} = 0.5$

1. $u = 0.5$
2. $P_0 = 1 - u$
   $= 1 - 0.5 = 0.5$
3. $P_3 = P_0 * u^n$
   $= P_0 * u^3 = 0.5 * 0.5^3 = 0.0625$
4. $L_3 = u / 1 - u$
   $= 0.5/1 - 0.5 = 0.5/0.5 = 1$ Customer
5. $L_q = u^2/1 - u$
   $= (0.5)^2 / 1 - 0.5 = 0.25/0.5 = 0.5$ Customer
6. $W_s = L_s / A$
   $= 1/8$ hours
7. $W_q = L_q / A$
   $= 0.5/8 = 1/16$ hours

2. نموذج صف الانتظار m/m/1 : GD/N/∞

ويعني ذلك ان النظام System يحتوي على محطة خدمة واحدة ، عدد الوصول يتبع التوزيع البواسون وكذلك فإن زمن الخدمة يتبع توزيع الاسي لكن النظام يتحمل N من الاشخاص .

الرموز المستخدمة

a : Number of Customers arrive

s : Service Vate

u : Utilization factor

N : Number of Customers that the System can have

P_0 : Probability that the System is empty

P_N : Probability that the System is busy

P_n : Probability that n Customers in the System

L_s : Expected Number of Customers in the System

L_q : Expected Number of Customers in the Queue

λeff : effective arrival معدل الوصول الفعلي

W_s : Expected Time in the System

W_q : Expected waiting Time

القوانين

1. $u = a/s$
2. $P_0 = (1 - u/1 - u^{N+1})$
3. $P_n = P_0 * u^n$
4. $P_N = P_0 * u^N$
5. $\lambda eff = a\ (1-P_N)$
6. $L_s = u\ (1-(N+1)\ u^N + Nu^{N+1}) / (1-u)\ (1-u^{N+1})$
7. $L_q = L_s - \lambda eff/S$
8. $W_s = L_s / \lambda eff$
9. $W_q = L_q / \lambda eff$

Ex: Consider m / m /1 : GD/4/∞ Queuing System , arrival rate is 8 Customers / hour and Service rate is 16 Customers / hour .

Find :

1. Probability that the System is empty
2. Probability that 3 Customer in the System
3. Probability that that the System is busy
4. effective arrival rate
5. Expected Number of Customer in the System
6. Expected Number of Customer in the Queue
7. Expected Time in the System
8. Expected Waiting Time

الحل :

a = 8 Customers / hour , N = 4

s = 16 Customers / hour

- **u = $8/16$ = 0.5**

1. **$P_0 = (1 - u/1 - u^{N+1})$**

   $= 1 - 0.5/1 - 0.5^{4+1} = 0.5/1 - 0.5^5 = 0.51$

2. **$P_3 = P_0 * u^3$**

   $= 0.51 * 0.5^3 = 0.063$

3. **$P_N = Po * u^n$**

   $= 0.51 * 0.5^4 = 0.03$

4. **$\lambda eff = a\,(1-P_N)$**

   $= 8\,(1-0.03) = 8 * 0.97 = 7.9$

5. **$L_S = u(1-(N+1)u^N+Nu^{n+1})/(1-u)(1-u^{N+1})$**

   $= 0.5(1-(4+1)0.5^4+4*0.5^{4+1})/(1-0.5)(1-0.5^{4+1})$

   $= 0.5(1-5*0.5^4+4*0.5^5)/0.5*(1-0.5^5)$

   $= 1.2$

6. **$L_q = L_s - \lambda eff/S$**

   $= 1.2 - 7.9/16 = 0.72$

7. **$W_s = L_s/\lambda eff$**

   $= 1.2/7.9 = 1.3$

8. **$W_q = L_q/\lambda eff$**

   $= 1.2/7.9 = 0.6$

3. نموذج صف الانتظار m/m/c : GD/∞/∞

في هذا النموذج فإن صف الانتظار يحتوي على c من محطات الخدمة ويتحمل النظام ∞ من الاشخاص . في حين معدل الوصول يتبع التوزيع بواسون وزمن الخدمة يتبع التوزيع الأسي .

الرموز المستخدمة

تستخدم نفس الرموز في النماذج السابقة وأن c تمثل عدد محطات الخدمة Number of Servers

القوانين

a = arrival rate

s = Serrvice rate

1. $u = a/s$
2. $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} u^n/n! + u^c / c!(1-u/c)\right]^{-1}$ **Probability the System is empty**
3. **Probability that the System is busy = 1 - P_0**
4. **P_n = Probability that n Customers in the System**

   $P_n = (u^n/c^{n-c} * c!) * P_0$
5. **L_s = Expected Number of Customers in the System**

   $= L_q + u$
6. **L_q = Expected Number of Custom ers in the Queue**

   $= (u^{c+1} /(c-1)!\ (c-u)^2) * P_0$
7. **W_s = Expected Time in the System**

   $= L_s / a$
8. **W_q = Expected waiting Time**

   $= L_q / a$

Ex: Consider m / m /3 : GD/∞/∞ Queuing System , arrival rate is 8 Customers / hour and Service rate is 16 Customers / hour .

<u>Find :</u>

1. **Probability that the System is empty**
2. **Probability that 3 Customer in the System**
3. **Expected Customer in the Queue**
4. **Expected Customer in the System**
5. **Expected Time in the System**

<u>الحل :</u>

a = 8 Customers / hour , c = 3

s = 16 Customers / hour

$u = 8/16 = 0.5$

1. $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} u^n/n! + u^c / c!(1-u/c)\right]^{-1}$

   $= \left[\sum_{n=0}^{3-1} 0.5^n/n! + 0.5^3 / 3!(1-0.5/3)\right]^{-1}$

$= \left[0.5^0/0! + 0.5^1/1! + 0.5^2/2! + 0.5^3 / 3!(1-0.5/3) \right]^{-1}$

$= \left[1 + 0.5 + 0.125 + 0.024 \right]^{-1} = \left[1.65 \right]^{-1} = 0.6$

2. $P_3 = (u^n/c^{n-c} * c!) * P_0$
   $= (0.5^3/3^{3-3} * 3!) * 0.6 = 0.0125$
3. $L_q = (u^{c+1} /(c-1)!\,(c-u)^2) * P_0$

   $= (0.5^{3+1} /(3-1)!\,(3-0.5)^2) * 0.6 = 0.003$
4. $L_s = L_q + u = 0.003 + 0.5 = 0.503$
5. $W_S = L_s / a = 0.503 / 8 = 0.06$

4. نموذج صف الانتظار m/m/c : GD/N/∞

هذا النموذج يشبه النموذج الثالث ألا أن النظام يتحمل N من الاشخاص في النظام .

القوانين

1. $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} u^n/n! + u^c(1-(u/c)^{N-C+1}) / c!(1-u/c) \right]^{-1}$
2. $P_n = \begin{cases} u^n/n! * P_0 & \ldots \text{ if } 0 \le n \le c \\ u^n/c!(c^{n-c}) * P_0 & \ldots \text{ if } 0 \le n \le N \end{cases}$
3. $\lambda eff = a\,(1-P_N)$
4. $L_s = L_q + \lambda eff / s$
5. $L_q = P_0 * u^{c+1} /(c-1)!\,(c-u)^2 \left[1-(4/c)^{N-C} - (N-c)(4/c)^{N-C}\,(1-4/c) \right]$

استخدام صفوف الانتظار في حل بعض المشاكل الإدارية

1. نموذج أقل كلفة كلية متوقعة Min. Total Cost

حسب هذا النموذج فإنه يتم اختيار النظام الذي يحقق أقل كلفة

a . Total Cost = Service Cost + Waiting Cost

$= c_1 * s + c_2 * L_S$

وينطبق هذا القانون على نموذج (1) ، نموذج (3) لصفوف الانتظار

b . Total Cost = Service Cost + Waiting Cost + Losses

$= c_1 * s + c_2 * L_S + c_3 * a * P_N$

وينطبق هذا القانون على نموذج (2) ، نموذج (4) لصفوف الانتظار

حيث أن :

c_1 : Service Cost للشخص الواحد

c_2 : Waiting Cost للشخص الواحد

c_3 : Losses لكلفة الخسارة

ولتطبيق هذين القانونين يتم اولاً دراسة المشكلة ومن ثم تحديد النموذج من نماذج صفوف الانتظار الذي يطبق على كل نظام ومن ثم اختيار القانون .

Ex: Two repairmen are being consiering for attending machines . The First repairman will be paid $3.00 and he can repair 5 machines per hour . The Second repairman will be paid $5.00 and he can repair 8 machines per hour . machines breakdown at rate = 4 per hour . if the Waiting Cost per machine per hour is $8 Find which repairman should be hired .

الحل :

First repairman

$a = 4 , s = 5 , c_1 = 3 , c_2 = 8$

وينطبق عليه النموذج الأول لصفوف الانتظار

Total Cost = $c_1 * s + c_2 * L_S$

$= u/1-u , u = a/s = 4/5$

$= 4/5 / 1-4/5 = 4/5 / 1/5 = 4$

- ❖ Total Cost for the first repairman = 3 * 5 + 8 * 4
  = 15 + 32
  = $47

Second repairman

$a = 4 , s = 8 , c_1 = 5 , c_2 = 8$

وينطبق عليه النموذج الاول لصفوف الانتظار

Total Cost = $c_1 * s + c_2 * L_S$

$L_S = u/1-u \quad , u = 4/8 = 0.5$

= 0.5/1-0.5 = 1

Total Cost = 5 * 8 + 8 * 1

= 40 + 8

= $48

❖ يتم التعاقد مع ال repairman الأول لأنه يحقق اقل كلفة

Ex: if The First repairman cannot repair more than 3 machines , Find which repairman should be hired .

Ex: A company would like to buy a System Tow system are available with the following specifications .

System 1

Service rate = 4 per hour

Service Cost = $50

= 5

Number of Servers = 2

System 2

Service rate = 8 per hour

Service Cost = $100

Number of Servers = 3

Jobs arrive at rate of 10 per hour and Waiting Cost is $100 .

Find which System to be bought by this Company .

2. ايجاد عدد محطات الخدمة المثلى Optimal number of Srvers

في بعض المشاكل يتطلب ايجاد عدد محطات الخدمة المثلى وذلك باستخدام القانون التالي

$$\text{Total Cost} = c_1 * c + c_2 * L_S$$

حيث أن :

c : عدد محطات الخدمة

c_1 : كلفة الخدمة

c_2 : كلفة الانتظار

L_S : العدد المتوقع في الانتظار

Ex: A company would like to hire a number of machines to perform jobs which arrive at rate of 8 jobs / hour . The waiting Cost is $25 . Each machine can perform 10 machines at Cost of $300 .

لحل هذا السؤال نتبع الخطوات التالية

1. نفرض عدد محطات الخدمة = 1

نطبق القانون $\text{Total Cost} = c_1 * c + c_2 * L_S$

حيث $L_S = u/1\text{-}u$

لأنه نظام m /m/1 : GD/∞/∞

ونجد الكلفة الكلية

2. **نفرض عدد محطات الخدمة = 2 وثم 3 وهكذا**

حيث نطبق نفس القانون اعلاه ولكن باستخدام قوانين m /m/c : GD/∞/∞

3. **نجد عدد محطات الخدمة التي تعطي أقل كلفة وهي العدد الأمثل المطلوب**

3. ايجاد معدل الخدمة المثلى Optimum Service rate

في بعض المشاكل يتطلب ايجاد معدل الخدمة المثلى s وذلك باستخدام القانون التالي

$$s = a\sqrt{c_2 * a / c_1}$$