نظرية المعلومات

أ. د. حاتم النجدي
الجامعة السورية الخاصة SPU

تقديم

- شهدت أواخر القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين ولادة الاتصالات الإلكترونية: البرق، الهاتف، الراديو، التلفزيون.
- وظائف جميع نظم الاتصالات هي نقل المعلومات من طرف إلى آخر. ومع ذلك لم يُنظر إليها على أنها أوجه مختلفة لظاهرة واحدة، بل اعتُبرت كينونات منفصلة وجرى تطويرها مستقلة بعضا عن بعض.
- في ثلاثينيات القرن العشرين، بدأ كلود شانون **Claude Shannon** بالتفكير بنظرية موحدة للاتصالات.

تقديم

في عام 1939، كتب شانون إلى أستاذه رسالة عن رؤيته لمنظومة اتصالات موحدة تعبِّر عن جميع أنواع الاتصالات قال فيها:

Off and on I have been working on an analysis of some of the fundamental properties of general systems for the transmission of intellegence, including telephony, radio, television, telegraphy, etc. Practically all systems of communication may be thrown into the following general form:

$$f_1(t) \rightarrow \boxed{T} \longrightarrow F(t) \longrightarrow \boxed{R} \rightarrow f_2(t)$$

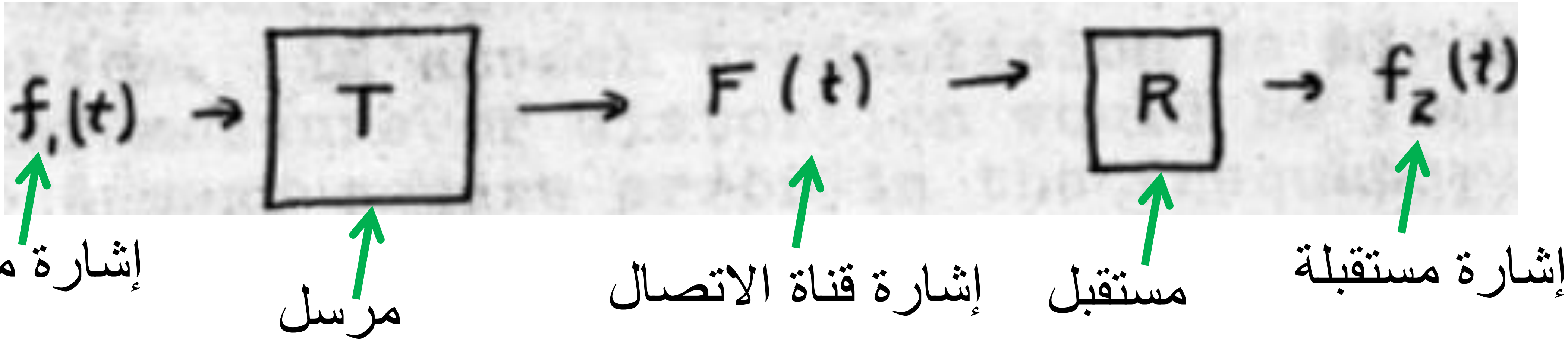
Excerpt of a letter from Shannon to Bush. Feb. 16, 1939. From Library of Congress

تقديم

في عام 1939، كتب شانون إلى أستاذه رسالة عن رؤيته لمنظومة اتصالات موحدة تعبِّر عن جميع أنواع الاتصالات قال فيها:

عملت من حين إلى آخر على تحليل بعض الخواص الأساسية لمنظومات عامة لنقل معلومات استخباراتية، ومنها الهاتف والراديو والتلفزيون والبرق وغيرها.

ومن الناحية العملية، يمكن تمثيل جميع منظومات الاتصال بالشكل العام التالي:



تقديم

في عام 1948، نشر شانون نظريته المعروفة بـ:

النظرية الرياضياتية للاتصالات

The Mathematical Theory of Communication

تُعتبر النظرية امتدادا وتوسعة لأفكار أولية سابقة لهاري نايكويست Harry Nyquist ورالف هارتلي Ralph Hartley تحدد العلاقة بين عرض قناة الاتصال المتوفرة واستطاعة الضجيج من ناحية، وبين معدل إرسال المعلومات على القناة، من ناحية أخرى.

تقديم

- كلود شانون (1916-2001) رياضياتي ومهندس كهرباء ومشفر أمريكي، وهو أبو نظرية المعلومات. دخل جامعة ميشيغان في عام 1932، وتخرج منها في عام 1936 حاملا إجازتين جامعيتين، واحدة في الهندسة الكهربائية، وأخرى في الرياضيات.
- عمل شانون في مجال كسر الشيفرة في الحرب العالمية الثانية، ولعل عمله ذاك هو الذي أنضج نظرية المعلومات لديه.
- في عام 1949، برهن على أن مشفر المرة الواحدة غير قابل للكسر.

تقديم

المعلومات Information

- المعلومات هي صلة الوصل بين الكائن الواعي والعالم الخارجي الذي يحيط به.
- إذا انعدمت المعلومات التي ترد إليك من خلال حواسك الخمس، انقطعْتَ عما حولك، ومن ثَمَّ عن الوجود.
- المعلومات هي أداة الوعي.
- المعلومات على صلة:

بالبيانات DATA التي تمثل قيما عددية لمختلف الأشياء عموما.

وبالمعرفة التي تعبِّر عن فهمنا للأشياء المادية والمعنوية.

تقديم

المعلومات Information

تأتينا المعلومات على شكل رسائل:

- سمعية: ومنها الكلام والموسيقى والأصوات القادمة من المحيط حولنا.
- مرئية: أي ضوئية، ومنها النصوص والصور والتلفزيون والطبيعة.
- كيميائية: وهي تلك التي نستشعرها بحاستي الذوق والشم.
- ميكانيكية: وهي تلك التي نستشعرها بحاسة اللمس، ومنها الضغط والحرارة.

تقديم

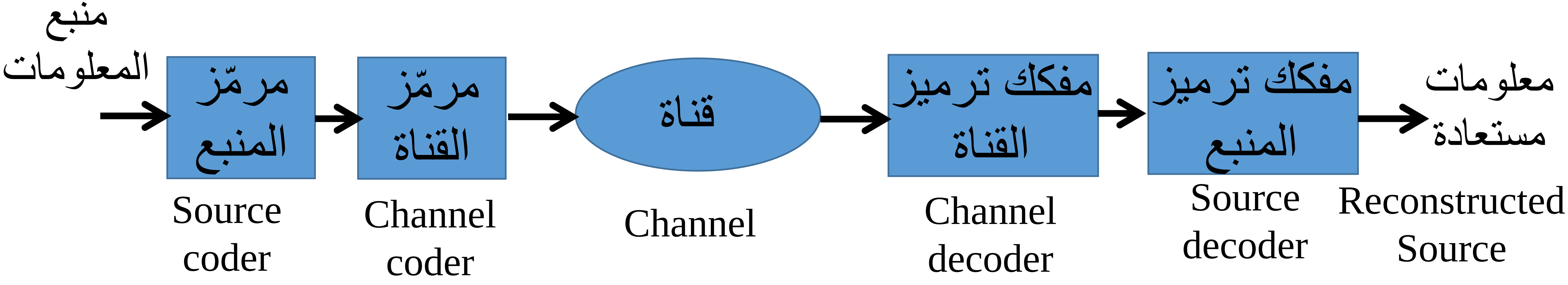
العمليات التي تُطبَّق على المعلومات

(لم يكن معظمها منظورا من قبل شانون في البداية):

- عمليات من أجل نقلها، وهذه تتضمن تأهيلها للنقل بوجود الضجيج والتشويش والتشويه، وحمايتها من الخطأ من أجل استعادتها على نحو صحيح، وحمايتها من السرقة والعبث بها.
- عمليات من أجل حفظها.
- عمليات من أجل استعمالها.
- عمليات من أجل تفسيرها، ومن أمثلة ذلك معالجة اللغات الطبيعية.

تقديم

نموذج نظام الاتصالات

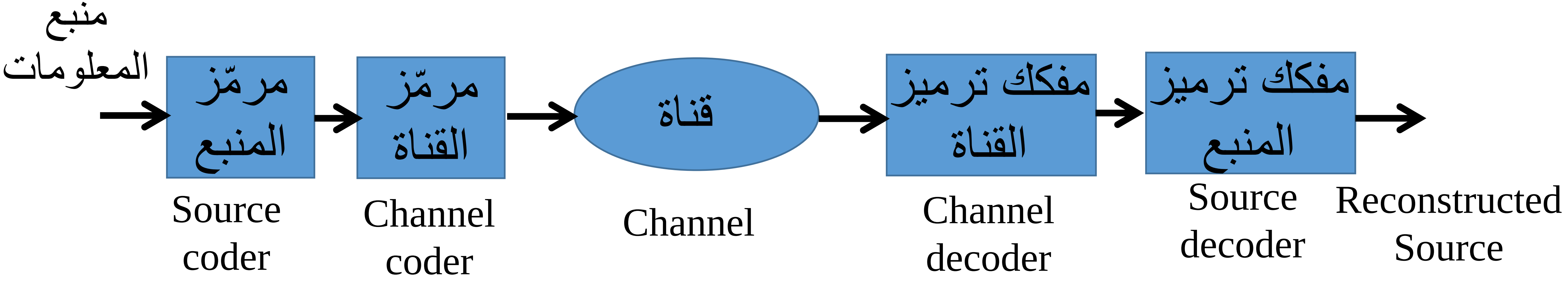


منبع المعلومات:

جهاز يعطي رموزا عشوائية من منبع ما. فمثلا، الكمرة الرقمية الموصولة مع حاسوب تعطي رموزا اثنانية (بتات) من الأبجدية {0, 1}.

تقديم

نموذج نظام الاتصالات

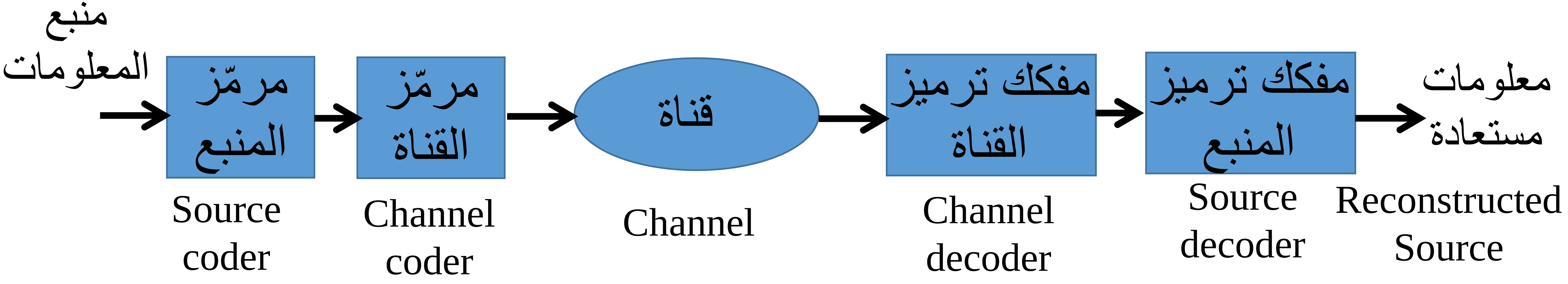


مرمّز المنبع:

يرمّز معلومات المنبع بطريقة أكثر إيجازا وذلك بحذف التكرار (الفائض redundancy) منها. والغرض من ذلك تخفيض معدل البيانات Data Rate التي سوف تُرسَل.

تقديم

نموذج نظام الاتصالات

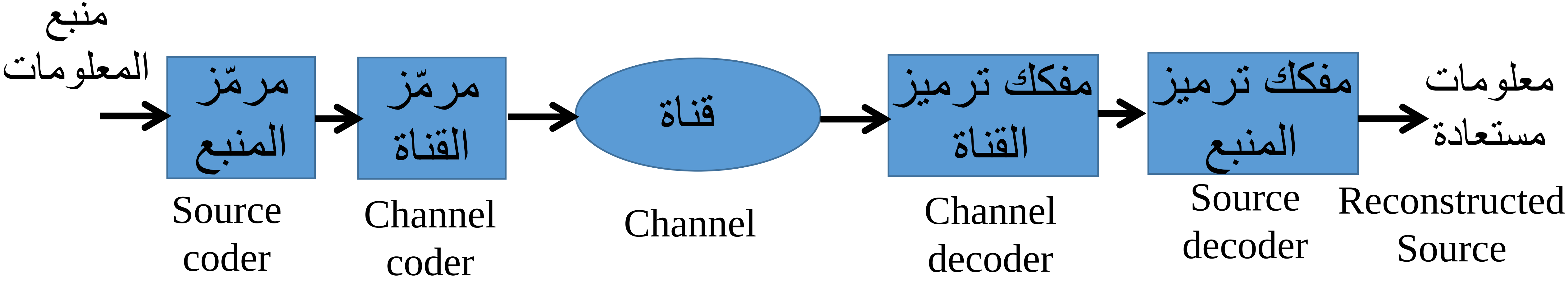


مرمّز القناة:

يُضيف مرمّز القناة حشوا (redundancy) إلى البيانات من أجل حماية البيانات المرسلة من أخطاء النقل.

تقديم

نموذج نظام الاتصالات

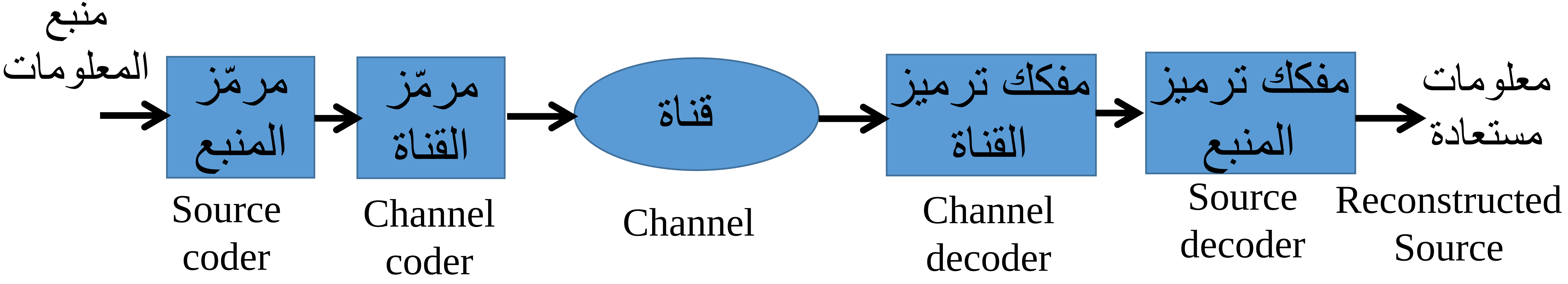


القناة:

هي وسط نقل البيانات من المرسل إلى المستقبل، ومن أمثلتها خط الهاتف والوصلة الراديوية والليف الضوئي .. إلخ. تشتمل القناة على مرسل للإشارة في طرف الإرسال، ومستقبل لها في طرف الاستقبال.

تقديم

نموذج نظام الاتصالات

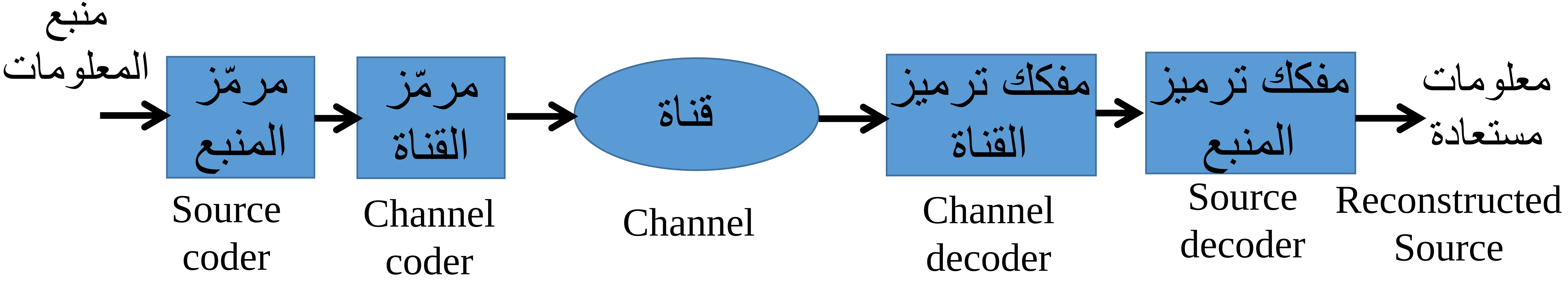


مفككا ترميز القناة والمنبع:

يقومان بالوظيفتين المعاكستين لوظيفتي مرمز القناة والمنبع بغية استخلاص بيانات المنبع في طرف الاستقبال.

تقديم

نموذج نظام الاتصالات



في حين أن مرمّز المنبع يسعى إلى تخفيض معدل البيانات، يقوم مرمّز القناة بزيادة ذلك المعدل.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

المتغير العشوائي random variable:

متغير قيمه الممكنة هي نواتج عملية أو ظاهرة عشوائية.

مثال:

ناتج رمي حجر النرد.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

ناتج رمي النقدة.

تغيرات الطقس.

أسواق المال.

الإشارة الكلامية.

الإشارة التلفزيونية.

النصوص اللغوية الطبيعية.

الضجيج.

...

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

الاحتمالprobability:

الاحتمال p هو قيمة تقع بين الصفر والواحد وتعبر عن إمكان حدوث حدث ما.

$$0 \leq p \leq 1$$

$p = 0$: الحدث مستحيل الحدوث.

$p = 1$: الحدث أكيد الحدوث.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

حجر النرد المتوازن: احتمال سقوط الحجر معطيا أحد أوجهه الستة:

$$p_{dice} = 1/6$$

النقدة المتوازنة: احتمال الطرة والنقش:

$$p_{coin} = 1/2$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

احتمال سحب أي ورقة من أوراق الشدة:

$$p_{card} = 1/52$$

احتمال أن يقع حجرا نرد على أي زوج من الأرقام 1 حتى 6:

$$p_{2dice} = 1/36$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

احتمال سحب صورة من أوراق الشدة:

يوجد في أوراق الشدة 12 صورة. لذا:

$$p_{picture} = 12/52 = 3/13 = 23.1\%$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

احتمال سحب ورقة ديناري من أوراق الشدة:

يوجد في أوراق الشدة 13 ورقة ديناري. لذا:

$$p_{diamond} = 13/52 = 25\%$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

احتمال ألا تكون ورقة الشدة المسحوبة ورقة ديناري:

يوجد في أوراق الشدة $39 = 13 - 52$ ورقة غير ديناري. لذا:

$$p_{not-diamond} = 39/52 = 75\%$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

مجموع الاحتمالات:

إذا اتخذ المتغير X القيم العشوائية $\{x_i, i = 1,2, \cdots n\}$ التي تحصل بالاحتمالات $\{p_i, i = 1,2, \cdots n\}$، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

مجموع احتمالات رمي النقدة:

$$p(x = \text{طرة}) + p(x = \text{نقش}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

مجموع احتمالات رمي النرد:

$$p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)$$
$$+p(x=5)+p(x=6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

الاحتمال المتمم:

إذا حصل الحدث A باحتمال يساوي $p(A)$، يُعرَّف الاحتمال المتمم، أو احتمال عدم حدوث الحدث بـ:

$$p(not\ A) = 1 - p(A)$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

مثال:

إذا كانت النقدة غير متزنة، يمكن أن تقع على أحد الوجهين (الطرة مثلا) بتواتر أكبر من تواتر سقوطها الوجه الآخر. ليكن $p(x = \text{طرة}) = 0.6$. حينئذ يكون:

$$p(x = \text{نقش}) = 1 - p(x = \text{طرة}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

احتمال ألا تكون ورقة الشدة المسحوبة ورقة ديناري يساوي:

1 ناقص احتمال أن تكون الورقة ديناري

يوجد في أوراق الشدة 13 ورقة ديناري. لذا:

$$p_{not-diamond} = 1 - 13/52 = 75\%$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

احتمال التقاطع أو الاحتمال المشترك intersection or joint probability **:**

إذا حصل الحدث A باحتمال يساوي $P(A)$، والحدث B باحتمال يساوي $P(B)$، يعطى احتمالهما المشترك بـ $P(A \cap B)$:

$$P(A,B) = P(A\ and\ B) = P(A \cap B)$$

وإذا كان الحدثان مستقلين عن بعضهما، كان:

$$P(A,B) = P(A)P(B)$$

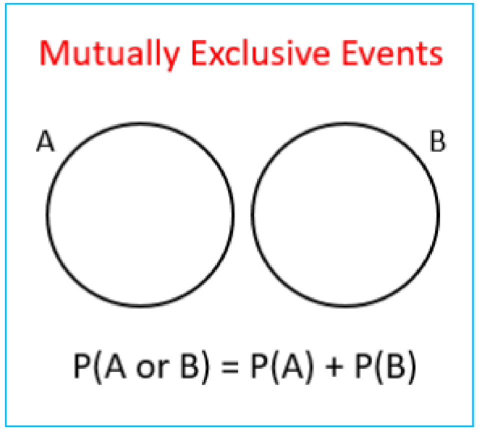
المتغيرات العشوائية والاحتمالات

مثال:

إذا رمينا نقدتين متزنتين، كان احتمال أن تسقط الاثنتان معا على الطرة:

$$P(A,B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات



احتمال الاختيار المتنافي Mutually exclusive:

إذا حصل الحدث A باحتمال يساوي $P(A)$، والحدث B باحتمال يساوي $P(B)$، يعطى احتمال الاختيار الخاص بهما بـ $P(A \cup B)$.

وإذا كان الحدثان متنافيان، أي لا يحصلان معا (كرمي النقدة الذي يعطي أحد الوجهين لا كليهما):

$$P(A\ xor\ B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

مثال:

احتمال الحصول على 1 أو 2 حين رمي حجر نرد:

$$P(1\ or\ 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

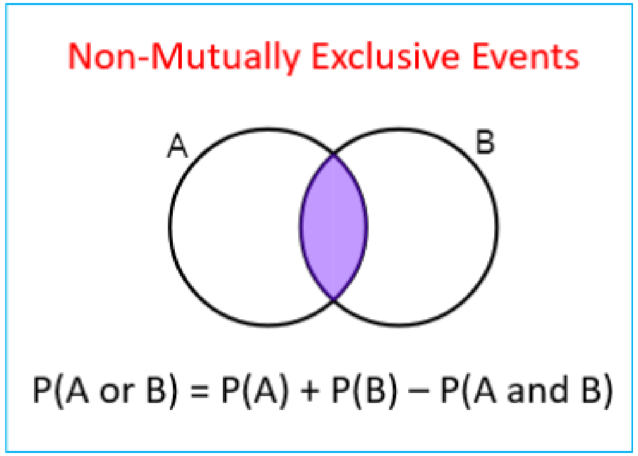
لا يحصل الحدثان في آن واحد.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

احتمال الاختيار المتنافي Not Mutually exclusive:

إذا كان الحدثان غير متنافيان، أي يمكن أن يحصل أحدهما أو كلاهما:

$$P(A\ or\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ and\ B)$$



المتغيرات العشوائية والاحتمالات

مثال:

حين سحب ورقة شدة، فإن احتمال كونها كبة أو صورة أو كليهما:

$$P(heart\ or\ face\ ) = \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{11}{26}$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

الاحتمال الشرطي Conditional probability:

الاحتمال الشرطي هو احتمال حدوث الحدث A بفرض حدوث حدث آخر B.

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

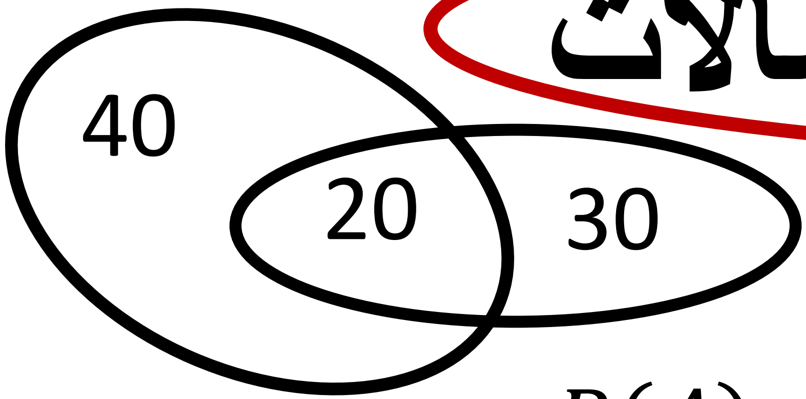
وإذا كان $P(B) = 0$ كان الاحتمال الشرطي غير معرف.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

مثال:

اشترى 100 شخص 100 سيارة. 40 منهم اشتروا سيارات مزودة بجهاز إنذار، و 30 شخصا اشتروا سيارات مزودة بكرسي أطفال، و 20 اشتروا سيارات مزودة بكل من جهاز الإنذار وكرسي الأطفال. إذا انتقينا شخصا انتقاء عشوائيا كان قد اشترى سيارة مع جهاز إنذار، فما احتمال أن تكون السيارة مزودة أيضا بكرسي أطفال؟

المتغيرات العشوائية والاحتمالات



احتمال كون السيارة المشتراة مزودة بجهاز إنذار: $P(A) = 0.4$.

احتمال كون السيارة المشتراة مزودة بكرسي أطفال: $P(B) = 0.3$.

احتمال كون السيارة المشتراة مزودة بجهاز إنذار وكرسي أطفال:

$P(A \cap B) = 0.2$.

احتمال أن يكون الشخص الذي اشترى سيارة مزودة بجهاز إنذار قد اشترى سيارة مزودة أيضا بكرسي أطفال:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}.$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

ملخص الاحتمالات:

A	$P(A) \in [0,1]$
not A	$P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$
A or B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{if A and B are mutually exclusive}$
A and B	$P(A \cap B) = P(A\|B)P(B) = P(B\|A)P(A)$ $P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad \text{if A and B are independent}$
A given B	$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\|A)P(A)}{P(B)}$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

مثال:

حين رمي نقدتين متزنتين، ما احتمال الحصول على طرة واحدة على الأكثر؟

الحل:

الحالات الممكنة الكلية لرمي النقدتين: طرة طرة، طرة نقش، نقش طرة، نقش نقش.

الحالات التي تحقق المطلوب هي جميع الحالات ما عدا حالة طرة طرة.

أي لدينا 3 حالات من 4 حالات تحقق المطلوب.

الجواب: 0.75.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

حين رمي نقدتين متزنتين، ما احتمال الحصول على طرة واحدة على الأقل؟

الجواب: 0.75.

حين رمي ثلاث نقدات متزنة، ما احتمال الحصول على طرتين على الأقل؟

الجواب: 0.5.

حين رمي حجر نرد متزن، ما احتمال الحصول على رقم أكبر من 4؟

الجواب: 1/3.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

حين رمي حجري نرد متزنين، ما احتمال الحصول على رقمين مجموعهما 9؟

الجواب: 1/9.

يوجد في صندوق كرتان حمراوان وكرتان زرقاوان. فإذا سحبت كرة وكانت حمراء، ما هو احتمال سحب كرة حمراء مرة أخرى.

الجواب: 1/3.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

أمثلة:

ما احتمال أن يولد الشخص في يوم محدد من السنة؟

الجواب: 1/365.

ما احتمال أن يكون أحدكم قد وُلِد في أي يوم من السنة؟

الجواب: 1.0.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

مثال:

ما احتمال أن يكون واحد منكم فقط قد وُلِد في مثل هذا اليوم من السنة؟

الجواب: ليكن،

$p = 1/365$: احتمال أن يولد الشخص في مثل هذا اليوم.

$1 - p$: احتمال ألا يكون الشخص قد وُلِد في مثل هذا اليوم.

n : عددكم.

P: احتمال أن يكون أحدكم قد ولد في مثل هذا اليوم.

P': احتمال ألا يكون أيا منكم قد وُلِد في مثل هذا اليوم.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

حينئذ:

$$P = 1 - P'$$

$$P' = (1-p)^{n-1}$$

لذا:

$$P = 1 - (1-p)^{n-1}$$

$$n = 1 - 839.3\ \log(1-P)$$

من أجل $P = 0.5$، نجد أن $n \approx 253$.

n	P
25	0.0637
39	0.1
82	0.2
253	0.5
334	0.6
840	0.9

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

مثال: لغز يوم الميلاد

يوجد في صف n طالبا. ما احتمال أن يكون بينهم طالبان على الأقل لهما نفس يوم الميلاد؟

الجواب:

$$1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2\times N}}$$

حيث $N = 365$.

https://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem#Calculating_the_probability

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

$\frac{1}{365} = p$: احتمال ولادة الشخص في يوم من أيام السنة.

n : عدد الأشخاص

P : احتمال أن يكون ثمة اثنين أو أكثر لهما نفس يوم الميلاد.

P' : احتمال أن يكون لجميع الأشخاص أيام ميلاد مختلفة.

$$P = 1 - P'$$

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

احتمال أن يكون للجميع أيام ميلاد مختلفة P' يكافئ ألا يكون للشخص الثاني نفس يوم ميلاد الشخص الأول، وألا يكون للشخص الثالث نفس يوم ميلاد الشخص الأول أو الثاني... وهكذا حتى الشخص رقم n الذي يجب أن يكون يوم ميلاده مختلفا عن أيام ميلاد جميع الآخرين.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

احتمال ألا يكون للشخص الثاني نفس يوم ميلاد الشخص الأول: $(1-p)$.

احتمال ألا يكون للشخص الثالث نفس يومي ميلاد الشخصين الأول والثاني هو:

$(1-2p)$.

احتمال ألا يكون للشخص الرابع نفس أيام ميلاد الأشخاص الأول والثاني والثالث هو:

$(1-3p)$.

احتمال ألا يكون للشخص رقم (n) نفس أيام ميلاد الـ $(n-1)$ شخصا الآخرين هو:

$(1-(n-1)p)$.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

ومنه يكون:

$$P' = (1-p)(1-2p)(1-3p)\cdots(1-(n-1)p)$$

$$P' = \prod_{i=1}^{n-1}(1-ip) < e^{-\frac{n(n-1)}{2N}}$$

حيث $N = 365$.

المتغيرات العشوائية والاحتمالات

n	$p(n)$
1	0.0%
5	2.7%
10	11.7%
20	41.1%
23	50.7%
30	70.6%
40	89.1%
50	97.0%
60	99.4%
70	99.9%
75	99.97%

ويكون احتمال وجود شخصين على الأقل لهما نفس يوم الميلاد ضمن n شخصا هو:

$$P \approx 1 - P' > 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2N}}$$

عندما $n = 23$، $P \approx 0.5$.

المعلومات الذاتية

المعلومات الذاتية والغموض
Self Information & Uncertainty

أمثلة:

- كتب شخص رسالة مساء الأحد تقول: غدا هو يوم الإثنين.
- كتب شخص رسالة الساعة الرابعة مساء من ليلة رأس السنة الميلادية تقول: بعد ساعة تحل العتمة.
- كتب شخص رسالة تقول: من المتوقع أن يكون يوم غد ماطرا.

المعلومات الذاتية

المعلومات الذاتية والغموض

- المعلومات الذاتية تنطوي على مفاجأة: أنت لا تعرف سلفا أن الحدث العشوائي سوف يحصل.
- تعتمد المعلومات الذاتية على احتمال حصول الحدث.
- إذا كان احتمال حصول الحدث يساوي 100%، فإن حصول الحدث لا يقدم أي معلومات.

المعلومات الذاتية

- كلما كان احتمال حصول الحدث أقل، انطوى ذلك على ريبة أكبر وغموض أشد في حصوله.
- كلما كان الغموض أشد في الحدث، انطوى ذلك على وجود معلومات ذاتية أكبر فيه.

المعلومات الذاتية

مثال:

- إذا رميت قطعة نقدية متزنة، ساوى احتمال سقوطها على أي من وجهيها، أي على الطرة أو النقش 0.5.
- قبل رؤية النقدة بعد سقوطها، تكون نتيجة الرمي غامضة.
- إذا اتفقت مع صديقك على أن النقش يعني أنك سوف تزوره، وأن الطرة تعني العكس، فإن نتيجة رمي النقدة هي معلومة تقدمها إلى صديقك.
- نظرا إلى أن عدد حالات النقدة يساوي 2، تحمل نتيجة رميها معلومتين فقط.

المعلومات الذاتية

مثال:

- **إذا رميت حجر نرد متزن، ساوى احتمال سقوطه على أي من أوجهه الستة سُدس واحد.**
- **إذا اتفقت مع صديقك على التراسل معه بواسطة حجر النرد، وأن لكل رقم معنى ما، أمكنك إرسال 6 معلومات مختلفة له.**

كلما ازداد عدد الحالات، قل احتمال كل حالة وازداد غموضها وازداد مقدار المعلومات التي تنطوي عليها.

المعلومات الذاتية

مقدار المعلومات الذاتية المحتواة في رسالة تُعلِم عن حدث x هو تابع ما $f(.)$ يعتمد على احتمال حصول الحدث فقط:

$$I(x) = f\{P(x)\}$$

المعلومات الذاتية

يحقق التابع $f(.)$ الفرضيتين التاليتين:

1- يجب أن يتناقص $I(x)$ مع ازدياد $P\{x\}$: فكلما كان الحدث أعلى احتمالا، أعطانا حصوله معلومات أقل. وعندما يكون احتمال حدوثه يساوي 1، فإن حدوثه لا يعطينا أي معلومة. أي:

$$P(x) = 1 \quad \rightarrow \quad I(x) = 0$$
$$P(x) < 1 \quad \rightarrow \quad I(x) > 0$$

عندما يكون معروفا أن الحدث سوف يحصل، لا يقدم حدوثه أي معلومة جديدة.

المعلومات الذاتية

2- إذا كان الحدثان x و y مستقلان عن بعضهما، كان:

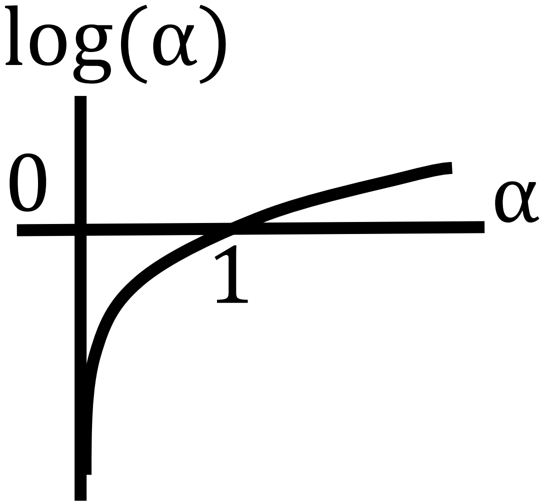
$$I(x,y)=I(x)+I(y)$$

من الطبيعي للمحتوى المعلوماتي لحدوث حدثين مستقلين أن يساوي مجموع المحتويين المعلومياتيين فيهما.

المعلومات الذاتية

التابع الوحيد الذي يحقق الفرضيتين السابقتين هو التابع اللوغارتمي:

$$I(x) = \log \frac{1}{P\{x\}} = -\log P\{x\}$$



استعار شانون هذه الصيغة من علم الميكانيك الإحصائي. ففي سبعينيات القرن التاسع عشر، وضع لودفيغ بولتسمان Ludwig Boltzmann هذه الصيغة للتعبير عن الغموض في حالة منظومة ميكانيكية مكونة من أجزاء مكروية، ومن أمثلة تلك المنظومة جزيئات الغاز.

المعلومات الذاتية

يقدّر $I(x)$:

بالبت حين أخذ 2 أساسا للوغاريتم،

بالواحدة الطبيعية أو النيبر حين أخذ e أساسا للوغاريتم،

بالعدد العشري حين أخذ 10 أساسا للوغاريتم.

المعلومات الذاتية

يُسمى $I(x)$ معلومات ذاتية أو مفاجَأة بعد وقوع الحدث.
وغموض قبل وقوع الحدث، ونرمز له بـ $h(x)$.

المعلومات الذاتية

- الغموض: الغموض والإبهام والشك في نتيجة الحدث قبل حدوثه.
- المعلومات الذاتية: هي المعلومات التي نحصل عليها بعد وقوع الحدث.

لا معنى للمعلومات قبل وقوع الحدث

المعلومات الذاتية

مثال:

إذا سحبنا ورقة من الشدة، فإن احتمال كونها أي ورقة من الـ 52 ورقة يساوي:

$$P\{x\} = \frac{1}{52}$$

ولذا تكون ريبتنا بالنتيجة قبل رؤيتها:

$$h(x) = -\log_2 \frac{1}{52} = \log_2 52 = 5.7 \quad bit$$

المعلومات الذاتية

مثال:

إذا سحبنا ورقة من الشدة، فإن احتمال كونها ورقة حمراء يساوي:

$$P\{x\} = \frac{1}{2}$$

ولذا يكون:

$$h(x) = -\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1 \quad bit$$

نقصت القيمة عن المثال السابق. لماذا؟

إذا سحبنا ورقة ديناري يصبح الغموض أو المعلومة الذاتية أو المفاجأة 2 بت.

المعلومات الذاتية

مثال:

حين رمي نقدة متزنة، يساوي احتمال النقش 1/2. وتساوي الغموض أو المعلومة الذاتية أو المفاجأة فيها:

$$h(x) = \log_2 \frac{1}{0.5} = \log_2 2 = 1 \quad bit$$

المعلومات الذاتية

مثال:

حين رمي حجر نرد متزن، يساوي احتمال الوقوع على الرقم ثلاثة 1/6. ويساوي الغموض أو المعلومة الذاتية أو المفاجأة فيها:

$$h(x) = -\log_2 \frac{1}{6} = 2.585 \quad bit$$

المعلومات الذاتية

مثال:

حين رمي حجري نرد متزنين، يساوي احتمال الوقوع على الرقمين ثلاثة و خمسة 1/36.
وتساوي الغموض أو المعلومة الذاتية أو المفاجأة فيها:

$$h(3\ and\ 5) = I(3\ and\ 5) = -\log_2 \frac{1}{36} = 5.17 \quad bit$$

لو نظرنا إلى الغموض في كل حجر على حدة وجدنا:

$$h(3\ and\ 5) = h(3) + h(5)$$
$$= -\log_2 \frac{1}{6} - \log_2 \frac{1}{6} = 2.585 \times 2 = 5.17 \quad bit$$

المعلومات الذاتية

أمثلة:

حين رمي حجري نرد متزنين، ما مقدار الغموض في أن يساوي مجموع رقمي الحجرين 7؟

الحالات التي يكون فيها المجموع 7: {1،6}، {6،1}، {2،5}، {5،2}، {3،4}، {4،3}

$$P(x) = \frac{6}{36}$$

$$h(x) = -\log_2 \frac{1}{6} = 2.585 \quad bit$$

المعلومات الذاتية

أمثلة:

ما هو مقدار المعلومات الذاتية التي تحملها 8 رموز مستقلة عن بعضها؟

$$P(x) = \frac{1}{8}$$

$$I(x) = -\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 8 = 3 \quad bit$$

ما هو مقدار المعلومات التي يحملها 2^M رمزا مستقلا؟

المعلومات الذاتية

أمثلة:

أرسلنا رسالة على قناة اتصال تسبب أخطاء نقل بمعدل 0.001. ما هو مقدار ريبتنا بكون الرسالة المستقبلة صحيحة؟

احتمال أن تكون الرسالة المستقبلة صحيحة يساوي 0.999

$$h(x) = -\log_2 0.999 \approx 0.0014 \quad bit$$

المعلومات الذاتية

أمثلة:

ما مقدار الغموض في هطول الثلج في فصل الصيف في دمشق إذا كان احتمال حصول هذا الحدث يساوي 1 من مليار؟

$$h(x) = -\log_2 10^{-9} = 9\log_2 10 \approx 30 \quad bit$$

المعلومات الذاتية

أمثلة:

ما مقدار الغموض في هطول الثلج في ليلة رأس السنة في موسكو إذا كان احتمال حصول هذا الحدث يساوي 99%؟

$$h(x) = -\log_2 0.99 = 0.0145 \quad bit$$

situation	probability $p = 1/2^{\#bits}$	surprisal $\#bits = \ln_2[1/p]$
one equals one	1	0 bits
wrong guess on a 4-choice question	3/4	$\ln_2[4/3]$ ~0.415 bits
correct guess on true-false question	1/2	$\ln_2[2]$ =1 bit
correct guess on a 4-choice question	1/4	$\ln_2[4]$ =2 bits
seven on a pair of dice	$6/6^2$ =1/6	$\ln_2[6]$ ~2.58 bits
snake-eyes on a pair of dice	$1/6^2$ =1/36	$\ln_2[36]$ ~5.17 bits
random character from the 8-bit ASCII set	1/256	$\ln_2[2^8]$ =8 bits =1 byte
N heads on a toss of N coins	$1/2^N$	$\ln_2[2^N]$ =N bits
harm from a smallpox vaccination	~1/1,000,000	~$\ln_2[10^6]$ ~19.9 bits
win the UK Jackpot lottery	1/13,983,816	~23.6 bits
RGB monitor choice of one pixel's color	$1/256^3$ ~5.9×10^{-8}	$\ln_2[2^{8*3}]$ =24 bits
gamma ray burst mass extinction event TODAY!	<$1/(10^9*365)$ ~2.7×10^{-12}	hopefully >38 bits
availability to reset 1 gigabyte of random access memory	$1/2^{8E9}$ ~$10^{-2.4E9}$	8×10^9 bits ~7.6×10^{-14} J/K
choices for 6×10^{23} Argon atoms in a 24.2L box at 295K	~$1/2^{1.61E25}$ ~$10^{-4.8E24}$	~1.61×10^{25} bits ~155 J/K
one equals two	0	∞ bits

الغموض المشروط

أمثلة:

- ما مقدار الغموض أو الريبة في إمكان هطول المطر في دمشق إذا علمنا أننا في شباط؟
- ما مقدار الغموض أو الريبة في حصول حادث سير إذا كانت سرعة السارة أكبر من 150 كم في الساعة؟
- ما مقدار الغموض أو الريبة في إمكان حصولك على جائزة اليانصيب الكبرى إذا لم تكن قد اشتريت ورقة يانصيب؟

الغموض المشروط

الغموض في حصول الحدث x إذا علمنا أن الحدث y قد حصل يعطى بـ:

$$h(x|y) = -\log P\{x|y\}$$

حيث:

$$P\{x|y\} = \frac{P\{x \cap y\}}{P\{y\}}$$

الغموض المشروط

مثال:

ما مقدار الغموض في سحب بنت الكبة إذا علمنا أن الورقة المسحوبة هي ورقة كبة؟

طريقة حل أولى:

الورقة المسحوبة هي ورقة كبة. وبنت الكبة هي ورقة من 13 ورقة:

لذا:

$$h(x) = -\log_2 \frac{1}{13} = 3.7\ bit$$

الغموض المشروط

طريقة حل ثانية:

$$P\{queen|heart\} = \frac{P\{queen \cap heart\}}{P\{heart\}}$$

$$h(queen|heart) = -\log_2 \frac{P\{queen \cap heart\}}{P\{heart\}} = -\log_2 \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = -\log_2 \frac{4}{52}$$

$$= 3.7 \ \ bit$$

قلصت معرفة أن الورقة المسحوبة هي ورقة كبة الغموض في سحب بنت الكبة

الغموض المشروط

مثال:

احتمال ظهور حرف الألف في النصوص العربية يساوي: 15% تقريبا.

احتمال ظهور حرف اللام في النصوص العربية يساوي: 9% تقريبا.

ما مقدار الغموض في كون الحرف التالي هو لام إذا كان الحرف السابق هو ألف؟

$$P\{\text{لام}|\text{ألف}\} = \frac{P\{\text{لام} \cap \text{ألف}\}}{P\{\text{لام}\}}$$

الحرف	النسبة المئوية	الحرف	النسبة المئوية	الحرف	النسبة المئوية
الفراغ	18.78	ب	2.83	ص	0.81
ا	15.45	ع	2.61	ط	0.8
ل	9.22	ف	2.28	خ	0.74
ي	6.5	د	2.19	ش	0.72
ه	5.13	ق	1.78	ض	0.61
م	4.78	س	1.75	ث	0.5
و	4.51	ك	1.72	ز	0.47
ن	4.41	ح	1.6	غ	0.34
ت	3.81	ج	1.15	ظ	0.237
ر	3.37	ذ	0.884		

الغموض المشروط

لا تظهر الأحرف في اللغات الطبيعية، ومنها اللغة العربية، بنفس الاحتمال. إلا أننا يمكن أن نعتبر أن احتمال ظهور كل من الألف واللام (كل على حدة) يساوي وسطي احتمالي ظهورهما الفعليين تقريبا. أي:

$$P\{\text{ألف} \cap \text{لام}\} \approx \frac{0.15+0.9}{2} = 0.12$$

$$h(\text{لام}|\text{ألف}) \approx -\log_2 \frac{P\{\text{ألف} \cap \text{لام}\}}{P\{\text{ألف}\}} = -\log_2 \frac{0.12}{0.15} = 0.32\ bit$$

غموض منخفض!

الغموض المشروط

تقريب
خشن

مثال:

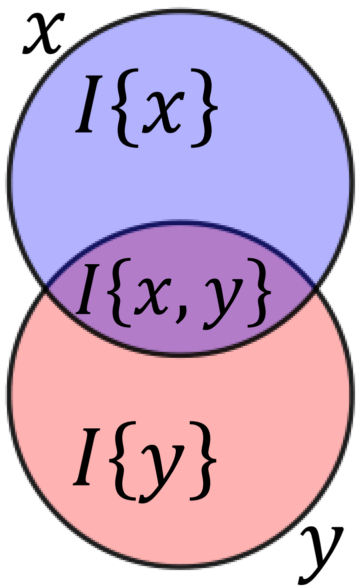
احتمال ظهور حرف الألف في النصوص العربية يساوي: 15% تقريبا.
احتمال ظهور حرف الذال في النصوص العربية يساوي: 0.88% تقريبا.
ما مقدار الغموض في كون الحرف التالي هو ذال إذا كان الحرف السابق هو ألف؟

$$P\{\text{ألف} \cap \text{ذال}\} \approx \frac{0.0088 + 0.15}{2} \approx 0.08$$

$$h(\text{ذال}|\text{ألف}) \approx -\log_2 \frac{P\{\text{ألف} \cap \text{لال}\}}{P\{\text{ألف}\}} = -\log_2 \frac{0.08}{0.15} \approx 0.9\ bit$$

ازداد الغموض.

المعلومات المشتركة



- المعلومات المشتركة بين متغيرين عشوائيين هي مقياس لاعتماد كل منهما على الآخر. أي إنها تمثل مقدار المعلومات التي نحصل عليها عن متغير عشوائي من خلال معرفتنا بالمتغير الآخر.
- تعبر المعلومات المشتركة عن انخفاض الغموض في حدث ما نتيجة للمعلومات المشتركة التي يوفرها حدث آخر.

المعلومات المشتركة

مثال:

- في غوغل مثلا، تُستعمل المعلومات المشتركة بين النصوص ومضامينها لإعطاء أفضل نتائج البحث.
- حين رمي حجر النرد، يمكن اعتبار رمي الحجر حدثا أولا، وكون النتيجة مفردة حدثا ثانيا. ومن الواضح أن ثمة معلومات مشتركة بين الحدثين.
- من صورة رنين مغنطيسي وصورة إيكو يمكن تشخيص مرض.

المعلومات المشتركة

المعلومات النقطية المشتركة $PMI(x,y)$: مقدار المعلومات التي نحصل عليها عن متغير عشوائي x من خلال معرفتنا بمتغير آخر y في حدث منفرد:

$$PMI(x,y) = \log\frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}$$

$$= \log\frac{P(x|y)}{P(x)} = \log\frac{P(y|x)}{P(y)}$$

المعلومات المشتركة

$$
\begin{aligned}
PMI(x,y) &= h(x) + h(y) - h(x,y) \\
&= h(x) - h(x|y) \\
&= h(y) - h(y|x)
\end{aligned}
$$

المعلومات المشتركة

مثال:

من مثالي بنت الكبة السابقين، ما المعلومات المشتركة بين سحب بنت كبة وكون الورقة المسحوبة ورقة كبة تساوي :

احتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنت كبة يساوي $P(x) = 1/52$

احتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنت يساوي $P(x) = 1/13$

احتمال أن تكون الورقة المسحوبة كبة يساوي $P(x) = 1/4$

المعلومات المشتركة

$$PMI(x,y) = h(x) - h(x|y)$$

$$h(x) = -\log\frac{1}{52} = 5.7\ bit$$

$$h(x|y) = -\log_2\frac{P\{x,y\}}{P\{y\}} = -\log_2\frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = -\log_2\frac{4}{52} = 3.7\ bit$$

$$PMI(x,y) = 5.7 - 3.7 = 2\ bit$$

المعلومات المشتركة

إذا كان الحدثان x و y مستقلان عن بعضهما:

$$h(x,y) = h(x) + h(y)$$

ولذا:

$$PMI(x,y) = h(x) + h(y) - h(x) - h(y)$$
$$= 0$$

المعلومات المشتركة

مثال:

ما مقدار المعلومات المشتركة بين وقوع حجر نرد متزن في رمية أولى على 2 وفي رمية ثانية على 2 أيضا؟

نظرا إلى أن نتائج رمي حجر النرد مستقلة بعضا عن بعض، تساوي المعلومات المشتركة بين نتائج الرميات المتتالية صفرا.

المعلومات المشتركة

مثال:

في نص عربي مكون من مليون كلمة، ظهر الكلمة ‘في’ 276 مرة، وظهرت الكلمة السنة 136 مرة. وظهرت الكلمتان معا 96 مرة. ما مقدار المعلومات المشتركة بين ظهور الكلمتين؟

احتمال ظهور ‘في’: $$P(x) = \frac{276}{1000000}$$

احتمال ظهور ‘السنة’: $$P(y) = \frac{136}{1000000}$$

احتمال تقاطع الظهور: $$P(x \cap y) = \frac{96}{1000000}$$

المعلومات المشتركة

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)} = \frac{96}{136}$$

$$P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)} = \frac{96}{276}$$

$$h(x) = -\log P(x) = -\log 276 + 19.93$$

$$h(y) = -\log P(y) = -\log 136 + 19.93$$

$$h(x|y) = -\log P(x|y) = -\log \frac{96}{136}$$

$$h(y|x) = -\log P(y|x) = -\log \frac{96}{276}$$

المعلومات المشتركة

$$PMI(x,y) = h(x) - h(x|y)$$

$$= -\log 276 + 19.93 + \log \frac{96}{136}$$

$$= 19.93 + \log \frac{96}{136 \times 276} = 11.32 \quad bit$$

المعلومات المشتركة

مثال:

في المثال السابق، لو ظهرت الكلمتان مع مرتين فقط، ما مقدار المعلومات المشتركة حينئذ؟

نبدل العدد 96 في الحل السابق بالعدد 2:

$$PMI(x,y) = h(x) - h(x|y)$$

$$= -\log 276 + 19.93 + \log \frac{2}{136}$$

$$= 19.93 + \log \frac{2}{136 \times 276} = 5.7 \quad bit$$

ملخص

المعلومات الذاتية $I(x)$:

كمية المعلومات التي يمكن أن يحملها أو يُعبّر عنها المتغير x. كلما كان المتغير العشوائي غامضا خبّأ معلومات أكثر يمكن أن تتجلي حين حدوثه. وكلما كان أكثر جلاء انطوى على معلومات أقل. والمتغير الذي لا يتخذ سوى قيمة واحدة لا يعبر عن أي معلومة جديدة.

$$I(x) = \log \frac{1}{P\{x\}} = -\log P\{x\}$$

ملخص

المعلومات النقطية المشتركة $PMI(x,y)$:

مقدار المعلومات التي نحصل عليها عن متغير عشوائي x من خلال معرفتنا بمتغير آخر y في حدث منفرد:

$$PMI(x,y) = h(x) - h(x|y)$$
$$PMI(x,y) = h(y) - h(y|x)$$
$$PMI(x,y) = h(x) + h(y) - h(x,y)$$
$$h\{x,y\} = h(x|y) + h(y)$$
$$h\{x,y\} = h(y|x) + h(x)$$

ملخص

الغموض المشروط:

هو الغموض في حصول حدث x إذا علمنا أن حدثا y قد حصل.

الإنتروبي

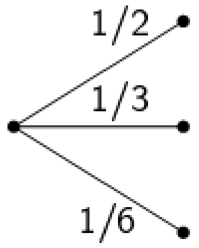
مجموعة من n حدثا احتمالات حصولها $p_1, p_2, \cdots p_n$. ما مقدار الحرية في اختيار أحدها، أو ما مقدار ارتيابنا في الحصول على النتيجة؟

مثال: افترض أن لدينا 3 أحداث،

الحدث الأول هو سحب ورقة حمراء من الشدة: $p_1 = \frac{1}{2}$.

الحدث الثاني هو سحب ورقة بستوني من الشدة: $p_2 = \frac{1}{4}$.

الحدث الثالث هو سحب ورقة ديناري من الشدة: $p_3 = \frac{1}{4}$.



الإنتروبي

مثال: افترض أن لدينا 3 أحداث،

- الحدث الأول x_1 هو سحب ورقة حمراء من الشدة: $p_1 = \frac{1}{2}$.
- الحدث الثاني x_2 هو سحب ورقة بستوني من شدة تحتوي على أوراق بستوني وديناري وكبة فقط: $p_2 = \frac{1}{3}$.
- الحدث الثالث x_3 هو وقوع حجر نرد على الوجه 5: $p_3 = \frac{1}{6}$.

الإنتروبي

الغموض في الحدث الأول:

$$P(x_1) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad h(x_1) = \log 2 = 1\, bit$$

الغموض في الحدث الثاني:

$$P(x_2) = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad h(x_2) = \log 3 = 1.585\, bit$$

الغموض في الحدث الثالث:

$$P(x_3) = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad h(x_3) = \log 6 = 2.585\, bit$$

الإنتروبي

القيمة **الوسطى** للغموض في اختيار الأحداث الثلاثة هي مجموع غموضاتها مثقلة باحتمالاتها:

$$H(x_1, x_2, x_3) = p(x_1)h(x_1) + p(x_2)h(x_2) + p(x_3)h(x_3)$$
$$= \frac{1}{2}h(x_1) + \frac{1}{3}h(x_2) + \frac{1}{6}h(x_3)$$
$$H(X) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1.585 + \frac{1}{6} \times 2.585 = 1.46\ bit$$

الإنتروبي

الإنتروبي:

هو القيمة الوسطى للغموضات في قيم المتغير العشوائي.

نسمي $H(X)$ إنتروبي المتغير العشوائي X ذي القيم $\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ التي تحصل باحتمالات $p_i = P\{X = x_i\}$. وهو يمثل الارتياب الوسطى في نتائج حصول الحدث $\{X = x_i \quad , \quad i = 1,2 \cdots n\}$.

الإنتروبي

القيمة الوسطى لمجموعة من المتغيرات $\alpha, \beta, \cdots \omega$:

$$\mu = \alpha\, p(\alpha) + \beta\, p(\beta) + \cdots + \omega\, p(\omega)$$

وعموما، إذا اتخذ المتغير X قيما مختلفة $\{x_i \quad , \quad i = 1,2 \cdots n\}$ باحتمالات $\{P = p_i \quad , \quad i = 1,2 \cdots n\}$، فإن القيمة الوسطى لـ X تعطى بـ:

$$\mu = \sum_x x\, P(x)$$

الإنتروبي

لذا يُعطى الإنتروبي بـ:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log p(x_i)$$

الإنتروبي

خصاص الإنتروبي:

- يمكن لـ n أن تكون لانهائية.
- يعتمد $H(X)$ على التوزع الاحتمالي للمتغير X، وليس على قيمه الفعلية.
- تحصل القيمة العظمى لـ $H(X)$ عندما يكون توزع X الإحصائي متجانسا، أي عندما يكون:

$$p_i = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in \{1,n\}$$

- وحينئذ يكون:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = \log n$$

الإنتروبي

مثال:

يتخذ قلاب إلكتروني flip flop إحدى وضعيتين: 0 أو 1. فإذا كان احتمال اتخاذه لكل من الوضعيتين يساوي $\frac{1}{2}$، أي $\frac{1}{2} = p_1 = p_2$، ساوى إنتروبي القلاب:

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1\ \mathrm{bit}$$

يُعبِّر الإنتروبي هنا عن كمية المعلومات التي يمكن للقلاب أن يخزنها، وهي بت واحدة.

الإنتروبي

مثال:

لنفترض أن القلاب لا يتخذ الوضعيتين 0 و 1 باحتمال متساو. على سبيل المثال، ليكن:

$$p_1 = 0.7, \qquad p_2 = 0.3$$

حينئذ يكون:

$$\begin{aligned} H &= -0.7 \log 0.7 - 0.3 \log 0.3 \\ &= 0.1549 + 0.5229 = 0.6778 \quad bit \end{aligned}$$

أي إن القلاب لا يخزن في تلك الحالة بتا كاملة.

الإنتروبي

ومن الواضح أنه عندما يتخذ القلاب وضعية واحدة فقط، أي عندما يكون:

$$p_1 = 1, \qquad p_2 \quad = 0$$

فإنه لا يخزن أي شيء:

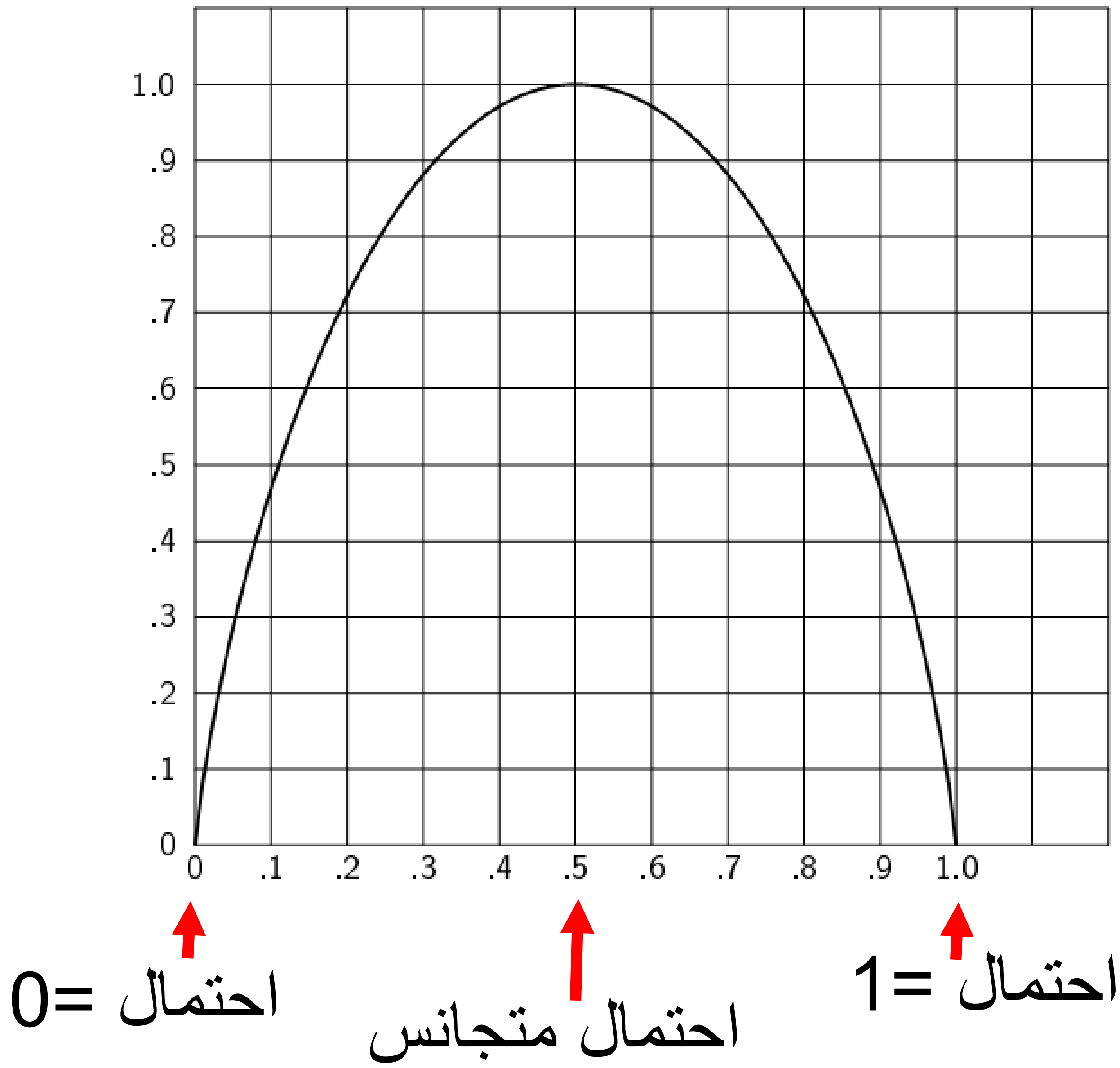
$$H = -1\log 1 - 0\log 0 = 0 - 0 = 0 \quad bit$$

الإنتروبي

عندما يتخذ القلاب الوضعيتين بنفس الاحتمال يخزن المقدار الأعظمي من المعلومات، وهو يساوي هنا 1 بت.

وعندما تكون حالة القلاب أكيدة، أي إن احتمالها يساوي 1 أو 0، تكون قيمة الإنتروبي صفرا.

الاحتمال الصفري يمثل حالة أكيدة، وهي أن الحدث لن يقع حتما.



الإنتروبي

عموما، يعبِّر الإنتروبي عن:

- كمية المعلومات اللازمة للتعبير عن حالة المنظومة العشوائية.

نص مشفر

- كمية المعلومات التي يمكن للمنظومة العشوائية أن تحملها.

أحرف اللغة الطبيعية

- مقدار عدم الانتظام في المنظومة العشوائية.
- الارتياب في حالة المنظومة العشوائية.
- مقدار تدهور انتظام المنظومة العشوائية.

المنظومات الفيزيائية

الإنتروبي

وفيما يخص المعلومات، نقصر اهتمامنا على:

- كمية المعلومات اللازمة للتعبير عن حالة المنظومة العشوائية.
- كمية المعلومات التي يمكن للمنظومة العشوائية أن تحملها أو أن تعبِّر عنها.

الإنتروبي

مثال:

تُستعمل الرموز ♠، ♥، ♣ لنقل معلومات بين نقطتين. وتُستعمل هذه الرموز في عملية التراسل بمعدلات تساوي: 78%، 0.12، 0.1%. ما هي كمية المعلومات التي يمكن إرسالها بواسطتها مقدرة بالبت للرمز الواحد؟

$$H = -0.78 \log 0.78 - 0.12 \log 0.12 - 0.1 \log 0.1$$
$$= 0.28 + 0.367 + 0.332 = 0.98 \quad bit/symbol$$

الإنتروبي

لو كان استعمال رموز المثال السابق موزعا بالتساوي، لكان مقدار المعلومات التي يحملها الرمز الواحد:

$$H = -3 \times \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} = 1.585\ bit$$

هذا يعني أنه من أجل استغلال طاقة الرموز على حمل المعلومات استغلالا كاملا، يجب استعمالها باحتمالات متساوية.

الإنتروبي

مثال:

أربع آلات في معمل إنتاجايتها على التتالي هي: 40%، 30% ، 20%، 10%. ونرغب في التعبير عن هذه الإنتاجية بعدد من البتات التي تُخزن في ذاكرة. ما هو حجم الذاكرة اللازمة لخزن البيانات المعبرة عن حالة الآلات الإنتاجية؟

$$H = -0.4\log 0.4 - 0.3\log 0.3 - 0.2\log 0.2 - 0.1\log 0.1$$
$$= 0.53 + 0.52 + 0.46 + 0.33 = 1.84 \quad bit$$

لو كانت الإنتاجية متساوية لاحتجنا إلى:

$$H = -\frac{1}{4} \times 4\log\frac{1}{4} = 2 \quad bit$$

الإنتروبي

كمية المعلومات

إذا اتخذت المنظومة L حالة مختلفة متساوية الاحتمال ($p = \frac{1}{L}$)، فإن الإنتروبي الخاص بها يعطى بـ:

$$H = \log L$$

وإذا تألفت المنظومة من n متغيرا اثنانيا: $X = x_1, x_2, \cdots x_n$ حيث $x_i \in \{0,1\}$، اتخذت 2^n حالة مختلفة. وإذا ظهرت جميع تلك الحالات باحتمالات متساوية، نقول أن المنظومة يمكن أن تحمل كمية من المعلومات تساوي:

$$I = n \;\; bit$$

الإنتروبي

الإنتروبي المشترك joint entropy

الإنتروبي المشترك بين مجموعة من المتغيرات العشوائية هو الارتياب الوسطي المقترن بحصولها مجتمعة.

الإنتروبي

الإنتروبي المشترك

ليكن $X\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ و $Y\{y_1, y_2, \cdots y_m\}$ متغيران عشوائيان يتخذان قيما بالاحتمالات التالية:

$$P\{X = x_i\} = p(x_i)$$

$$P\{Y = y_j\} = p(y_j)$$

$$P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = p(x_i, y_j)$$

الإنتروبي

الإنتروبي المشترك

يُعرَّف الإنتروبي المشترك لهما بـ:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log p(x_i, y_j)$$

الإنتروبي

الإنتروبي المشترك

خصائص الإنتروبي المشترك:

- **غير سالب، أي موجب أو يساوي الصفر:** $H(X,Y) \geq 0$
- **أكبر من أكبر إنتروبي في المجموعة أو يساويه:**
- $H(X,Y) \geq max[H(X),H(Y)]$
- **أصغر من مجموع الإنتروبيين الإفراديين أو يساويهما:**

$$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$$

الإنتروبي

الإنتروبي الشرطي conditional entropy

الإنتروبي الشرطي:

يمثل كمية المعلومات اللازمة لوصف نتيجة متحول عشوائي حين معرفة قيمة متحول عشوائي آخر.

الإنتروبي

الإنتروبي الشرطي

ويُعرَّف الإنتروبي الشرطي للمتغيرين (X,Y) بمتوسط قيم الإنتروبي الشرطي لأحد المتغيرين عند قيم المتغير الآخر:

$$H(Y|X) = \sum_{j=1}^{m} p(x_j) H\left(Y|X = x_j\right)$$

حيث:

$$H\left(Y|X = x_j\right) = -\sum_{i=1}^{n} P\{Y = y_i|X = x_j\} \log P\{Y = y_i|X = x_j\}$$

الإنتروبي

الإنتروبي الشرطي

وبذلك يكون:

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log P\{X = x_i | Y = y_j\}$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log P\{Y = y_i | X = x_j\}$$

الإنتروبي

الإنتروبي الشرطي

ويمكن البرهان على ما يلي:

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$$
$$H(Y|X) = H(X|Y) - H(X) + H(Y)$$

$$H(Y|X) \leq H(Y)$$

وبسبب التناظر، يمكن تبديل كل X بـ Y، وكل Y بـ X.

الإنتروبي

المعلومات المشتركة
mutual information

المعلومات المشتركة:

تعبِّر المعلومات المشتركة بين متحولين عشوائيين عن الاعتماد المتبادل بينهما، أو عن مقدار اعتماد كل منهما على الآخر. وهي تمثل مقدار انخفاض إنتروبي X نتيجة لمعرفة Y، والعكس صحيح.

الإنتروبي

المعلومات المشتركة

تعطى المعلومات المشتركة بـ:

$$I(X,Y) = \sum_{X} \sum_{Y} P(x,y) \log \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}$$

الإنتروبي

الإنتروبي المشترك والإنتروبي الشرطي والمعلومات المشتركة

يمكن البرهان على العلاقات التالية التي تربط بين الإنتروبي المشترك والإنتروبي الشرطي والمعلومات المشتركة:

$$I(X,Y) \geq 0$$

$$\begin{aligned}
I(X,Y) &= H(X) - H(X|Y) \\
&= H(Y) - H(Y|X) \\
&= H(Y) + H(X|Y) \\
&= H(X) + H(Y|X) \\
&= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \\
&= H(X,Y) - H(X|Y) - H(Y|X)
\end{aligned}$$

الإنتروبي

الإنتروبي المشترك والإنتروبي الشرطي والمعلومات المشتركة الوسطية

إذا كان المتغيران العشوائيان X,Y مستقلين:

$$H(X|Y) = H(X)$$
$$I(X,Y) = 0$$
$$H(X,Y) = H(X)+H(Y)$$

المعلومات المشتركة

مثال:

صندوق فيه كرتان حمراوان وثلاث كرات خضراء. ما مقدار المعلومات المشتركة بين سحبين متتاليين؟ لا تُعاد الكرة التي تُسحب في المرة الأولى إلى الصندوق.

دع x يمثل السحب الأول، و y يمثل الثاني. و r يمثل أحمر، و g يمثل أخضر.

المعلومات المشتركة

$$P(X = r) = \frac{2}{5} \qquad\qquad P(X = g) = \frac{3}{5}$$

$$P(Y = r) = P(X = r)\,P(Y = r|X = r)$$
$$+P(X = g)P(Y = r|X = g)$$
$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2}{5}$$

المعلومات المشتركة

$$P(Y=g)=P(X=r)\,P(Y=g|X=r)$$
$$+P(X=g)P(Y=g|x=g)$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{5}$$

المعلومات المشتركة

$$P(X = r\, , Y = r) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(x = r\, , y = g) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(x = g\, , y = r) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$P(x = g\, , y = g) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

المعلومات المشتركة

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

$$H(X) = H(x = r) + H(x = g)$$

$$H(X) = -\frac{2}{5}\log\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\log\frac{3}{5} = 0.53 + 0.44 = 0.97\ \ bit$$

$$H(Y) = H(y = r) + H(y = g)$$

$$H(Y) = -\frac{2}{5}\log\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\log\frac{3}{5} = 0.53 + 0.44 = 0.97\ \ bit$$

المعلومات المشتركة

$$H(X,Y) = H(X=r,Y=r) + H(X=r,Y=g)$$

$$+H(X=g,Y=r)+H(X=g,Y=g)$$

$$H(X,Y) = -\frac{1}{10}\log\frac{1}{10} - \frac{3}{10}\log\frac{3}{10} - \frac{3}{10}\log\frac{3}{10} - \frac{3}{10}\log\frac{3}{10}$$

$$= 0.332 + 3 \times 0.52 = 1.892\ bit$$

المعلومات المشتركة

المعلومات المشتركة بين السحبين الأول والثاني:

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$
$$I(X,Y) = 0.97 \times 2 - 1.892 = 0.048 \quad bit$$

أي إن السحب الأول يقلص الارتياب في السحب الثاني بمقدار 0.048 بت.

الإنتروبي

مثال:

يوجد في سلة عدد **كبير جدا** من قصاصات الورق التي كُتب على كل منها واحد من الأرقام من 1 حتى 6. سحب عمر أربع قصاصات ورتبها جنبا إلى جنب وأخفاها عن سلمى. طبعا يمكن للقصاصات الأربعة أن تحمل أي تشكيلة من أربعة أرقام: 5266، أو 3333، مثلا. وعلى سلمى أن تحزر تشكيلة الأرقام التي أخفاها عمر. وبعد تقديم سلمى لمقترحها، يُعلمه عمر بعدد المنازل المتطابقة دون تحديدها.

الإنتروبي

1. ما مقدار الارتياب الوسطي في التشكيلة التي اختارها عمر؟
2. أول اقتراح تقدمه سلمى لتشكيلة الأرقام يتضمن أرقاما متماثلة من قبيل 2222. ماذا يصبح مقدار الارتياب الوسطي في التشكيلة التي اختارها عمر بعد إجابته على مقترح سلمى؟

الإنتروبي

1. من الواضح أن التشكيلة التي يحصل عليها عمر هي واحدة من $6^4 = 1296$ تشكيلة ممكنة. ونظرا إلى أن عدد القصاصات في السلة كبير جدا، تكون احتمالات سحب أي من تلك التشكيلات متساوية ويساوي كل منها:

$$p = \frac{1}{1296}$$

لذا يساوي الارتياب الوسطي في التشكيلة X التي اختارها عمر:

$$H(X) = \log 1296 = 10.34 \quad bit$$

الإنتروبي

2. إجابات عمر هي أعداد، ويمكن تمثيلها بمتغير عشوائي Y يأخذ القيم التالية:

- لا يوجد أي تطابق: $Y = 0$.
- يوجد تطابق واحد: $Y = 1$.
- يوجد تطابقان: $Y = 2$.
- يوجد ثلاثة تطابقات: $Y = 3$.
- يوجد أربعة تطابقات: $Y = 4$.

وتمثل إجابات عمر تخفيضا للارتياب في التشكيلة المسحوبة، وقيمة هذا التخفيض هي المعلومات الوسطية المشتركة بين : X و Y:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

الإنتروبي

ونظرا إلى أن معرفة X تنطوي على معرفة Y (إذا عُرفت التشكيلة التي سحبها عمر سوف يصبح عدد التطابقات معروفا بعد مقترح سلمى). ولذا يساوي الارتياب في Y حين معرفة X الصفر:

$$H(Y|X) = 0$$

ومنه:

$$I(X,Y) = H(Y)$$

من أجل حساب $H(Y)$، نحتاج إلى التوزع الاحتمالي لـ Y:

$$P\{Y = j\} \qquad ;j = 0, 1, 2, 3, 4$$

الإنتروبي

تعني القيمة $Y = 4$ أن التشكيلة التي اقترحتها سلمى هي التشكيلة التي سحبها عمر، لذا يساوي احتمالها:

$$P\{Y = 4\} = \frac{1}{1296}$$

الإنتروبي

من أجل القيمة $3 = Y$، ثمة ثلاثة مواقع متطابقة وموقع واحد غير متطابق.
بافتراض أن المواقع الثلاثة اليسرى كانت متطابقة، يمكن أن يكون في الموقع الرابع (الأيمن) واحد من خمسة أرقام مختلفة: $1 - 6$، وهذا يعطي إمكانية لخمس تشكيلات احتمالها يساوي : $\frac{5}{1296}$
ونظرا إلى أن الموقع غير المتطابق يمكن أن يكون في أي من المواقع الأربعة، فإن:

$$P\{Y = 3\} = 4 \times \frac{5}{1296} = \frac{20}{1296}$$

الإنتروبي

وبمحاكمة مشابهة، نجد أن:

$$P\{Y = 2\} = \frac{150}{1296}$$

$$P\{Y = 1\} = \frac{500}{1296}$$

$$P\{Y = 0\} = \frac{625}{1296}$$

الإنتروبي

ومن ثم:

$$H(Y) = -\frac{1}{1296}\log\frac{1}{1296} - \frac{20}{1296}\log\frac{20}{1296} - \frac{150}{1296}\log\frac{150}{1296} - \frac{500}{1296}\log\frac{500}{1296} - \frac{625}{1296}\log\frac{625}{1296}$$

وتكون المعلومات المشتركة:

$$I(X,Y) = H(Y) \approx 1 \;\; bit$$

ويصبح الارتياب الشرطي الوسطي:

$$H(X,Y) \approx 10.34 - 1 \approx 9.34\, bit$$

هل ٮعلم اں الٮڡاط ٮم احٮراعها
للعحم ولٮس للعرٮ حٮٮ اں
العرٮ ڡدٮما كاٮوا لا ٮسٮحدموں
الٮڡاط واٮ كدلك ٮمكٮك
اں ٮڡرا مڡاطع كامله ٮدوں
ٮڡاط كما كاں ٮڡعل العرٮ
العرٮ الڡدامى وكاٮوا ٮڡهموں
الكلماٮ مں سٮاٯ الحمله
واٮسط مٮل على دلك اٮك
ٮڡرا هدا المڡطع ٮدوں
ٮڡاط او همراٮ

ترميز المنبع Source Coding

الإنتروبي واللغة

اللغة المكتوبة هي منبع للمعلومات يعطي رموزا او حروفا عشوائية من مجموعة محددة من الرموز التي تسمى بالابجدية وتظهر الرموز المتتالية عادة وفقا لاحتمالات تحدد العلاقة بين تلك الرموز

ترميز المنبع Source Coding

الإنتروبي واللغة

اللغة المكتوبة هي منبع للمعلومات يعطي رموزا أو حروفا عشوائية من مجموعة محددة من الرموز التي تسمى بالأبجدية. وتظهر الرموز المتتالية عادة وفقا لاحتمالات تحدد العلاقة بين تلك الرموز.

وقد درس شانون هذا الموضوع مستعملا اللغة الإنكليزية. أما هنا، فسوف نطبق بعض المفاهيم التي استعملها على اللغة العربية.

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة العربية

عدد الأحرف الأساسية في اللغة العربية هو 28 حرفا، يُضاف إليها الفراغ، فيصبح عدد رموز اللغة 29 رمزا.

في الواقع، اللغة العربية غنية ومعقدة من حيث محارفها. فللهمزة عدة أشكال بحسب موقعها من الكلمة وتبعا لحركتها، وقد اعتُبرت جميعها هنا مع الألف حرفا واحدا. واعتُبرت التاء المربوطة هاء، واعتُبرت الألف المقصورة ياء. أي إن عدد المحارف الكلي يساوي 29 محرفا تتضمن الفراغ.

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة العربية

ليكن احتمال ظهور الحرف رقم i من الأبجدية p_i. تعطى كمية المعلومات التي يمكن للحرف الواحد أن يحملها بإنتروبي اللغة:

$$I = H = -\sum_{i=1}^{29} (p_i \, log \, p_i) \qquad bit/symbol$$

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة العربية

باقتراض أن جميع أحرف اللغة العربية تظهر في النصوص بنفس الاحتمال (وهذه فرضية غير صحيحة)، تعطى p_i بـ:

$$p_i = \frac{1}{29} \quad ; \qquad i = 1 \dots 29$$

حينئذ، يحمل الحرف الواحد من النص المكتوب كمية المعلومات التالية:

$$I = -\sum_{1}^{29} \left(\frac{1}{29} log \frac{1}{29} \right) = log29 = 4.86 \;\; bit/symbol$$

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة العربية

ماذا يعني ذلك:

- إذا أرسلت رسالة إلى شخص ما، وكانت الرسالة مؤلفة من m حرفا، تكون قد أرسلت إليه $4.86\,m$ بتا من المعلومات.
- إذا أرسلت رسالة إلى شخص بمعدل m حرفا في الثانية، تكون قد أرسلت إليه $4.86\,m$ بتا في الثانية.
- إذا سحبت حرفا واحدا من الأبجدية، فإنك سوف تكون مرتابا بماهية الحرف الذي سحبته، ومقدار ارتيابك يساوي إنتروبي مجموعة المحارف تلك الذي يساوي أيضا 4.86.

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة العربية

سؤال:

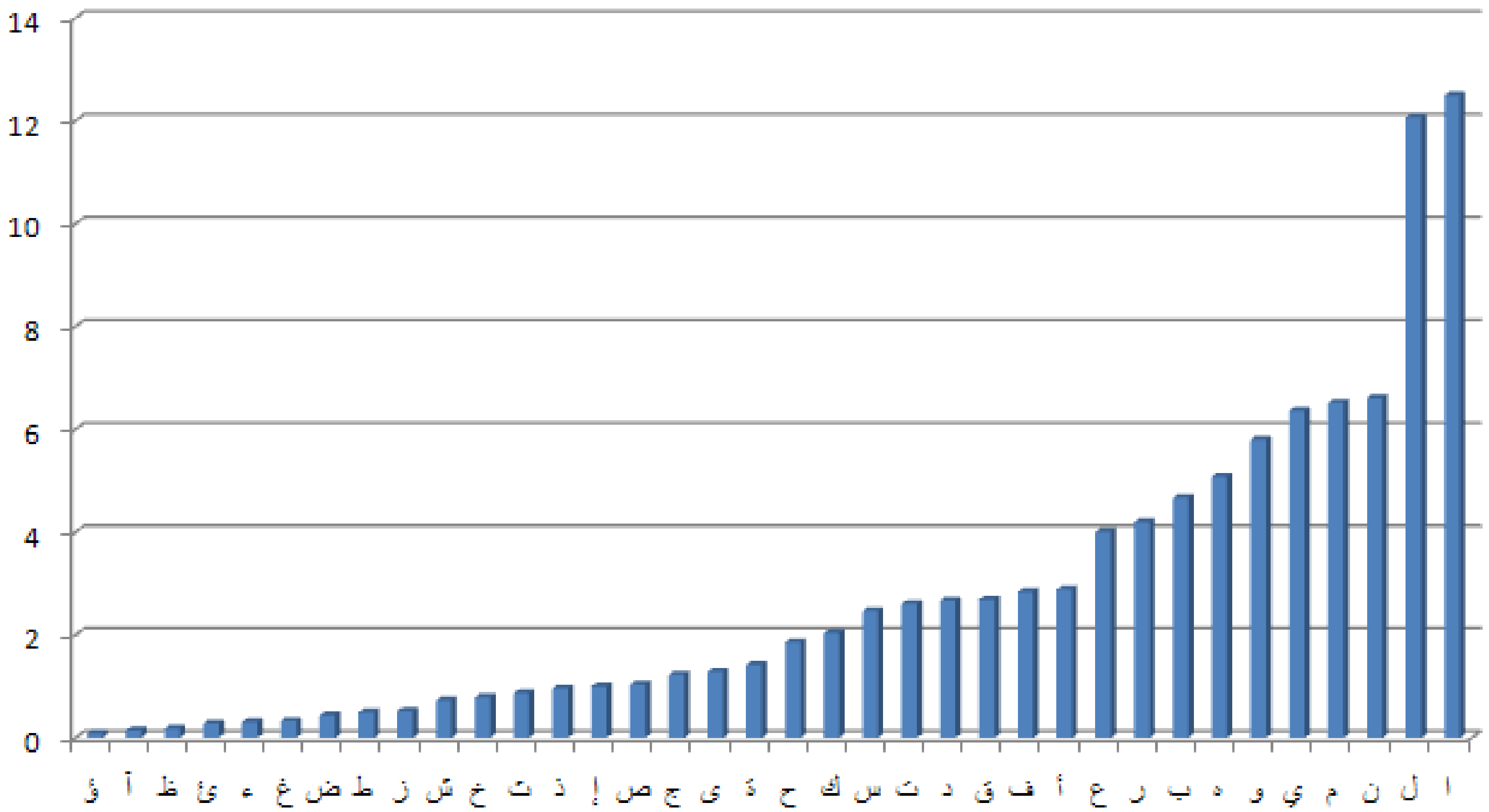
- لنفترض أنك نويت أن تُنشئ لغة خاصة بك، ما هو العدد الأصغري لحروف الأبجدية الذي يمكن أن تختاره؟
- لماذا اخترت هذا العدد؟

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة العربية

الحرف	النسبة المئوية	الحرف	النسبة المئوية	الحرف	النسبة المئوية
الفراغ	18.78	ب	2.83	ص	0.81
ا	15.45	ع	2.61	ط	0.8
ل	9.22	ف	2.28	خ	0.74
ي	6.5	د	2.19	ش	0.72
ه	5.13	ق	1.78	ض	0.61
م	4.78	س	1.75	ث	0.5
و	4.51	ك	1.72	ز	0.47
ن	4.41	ح	1.6	غ	0.34
ت	3.81	ج	1.15	ظ	0.237
ر	3.37	ذ	0.884		

في اللغة الطبيعية، لا تظهر جميع المحارف بنفس الاحتمال. فاللام والألف يتكرران كثيرا في العربية، في حين أن حرف الظاء قليل التكرار. وهذا واضح من المثال المجاور.



14
12
10
8
6
4
2
0
ؤ آ ظ ئ ء غ ض ط ز ش خ ث ذ إ ص ج ى ة ح ك س ت د ق ف أ ع ر ب ه و ي م ن ل ا

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة العربية

باستعمال قيم الاحتمالات المعطاة في الجدول، نحصل على كمية المعلومات الوسطية التي يمكن للحرف الواحد من الأبجدية أن يحملها:

$$I = H = -\sum_{i=1}^{29} (p_i \, log \, p_i) = 4.06 \, bit/symbol$$

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة

القيمة 4.06 أصغر من القيمة العظمى 4.86 بت للحرف الواحد التي تنتج حينما تكون جميع الحروف متساوية الاحتمال. وهذا متوقع، لأن القيمة العظمى لا تحصل إلا عندما تكون جميع قيم p_i متساوية.

في اللغة الإنكليزية ، القيمتان المقابلتان للقيمتين 4.06 و 4.86 هما 4.15 و 4.75. وهذا شيء لافت. فبرغم اختلاف اللغتين من نواح عديدة، وخاصة من الناحية النحوية، تجد أنهما متقاربتان من حيث مقدرة أبجديتهما على حمل المعلومات.

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة

لا تعبّر الحسابات السابقة عن مقدرة اللغة على حمل المعلومات على نحو دقيق. فعمليا، لا تظهر الحروف مستقلة عن بعضها، بل ثمة ترابطات بينها. فعلى سبيل المثال، تظهر ثنائيات الأحرف باحتمالات مختلفة تعتمد على قابلية الحروف للاقتران معا. فالحرفان (أ، ل) يظهران معا كثيرا في العربية. وكذلك الحرفان (t و h) في الإنكليزية. في حين أن الحرفين (ز، ذ) لا يقترنان معا في العربية. وهذا ينطبق على ثلاثيات الأحرف ورباعياتها.. إلخ.

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة

لذا فإن القيمة الوسطية الحقيقية لإنتروبي العربية تتخفض إلى نحو 2.4 بت للحرف، وتنخفض في حالة الإنكليزية إلى نحو 2.3 بت للحرف.

لماذا؟

ترميز المنبع

الإنتروبي واللغة

اعتمادا على هذه الحقائق تتنبأ محررات النصوص (في الهاتف مثلا) بالكلمة التالية أثناء تحريرك لنص ما. وغوغل يفعل الشيء نفسه. لقد ضُمّنت هذه الحقائق في الذكاء الصنعي الذي يقوم بالتنبُّؤ.

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

نسمي المنبع الذي يعتمد فيه ظهور الرمز التالي على الرمز الذي سبقه بالمنبع ذي الذاكرة **with memory** . بالمقارنة، نسمي المنابع التي تظهر فيها الرموز مستقلة تماما عن بعضها بالمنابع العديمة الذاكرة memoryless.

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

ليكن U_i الرمز رقم i الخارج من منبع للرموز.

نعرِّف إنتروبي U، أي إنتروبي الرموز $\{U_i\}$ بـ:

$$H(U) = \lim_{L\to\infty} H(U_L|(U_{L-1}, U_{L-2}, \cdots, U_1))$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

وإذا كانت الرموز مستقلة بعضا عن بعض (منبع عديم الذاكرة):

$$H(U) = H(U_L)$$

وفي حالة اعتماد الرمز على الرمز السابق له فقط:

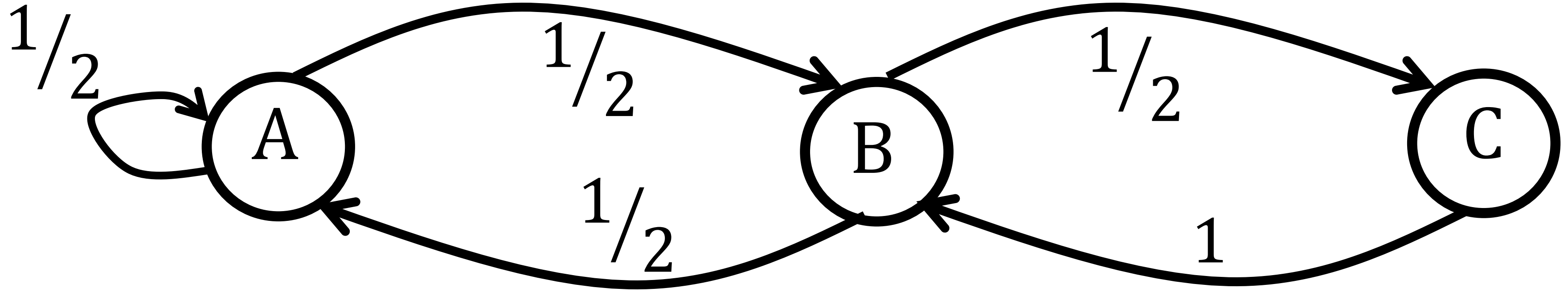
$$H(U) = H(U_L|U_{L-1})$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

مثال:

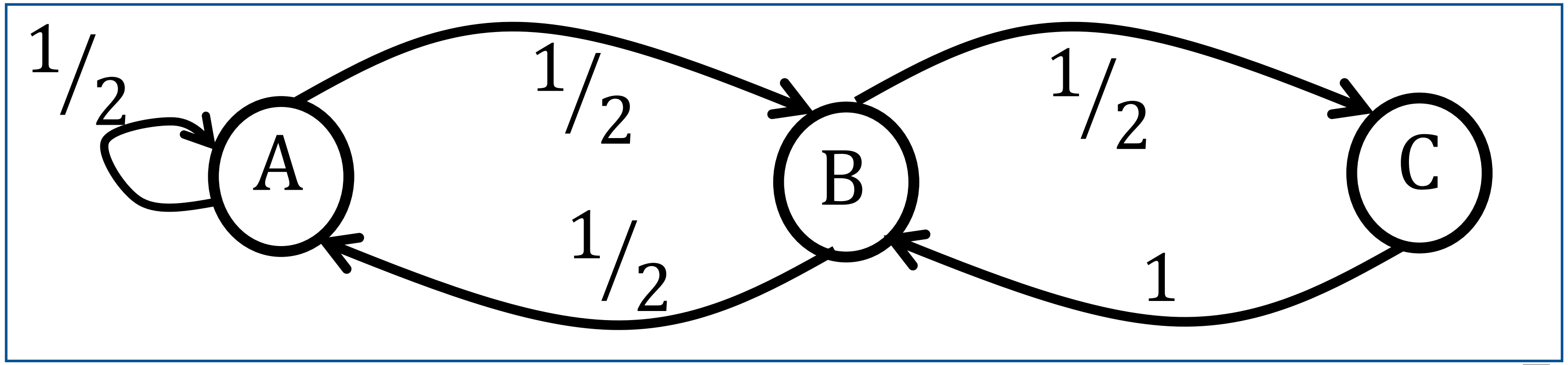
منبع U يعطي في خرجه سلسلة مكونة من الأحرف الثلاث {A, B, C} التي يعتمد فيها الحرف اللاحق على الحرف السابق وفقا لمخطط ماركوف ومصفوفة احتمالات العبور التاليين. خرج المنبع في البداية كان B. المطلوب حساب الإنتروبي الوسطي للمنبع.



$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة



$$T = \begin{bmatrix} AA & AB & AC \\ BA & BB & BC \\ CA & CB & CC \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

لنرمز للحرف الذي يظهر في الخطوة رقم n بـ U_n. حينئذ يعطى الإنتروبي الوسطي لهذا المنبع عندما $n \to \infty$ بـ:

$$\lim_{n\to\infty} H(U_n|U_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=A}^{C} P\{U_{n-1} = i\} \times H(U_n|U_{n-1} = i)$$

$$i = A, B, C$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

الحل:

أولا، سوف نحسب P.

نظرا إلى أن أول حرف يظهر في خرج المنبع هو B، تعطى مصفوفة احتمالات الحالة الابتدائية بـ:

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة احتمالات الحالة الأولى:

$$P^{(1)} = P^{(0)}T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

بعد الضرب ينتج:

$$P^{(1)} = [1/2 \quad 0 \quad 1/2]$$

أي إن احتمال كون الحرف الأول يساوي A أو C يساوي 1/2، واحتمال أن يكون B يساوي 0.

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

الحل:

وتعطى احتمالات الحالة الثانية $P^{(2)}$ الخاصة بظهور الرمز الثاني بـ:

$$P^{(2)} = P^{(1)} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

أي إن:

$$P^{(2)} = [0 \quad 1 \quad 0]T^2$$

وتكون احتمالات الحالة رقم n:

$$P^{(n)} = [0 \quad 1 \quad 0]\, T^n$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

وبعد ظهور عدد كبير من الرموز في خرج المنبع:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \lim_{n\to\infty} T^n$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

لكن:

$$\lim_{n\to\infty} T^n = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.20 \\ 0.4 & 0.4 & 0.20 \\ 0.4 & 0.4 & 0.20 \end{bmatrix}$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.20 \\ 0.4 & 0.4 & 0.20 \\ 0.4 & 0.4 & 0.20 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

أي بعد استقرار المنبع
يصبح احتمال ظهور كل من الحرفين A و B مساويا 0.4،
ويصبح احتمال ظهور الحرف C مساويا 0.2.

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

افترض الآن أن الحرف الحالي هو U_L، ولنرمز لاحتمالات مصفوفة العبور كالتالي:

$$x_1 = P(U_L = A|U_{L-1} = A) = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = P(U_L = A|U_{L-1} = B) = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = P(U_L = A|U_{L-1} = C) = 0$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

$$y_1 = P(U_L = B|U_{L-1} = A) = \frac{1}{2}$$
$$y_2 = P(U_L = B|U_{L-1} = B) = 0$$
$$y_3 = P(U_L = B|U_{L-1} = C) = 1$$

$$z_1 = P(U_L = C|U_{L-1} = A) = 0$$
$$z_2 = P(U_L = C|U_{L-1} = B) = \frac{1}{2}$$
$$z_3 = P(U_L = C|U_{L-1} = C) = 0$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

مما تقدم يمكن حساب الإنتروبي الشرطي لهذا المنبع كالتالي:

$$H(U_L|U_{L-1}=A) = -x_1 log x_1 - y_1 log y_1 - z_1 log z_1$$
$$= -\frac{1}{2} log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} log \frac{1}{2} - 0 log 0$$
$$= log 2 = 1\ bit$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

$$H(U_L|U_{L-1}=B) = -x_2 log x_2 - y_2 log y_2 - z_2 log z_2$$
$$= -\frac{1}{2} log \frac{1}{2} - 0 log 0 - \frac{1}{2} log \frac{1}{2}$$
$$= log 2 = 1\ bit$$

$$H(U_L|U_{L-1}=C) = -x_3 log x_3 - y_3 log y_3 - z_3 log z_3$$
$$= -0 log 0 - 1\ log 1 - 0 log 0$$
$$= 0$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

الإنتروبي الوسطي لهذا المنبع يعطى بـ:

$$\lim_{n\to\infty} H(U_n|U_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=A}^{C} P\{U_{n-1} = i\} \times H(U_n|U_{n-1} = i)$$

$$i = A, B, C$$

$$\lim_{n\to\infty} H(U_n|U_{n-1}) = 0.4 \times 1 + 0.4 \times 1 + 0.2 \times 0 = 0.8 \quad bit/symbol$$

ترميز المنبع

إنتروبي المنبع ذي الذاكرة

لو لم تكن الرموز اللاحقة تعتمد على الرموز السابقة، أي لو كانت مستقلة بعضا عن بعض، وكانت احتمالات ظهورها متساوية(تساوي 1/3)، لكان الإنتروبي الوسطي للمنبع:

$$H(U_L) = \log 3 = 1.585 \ \text{bit/symbol}$$

هذا يعني أن إنتروبي المنبع، أو الارتياب فيه قد انخفض من 1.585 بت للرمز إلى 0.8 بت للرمز، أي بمقدار 0.785 بت للرمز. وهذا ناجم عن معرفتنا القبلية بأرجحية الحرف اللاحق.

ترميز المنبع

الفائض Redundancy

افترض:

- أن منبع الرموز ذو ذاكرة، أي إن رموز خرجه ليست مستقلة بعضا عن بعض،
- وأن الرمز يمكن أن يأخذ قيمة من N قيمة مختلفة (3 في المثال السابق)،
- وأن إنتروبي المنبع هو: $H_{\infty}(U)$،
- وأن الإنتروبي الأعظمي للمنبع هو H_{MAX}، (وهو الإنتروبي الحاصل عندما تكون الرموز مستقلة عن بعضها ولها نفس الاحتمال):

ترميز المنبع

الفائض

نعرِّف فائض إنتروبي المنبع بـ:

$$r = 1 - \frac{H_{\infty}(U)}{H_{MAX}}$$

حيث: $H_{MAX} = log\, N$

لاحظ أنه في حالة الرموز المستقلة عن بعضها يكون:

$$H_{\infty}(U) = H_{MAX}$$

$$r = 0$$

الفائض في اللغة

- من أجل اللغة العربية، $H_{MAX} = 4.86$. وتبين الدراسات الإحصائية المجراة على اللغة العربية (على مستوى الكلمات) أن:

$$H_{\infty}(U) = 2.4\ bit/symbol$$

لذا يكون فائض إنتروبي اللغة العربية:

$$r \approx 0.5$$

ترميز المنبع

الفائض في اللغة

- ومن أجل اللغة الإنكليزية، $H_{MAX} = 4.75$. وتبين الدراسات الإحصائية المجراة على اللغة الإنكليزية (على مستوى الكلمات) أن:

$$H_{\infty}(U) = 2.3\ bit/symbol$$

لذا يكون فائض إنتروبي اللغة العربية:

$$r \approx 0.516$$

ترميز المنبع

الفائض في اللغة

ماذا يعني الفائض في اللغة؟

الفائض الصفري:

يعني الفائض الصفري في اللغة أن جميع التراكيب الممكن تكوينها بواسطة أحرفها هي تراكيب لغوية فعلية. فإذا حصل خطأ في حرف لسبب ما (أثناء النقل على خط الاتصال مثلا)، تغير معنى الكلمة أو الجملة.

ترميز المنبع

الفائض في اللغة

ماذا يعني الفائض في اللغة؟

الفائض غير الصفري:

الفائض غير الصفري، فيعني إمكان تجاهل الخطأ وأخذ أقرب كلمة للكلمة التي فيها خطأ. طبعا، الفائض غير الصفري يعني هدر جزء من إمكانات اللغة في التعبير، إلا أن عدد الأحرف الكبير نسبيا، يجعل الجزء المستعمل فعلا من التراكيب اللغوية أصغر كثيرا جدا من إمكانات اللغة في حالة الفائض غير الصفري.

ترميز المنبع

الفائض في اللغة

حين تأليف نص باللغة العربية، نختار 50% تقريبا من الأحرف اختيارا حرا تبعا للموضوع الذي نريد التعبير عنه، في حين أن الـ 50% الأخرى يفرضها عدم تساوي احتمالات ظهور الحروف والكلمات، أو اعتماد الحرف أو الكلمة اللاحقين على سابقيهما.

ترميز المنبع

الفائض في اللغة

مثال:

الثنائيات في العربية محدودة العدد جدا:

في، من، عن، إن، لا، أو، أم، أب، جد...

في حين أن عدد الثنائيات الممكنة يساوي 29×29= 841 ثنائية.

وينطبق الأمر نفسه على الثلاثيات والرباعيات...

تجاهلنا في هذا التحليل الحركات، ولو أدخلناها لَازداد عدد أحرف الأبجدية بمقدار 3.

وتنطبق مفاهيم مشابهة على اللغات الأخرى أيضا.

ترميز المنبع

الفائض في الذاكرة

ماذا يعني الفائض في منظومات الذاكرة؟

مثال:

يتخذ القلاب (flip flop) إحدى وضعيتين 0 أو 1. ولذا نقول أنه يمكن أن يخزن:

$$I = log\, 2 = 1 \;\; bit$$

إذا كانت الوضعيتان متساويتي الاحتمال. وهذه هي قيمة الإنتروبي الأعظمي للقلاب.

ترميز المنبع

الفائض في الذاكرة

وإذا كان احتمالا الوضعيتين غير متساويين، مثلا:

$$P(1) = 0.3 \quad ; \quad p(0) = 0.7$$

كان الإنتروبي:

$$H = -(0.3\ log_2 0.3 + 0.7\ log_2 0.7) = 0.881$$

وحينئذ يكون الفائض في إنتروبي القلاب:

$$r = 1 - \frac{0.881}{1} = 0.119\ \text{bit/state}$$

و هذا يمثل هدرا في قدرة القلاب على الخزن.

ترميز المنبع

الفائض

يمثل الفائض غير الصفري دائما هدرا في إمكانات المنظومة على التعبير عن المعلومات، وهذا الهدر يمكن أن يكون:

- مفيدا في الحالات التي تتطلب حماية من الأخطاء.
- ضارا في الحالات الأخرى.

ترميز المنبع

معدل الإنتروبي ENTROPY RATE

فيما تقدم، اقتصر اهتمامنا على إنتروبي المنبع للرمز. فإذا كان المنبع يعطي الرموز بمعدل $D(U)$ رمزا في الثانية، فإننا نعرّف معدل الإنتروبي بـ:

$$H' = H_{\infty}(U)\, D(U)$$

واحدة معدل الإنتروبي:

$$bit/symbol \times symbol/sec = bit/sec$$

معدل الإنتروبي هو مقدار المعلومات الوسطي التي يعطيها المنبع في الثانية، ويقدر بالبت في الثانية.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع
THE SOURCE CODING PROBLEM

تنحصر مسألة ترميز منبع المعلومات في الإجابة عن 3 أسئلة:

- هل من الممكن ضغط المعلومات التي يعطيها المنبع؟
- ما هو عدد البتات الأصغري اللازم لتمثيل رمز معلومات واحد؟
- كيف نصمم خوارزمية لتحقيق ضغط جيد للمعلومات؟

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

مثال:

لدينا منبع عديم الذاكرة يعطي في خرجه الرموز $\{A,B,C,D\}$ بالاحتمالات التالية:

$$P(A) = 1/2 \;\; ; \; P(B) = 1/4 \;\; ; \; P(C) = 1/8 \;\; ; \; P(D) = 1/8$$

نرغب في حفظ 1000 رمز من هذه الرموز على شكل بتات في ملف بأصغر حجم ممكن.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

الحل:

نظرا إلى أن عدد الرموز هو 4، أي 2^2، يمكن تخصيص كلمة رمز مؤلفة من 2 بت لكل منها وفقا لما يلي:

$$A \to 00 \quad ; \quad B \to 01 \quad ; \quad C \to 10 \quad ; \quad D \to 11$$

ومن ثم، فإن ترميز الـ 1000 رمز يتطلب ملفا حجمه **2×1000 بت = 2000 بت**.

هل ثمة طريقة أخرى للترميز تجعل حجم الملف أصغر؟

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

نظرا إلى أن الرموز غير متساوية الاحتمالات، يمكن أن نفكر بطريقة لا يكون فيها عدد البتات المخصصة للرموز متساويا، بل نخصص كلمات رمز ذات عدد صغير من البتات للرموز التي هي أكثر تكرارا، وكلمات أطول للرموز التي هي أعلى احتمالا. مثلا:

$$A \leftarrow 1 \quad ; \quad B \leftarrow 01 \quad ; \quad C \leftarrow 000 \quad ; \quad D \leftarrow 001$$

نسمي هذا النوع من الترميز بالترميز المتغير الطول تمييزا له عن الترميز السابق الثابت الطول.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

من ناحية أخرى، نتوقع أن نجد ضمن الـ 1000 رمز:

$$1000 \times 1/2 = 500 \quad \text{"A"}$$
$$1000 \times 1/4 = 250 \quad \text{"B"}$$
$$1000 \times 1/8 = 125 \quad \text{"C"}$$
$$1000 \times 1/2 = 125 \quad \text{"D"}$$

وبذلك ينخفض حجم الملف إلى:

$$500 \times 1 + 250 \times 2 + 125 \times 3 + 125 \times 3 = 1750 \text{ bit}$$

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

وهذا حجم أصغر من الحجم السابق بـ:

$$(2000-1750)/2000=12.5\%$$

وسطيا، خُصّص كل رمز بـ 1.75 بت بدلا من بتين.

بتخصيص كلمات الرمز Code Words التي هي أقصر للرموز الأعلى احتمالا،
والكلمات التي هي أطول للرموز الأقل احتمالا،
تمكنا من تصغير حجم الملف من دون أي فقد في المعلومات.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

هل ثمة خوارزمية لتخصيص أمثلي لكلمات الرمز للرموز غير المتساوية الاحتمالات؟

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

أولا: وحدانية فك الترميز

لنفترض استعمال كلمات الرمز التالية:

$$A \leftarrow 1 \quad ; \quad B \leftarrow 01 \quad ; \quad C \leftarrow 010 \quad ; \quad D \leftarrow 001$$

ولنفترض أن لدينا سلسلة الرموز التالية التي نرغب في ترميزها:

$$D, C, B, A, A, A, B, B, A, C, B, D$$

حينئذ سوف تكون سلسلة البتات الناتجة عن الترميز كالتالي:

$$0010100111101011010010\,01$$

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

إذا أردنا الآن فك ترميز السلسلة لاستعادة الرموز، نقوم بالتبديل المعاكس:

$$DBDAAA\ \ldots$$

من الواضح أن السلسلة المستعادة خاطئة، أي إن الترميز المستعمل غير ملائم:

يجب أن يكون الترميز قابلا لفك الترميز على نحو وحيد معاكس تماما لعملية الترميز

uniquely decipherable

ليست جميع خيارات تخصيص كلمات الرمز للرموز مقبولة.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

مثال:

لنفترض استعمال كلمات الرمز التالية:

$$A \leftarrow 1 \quad ; \quad B \leftarrow 01 \quad ; \quad C \leftarrow 000 \quad ; \quad D \leftarrow 001$$

حينئذ تعطي السلسلة السابقة $D, C, B, A, A, A, B, B, A, C, B, D$

سلسلة البتات التالية: $0010000111101011000001001$

فإذا عملنا على فك ترميز هذه السلسلة بالتبديل المعاكس حصلنا على:

$$DCBAAABBACBD$$

وهي سلسلة صحيحة.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

ثانيا: فورية فك الترميز

يجب أن يكون الرماز المستعمل آني فك الترميز instantaneous code

أي يجب أن يكون بالإمكان البدء بفك ترميز الكلمة فور وصول آخر بت منها. يجب ألا ننتظر حتى وصول أكثر من كلمة واحدة من أجل فك ترميز الكلمة الحالية.

بمجرد الانتهاء من فك ترميز الكلمة السابقة، نعرف أن البت التالية هي أول بت من كلمة ترميز جديدة.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

الرماز ذو البادئة **prefix code** :

الرماز ذو البادئة هو الرماز الذي لا تكون فيه أي كلمة رماز جزءا من مقدمة كلمة رماز أخرى.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

مثال:

في الرماز التالي:

$$A \leftarrow 1 \quad ; \quad B \leftarrow 01 \quad ; \quad C \leftarrow 010 \quad ; \quad D \leftarrow 001$$

تأتي كلمة الرمز $B \leftarrow 01$ في مقدمة كلمة الرمز $C \leftarrow 010$.

ولذا هذا الرماز ليس رماز بادئة.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

مثال:

الرماز التالي:

$$A \leftarrow 1 \quad ; \quad B \leftarrow 01 \quad ; \quad C \leftarrow 000 \quad ; \quad D \leftarrow 001$$

لا توجد أي كلمة رماز في مقدمة أي كلمة رماز أخرى.

ولذا يكون رماز بادئة.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

نتيجة:

كل رماز ذي بادئة هو رماز وحيد فك الترميز حتما.

- العكس ليس صحيحا، إذ يمكن للرماز ألا يكون ذا بادئة وأن يكون في نفس الوقت وحيد فك الترميز.
- الرماز ذو البادئة هو رماز آني، والعكس صحيح.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

نظرية (متراجحة) كرافت Kraft's (inequality) theorem:

- ليكن s عدد القيم التي يمكن لأبجدية أن تتخذها. مثلا، في الأبجدية {0,1}، s=2، وفي الأبجدية {0,1,2}، s=3.. إلخ.
- ولتكن لدينا مجموعة كلمات رماز مكونة من r كلمة $(w_0,w_1,\cdots,w_{r-1})$ أطوالها معطاة بـ $(n_0,n_1,\cdots,n_{r-1})$.

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

يمكن البرهان على أنه يمكن تكوين رماز ذي بادئة من هذه الكلمات إذا كان:

$$\sum_{i=0}^{r-1} s^{-n_i} \leq 1$$

ترميز المنبع

مثال:

في المثالين السابقين كان لدينا:

$$s = 2,\ \ r = 4,\ n_0 = 1,\ n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 3$$

ومن ثم:

$$\sum_{i=0}^{r-1} s^{-n_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}+2^{-3}=1$$

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

إذن، يمكن تكوين رمازات ذات بادئة بهذه المواصفات، ومثالها هو:

$$A \leftarrow 1 \quad ; \quad B \leftarrow 01 \quad ; \quad C \leftarrow 000 \quad ; \quad D \leftarrow 001$$

هذا لا يعني أن كل الرمازات التي لها نفس المواصفات يمكن أن تكون ذات بادئة حتما. ومثال ذلك الرماز التالي:

$$A \leftarrow 1 \quad ; \quad B \leftarrow 01 \quad ; \quad C \leftarrow 010 \quad ; \quad D \leftarrow 001$$

ففي كلا الحالتين تتحقق نفس المواصفات:

$$s = 2,\ \ r = 4,\ n_0 = 1,\ n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 3$$

ترميز المنبع

مسألة ترميز المنبع

نظرية مكميلان McMillan’s theorem:

الرماز الوحيد فك الترميز يحقق متراجحة كرافت

ترميز المنبع

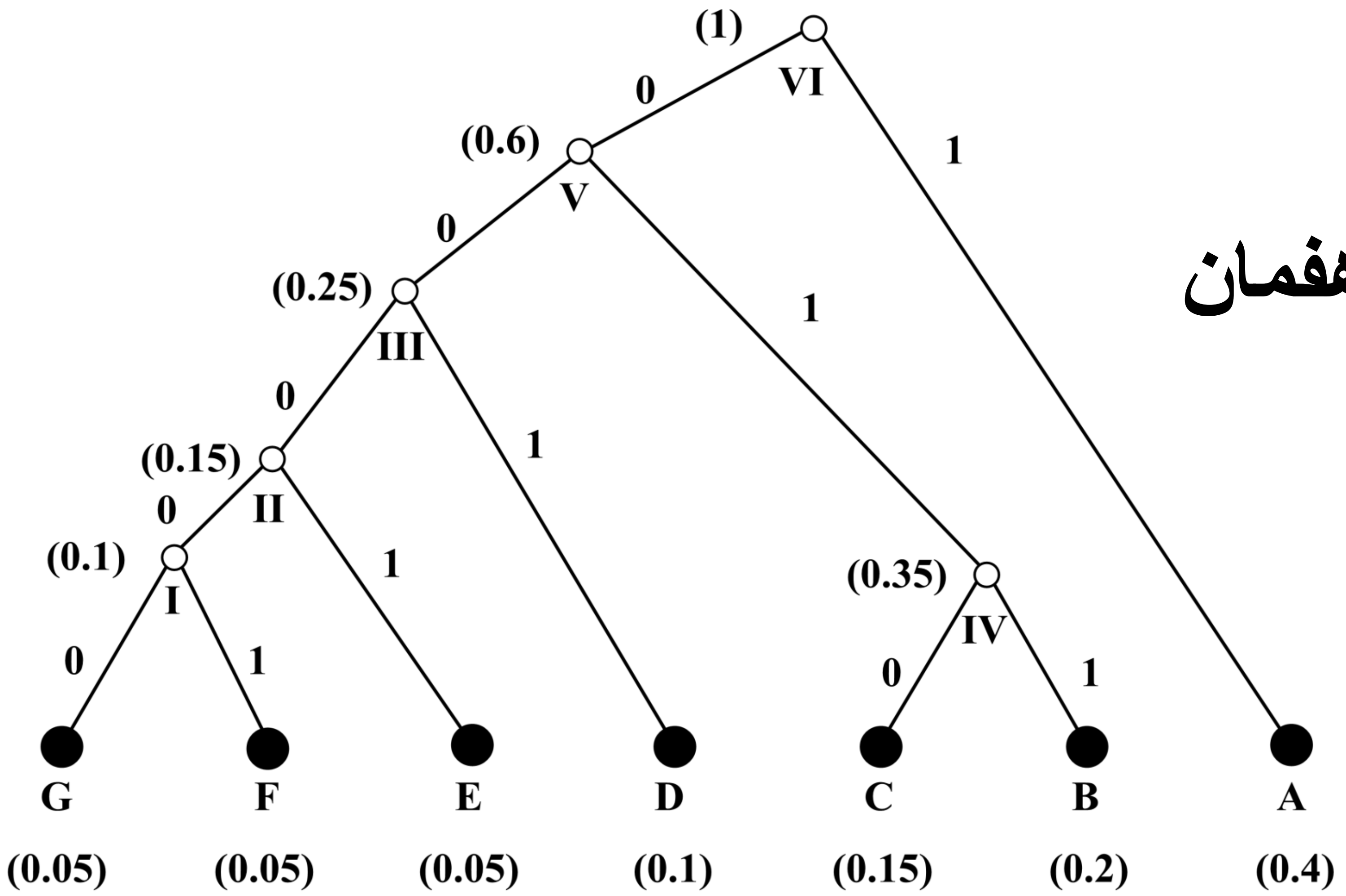
خوارزمية هَفمان HUFFMAN ALGORITHM:

تمكّن خوارزمية هفمان من إنشاء ترميز ذي بادئة باستعمال شجرة متفرعة اثنانيا binary tree، وتكون كلمات الرماز الأعلى احتمالا أقصر طولا، والأقل احتمالا أكبر طولا.

ترميز المنبع

ضغط المعلومات

مثال لشجرة رماز هفمان



ترميز المنبع

مثال:

منبع يعطي الرموز (A, B, C, D, E, F, G) بالاحتمالات التالية:

$$P(A) = 0.16$$
$$P(B) = 0.17$$
$$P(C) = 0.4$$
$$P(D) = 0.14$$
$$P(E) = 0.02$$
$$P(F) = 0.02$$
$$P(G) = 0.09$$

ترميز المنبع

ضغط المعلومات

- نُنشئ جدولا نضع في عموديه الأيسرين الرموز واحتمالاتها مرتبة تنازليا.
- نأخذ أصغر احتمالين ونجمعهما ونضع المجموع مع بقية الاحتمالات في العمود الثالث من اليسار ونرتب القيم تنازليا من الأعلى إلى الأسفل.
- نكرر العملية حتى يصبح في أعلى العمود الأيمن احتمال يساوي 1.

C	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0
B	0.17	0.17	0.17	0.27	0.33	0.6	
A	0.16	0.16	0.16	0.17	0.27		
D	0.14	0.14	0.14	0.16			
G	0.09	0.09	0.13				
E	0.02	0.04					
F	0.02						

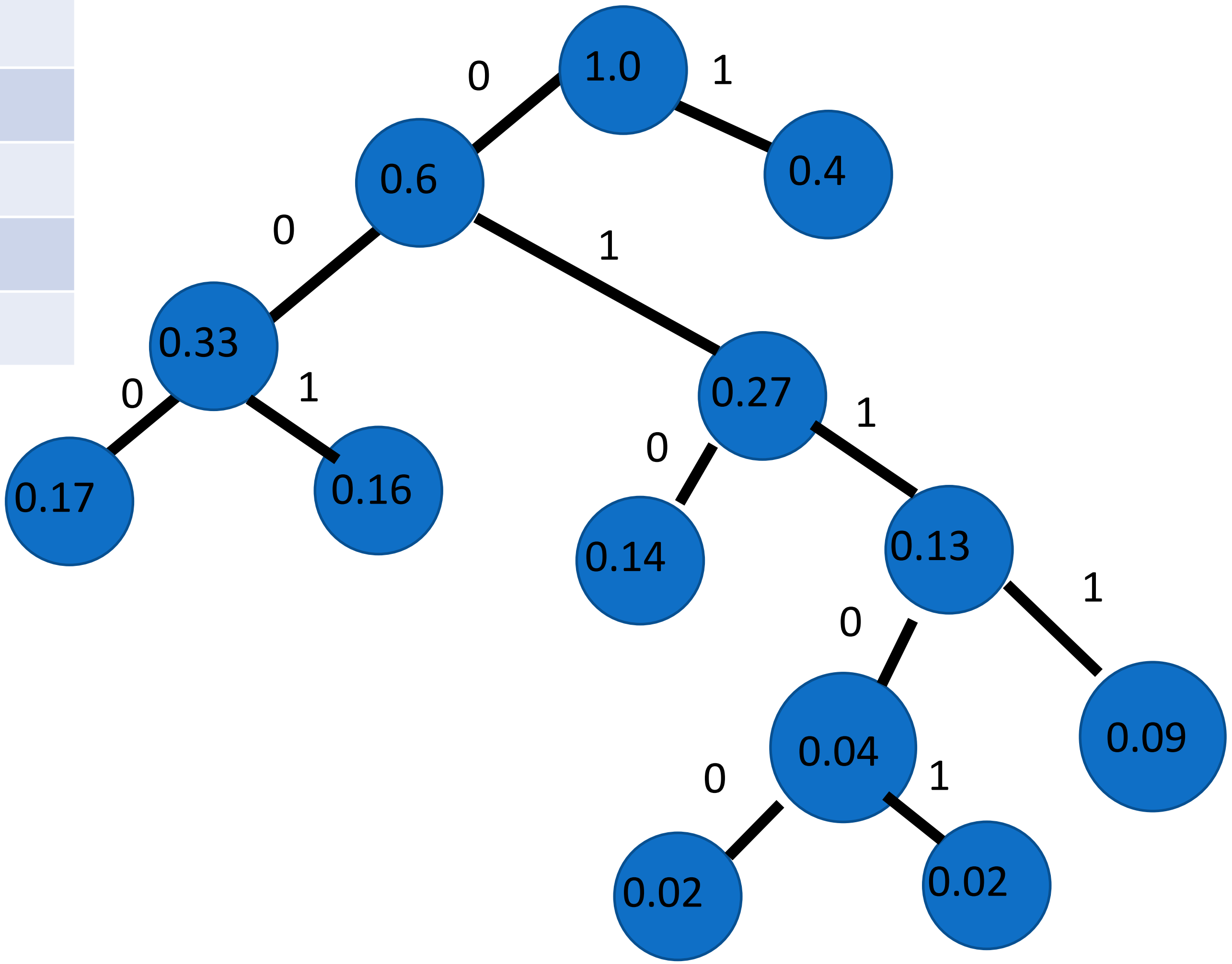
ترميز المنبع

ضغط المعلومات

كلمات الرماز الناتجة

1	C	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0
000	B	0.17	0.17	0.17	0.27	0.33	0.6	
001	A	0.16	0.16	0.16	0.17	0.27		
010	D	0.14	0.14	0.14	0.16			
0111	G	0.09	0.09	0.13				
01100	E	0.02	0.04					
01101	F	0.02						

ننشئ شجرة اثنانية ابتداء من الاحتمال 1 ونفرع الشجرة تبعا لتفرع الاحتمالات نزولا. نُرجِع كل احتمال في عمود أيمن إلى القيمتين اللتين أتى منهما من العمود الواقع إلى يساره. ونكون عقدا في نهايات الفروع حتى نصل إلى احتمالات الرموز الأساسية.



ترميز المنبع

ضغط المعلومات

1	C	0.4
000	B	0.17
001	A	0.16
010	D	0.14
0111	G	0.09
01100	E	0.02
01101	F	0.02

لاحظ:

- لا توجد كلمة رماز في مقدمة أي كلمة أخرى. لذا يكون الرماز الناتج رماز بادئة.
- أقصر كلمة مؤلفة من بت واحدة، وأطول كلمة مكونة من 5 بتات.
- طول كلمة الرماز الوسطي:

$$L = 2.37 \ \text{bit/symbol}$$

ترميز المنبع

ضغط المعلومات

خصائص رماز هفمان:

- رماز هفمان لا فقدي lossless. أي إنه يعطي نفس المعلومات حين فك ترميزها.
- إذا حصل خطأ في بت لسبب ما، انحصر ذلك الخطأ في كلمة الرماز التي تنتمي إليها البت وربما في بضع كلمات الرمز اللاحقة. ثم تعود عملية فك الترميز إلى التزامن من جديد. ولذا يُعتبر ترميز هفمان **ذاتي التصحيح**.

ترميز المنبع

ضغط المعلومات

خوارزميات ضغط المعلومات اللافقدية:

- خوارزمية هفمان.
- خوارزمية LZ 78 (وضعها Jacob Ziv and Abraham Lempel) في عام 1978.
- الخوارزمية دفليت DEFLATE هي تطوير مستمثل لها من أجل زيادة سرعتها، وهي مستعملة في PKZIP, Gzip, PNG.

ترميز المنبع

ضغط المعلومات

خوارزميات ضغط المعلومات الفقدية Lossy compression:

يُقبل في هذه الطرائق فقد بعض المعلومات غير الهامة بغية تقليل حجم الذاكرة المستعملة للخزن. على سبيل المثال، في حالة الصورة، تتصف عين البشر بكونها أشد حساسية للاختلافات في السطوع منها للألوان. لذا تعمل خوارزمية JPEG في جزء منها على بتر البتات غير الأساسية.

ترميز المنبع

ضغط المعلومات

خوارزميات ضغط المعلومات الفقدي: تحويل فورييه المقطع

Discrete Cosine Transform (DCT)

- تحويل رياضياتي لتمثيل الإشارة مشتق من تحويل فورييه.
- يُدرس عادة في إطار معالجة الإشارة، وخاصة إشارة الصورة.
- يعطي هذا التحويل في خرجه عينات (طيفية!) تحتوي الكبيرة منها على المعلومات الأساسية عن الصورة، في حين أن العينات ذات القيم الصغيرة لا تحتوي على معلومات مهمة، ولذلك تُهمل، وهذا يؤدي إلى تقليص كمية المعلومات المتبقية. وبعد إجراء التحويل المعاكس، تُستعاد الصورة مع تشويه بسيط يكاد لا يُرى.
- هذا التحويل هو لب خوارزمية الضغط MP3 و JPEG.

ترميز المنبع

ضغط المعلومات

خوارزميات ضغط المعلومات الفقدي: الفوكودر Vocoder

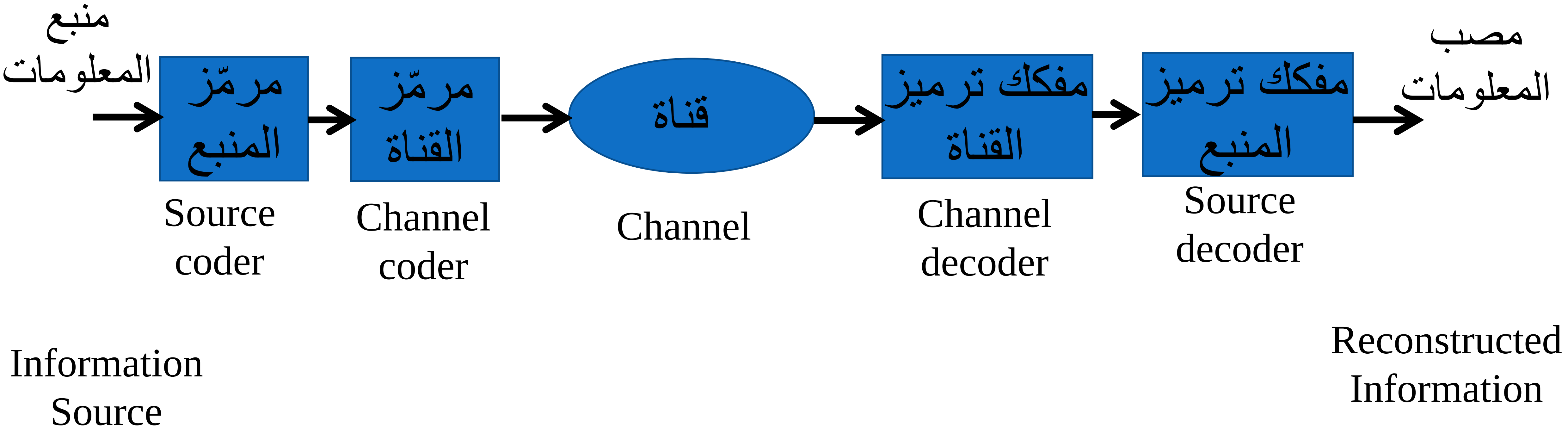
- يُستعمل لضغط الإشارة الكلامية.
- يعتمد على استخلاص بارامترات تركيب الإشارة الكلامية من الإشارة الأصلية، وبعد نقلها، يستعمل تلك البارامترات لتركيب الإشارة الكلامية من جديد.
- يتصف الكلام الناتج بعد التركيب بكونه آليا (روبوتيا).
- كلما كانت نسبة الضغط أكبر أصبحت صفة الآلية أوضح. والعكس صحيح.
- يمكن بهذه الطريقة الوصول إلى نسب ضغط تصل حتى 26 مرة.
- الطريقة مستعملة في الهاتف الخلوي حيث تصل نسبة الضغط إلى 4 مرات.

ترميز القناة Channel Coding

الغاية من ترميز القناة هي إعداد البيانات بحيث يمكن نقلها على خط اتصال مضجج بأعلى سرعة ممكنة واستعادتها في طرف المستقبل خالية من الأخطاء

ترميز القناة

نظام الاتصال



ترميز القناة قناة الاتصال

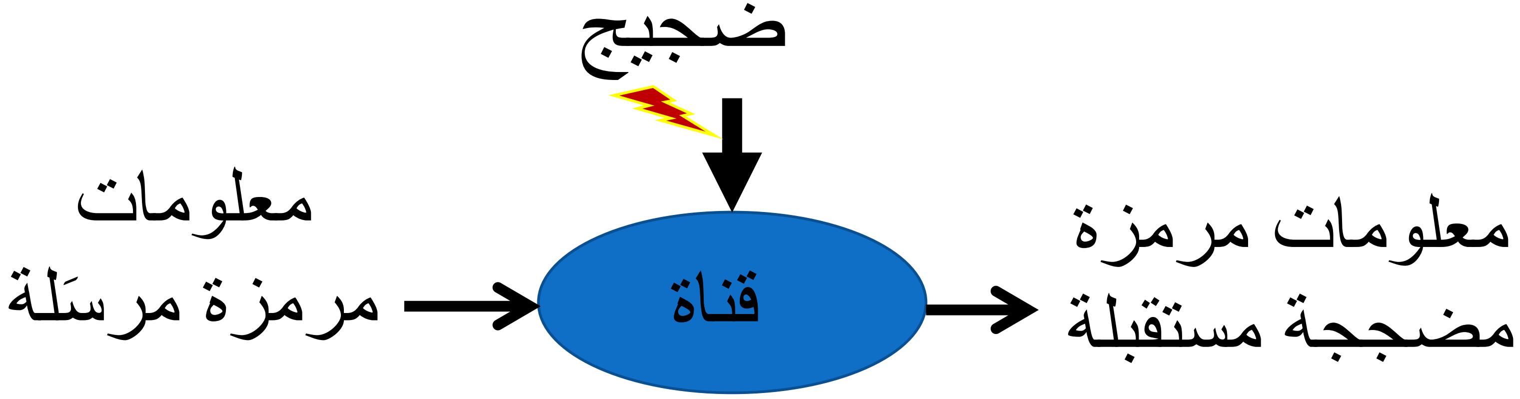
معلومات مرمزة مرسَلة → قناة → معلومات مرمزة مضججة مستقبلة

قناة الاتصال:

سلكين نحاسيين (دارة هاتفية)، ليف ضوئي، وصلة لاسلكية بالترددات المتوسطة والقصيرة والعالية والمكروية، وصلة فضائية.

ترميز القناة

قناة الاتصال: الضجيج Noise

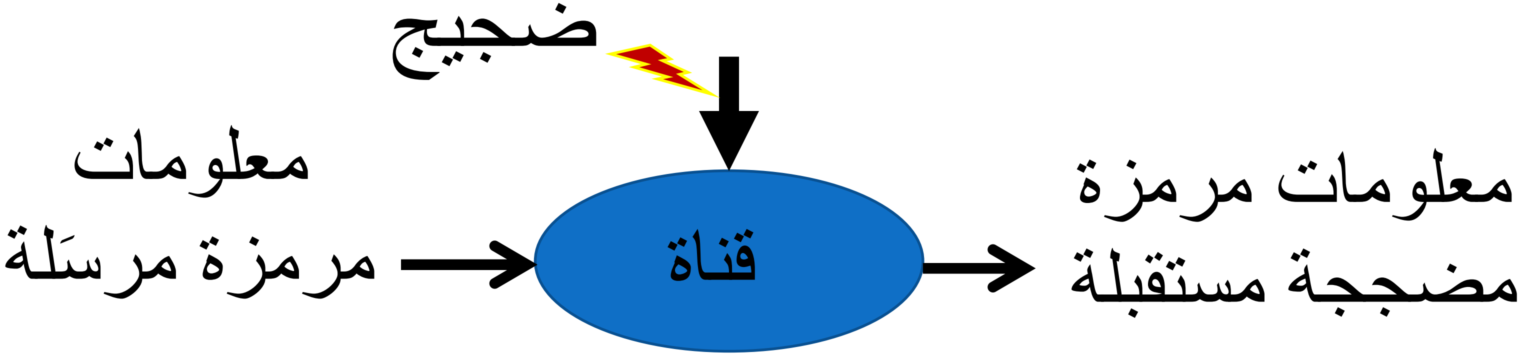


الضجيج:

إشارة عشوائية تدخل على الإشارة جمعا أو ضربا من مصدر خارجي. وأهم أنواعه: الضجيج الغوصي، الضجيج الرشقي، ضجيج التكميم، التسميع، الصدى، طنين الخمسين هرتز.

ترميز القناة

قناة الاتصال: الضجيج

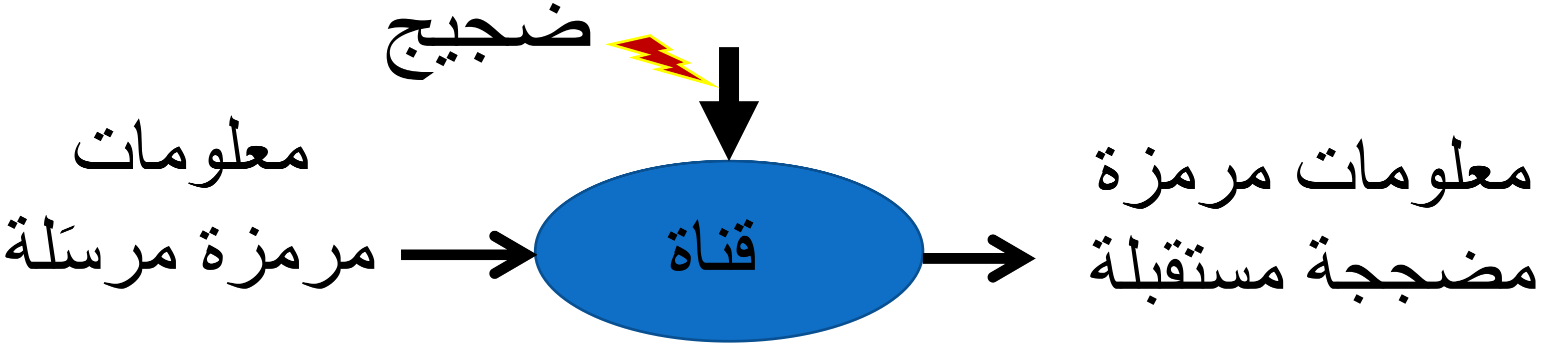


الضجيج الغوصي:

ضجيج حراري يأتي من الأجهزة الإلكترونية. يعتبر ألطف أنواع الضجيج وأسهلها معالجة من الناحية النظرية لأن نموذجه الرياضياتي معطى بتابع التوزع الاحتمالي الغوصي. يسمى أيضا بالضجيج الطبيعي Normal Noise، لأن التوزع الغوصي يسمى بالتوزيع الطبيعي. ويسمى أيضا بالضجيج الأبيض لأت طيفه يمتد على كل الترددات $\{-\infty,\infty\}$.

ترميز القناة

قناة الاتصال: الضجيج

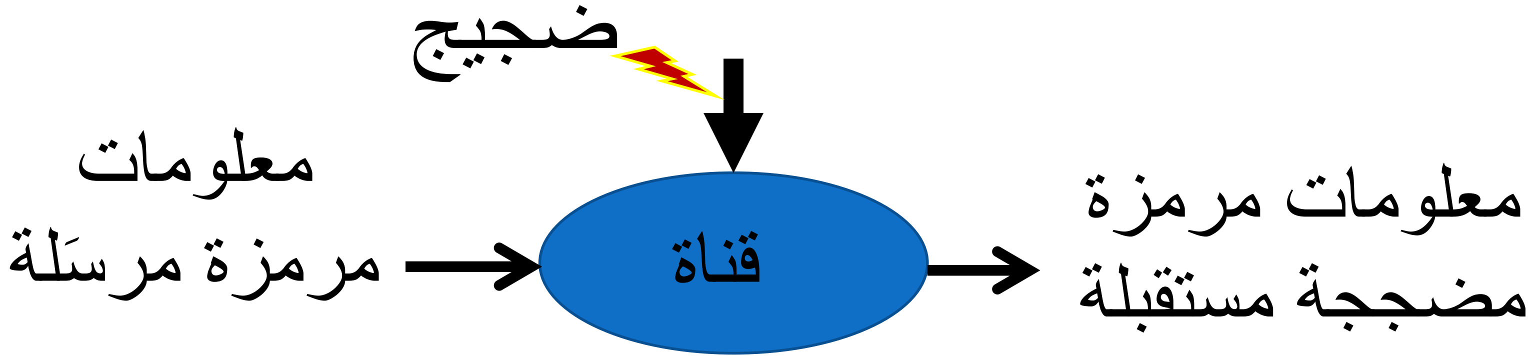


الضجيج الرشقي:

- ضجيج يأتي من البيئة المحيطة، ويتخذ شكل رشقات غير منظمة وليس لها نموذج رياضي محدد.
- من أمثلتها البرق والإشارات الناجمة عن شمعات الاشتعال في محركات الاحتراق الداخلي، ومُقلِعات مصابيح النيونات ومجففات الشعر (السيشوار) وغيرها.

ترميز القناة

قناة الاتصال: الضجيج

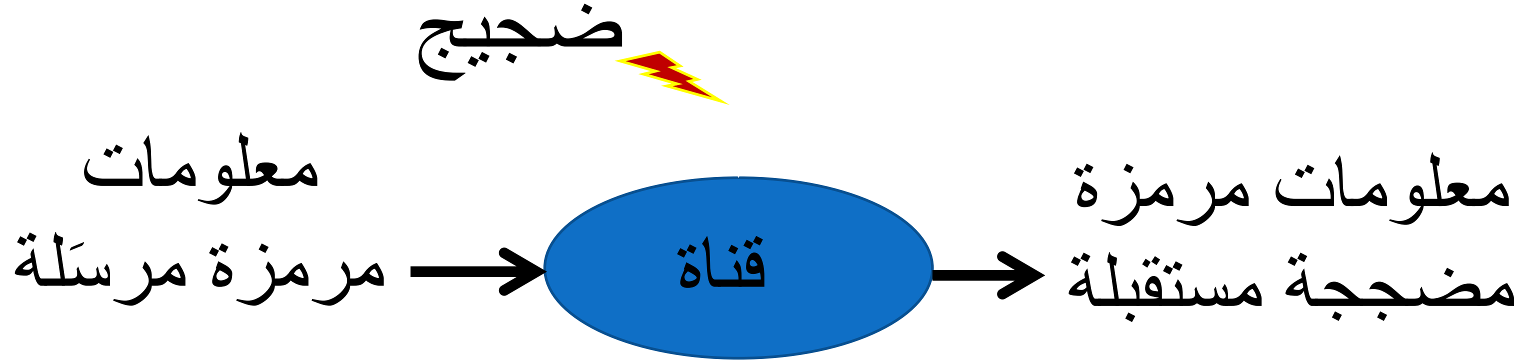


ضجيج التكميم:

- ضجيج يحصل حين تحويل الإشارة التماثلية إلى إشارة رقمية، وينجم عن تدوير قيم عينات الإشارة الحقيقية إلى قيم مستويات التكميم.
- مدروس ومعروف.

ترميز القناة

قناة الاتصال: الضجيج

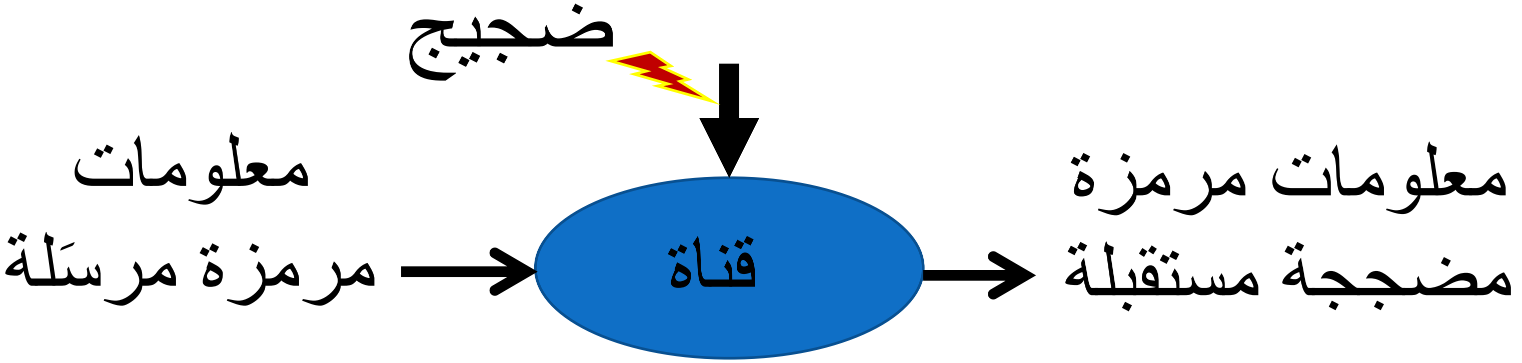


التسميع:

- يأتي من تداخل قنوات الاتصال فيما بينها.
- يحصل التسميع في القنوات الراديوية بسبب تراكب أطياف القنوات المختلفة، أو عدم ترشيحها جيدا وإبقائها ضمن الحزمة الترددية المخصصة لها.
- يحصل التسميع في الدارات الهاتفية السلكية نتيجة للتحريض الكهرمغنطيسي بين الأسلاك.

ترميز القناة

قناة الاتصال: الضجيج

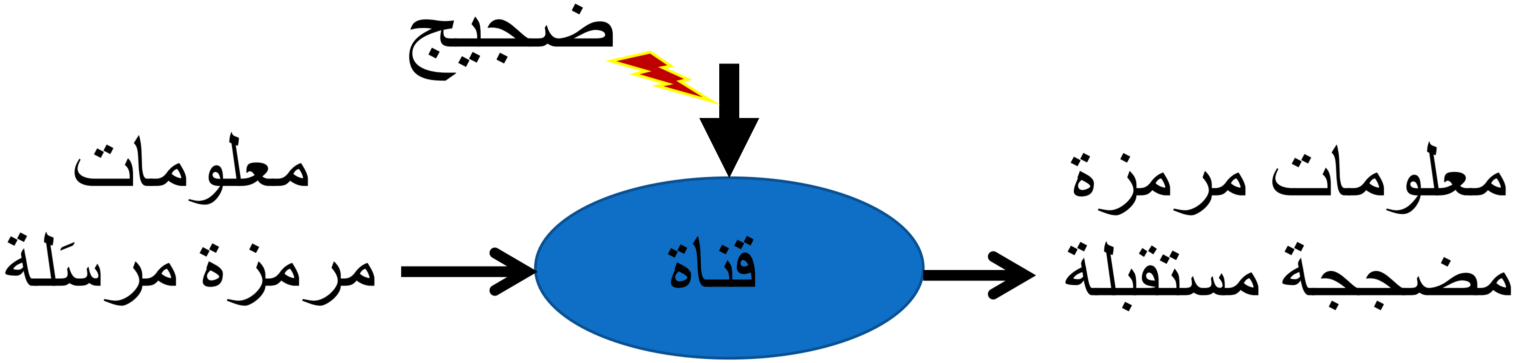


الصدى:

- يأتي من انعكاس الإشارة عن نهايات مقاطع دارة الاتصال المختلفة. يكون واضحا جدا في الوصلات الفضائية بسبب المدة الطويلة التي يستغرقها انتشار الإشارة إلى القمر الصنعي.

ترميز القناة

قناة الاتصال: الضجيج

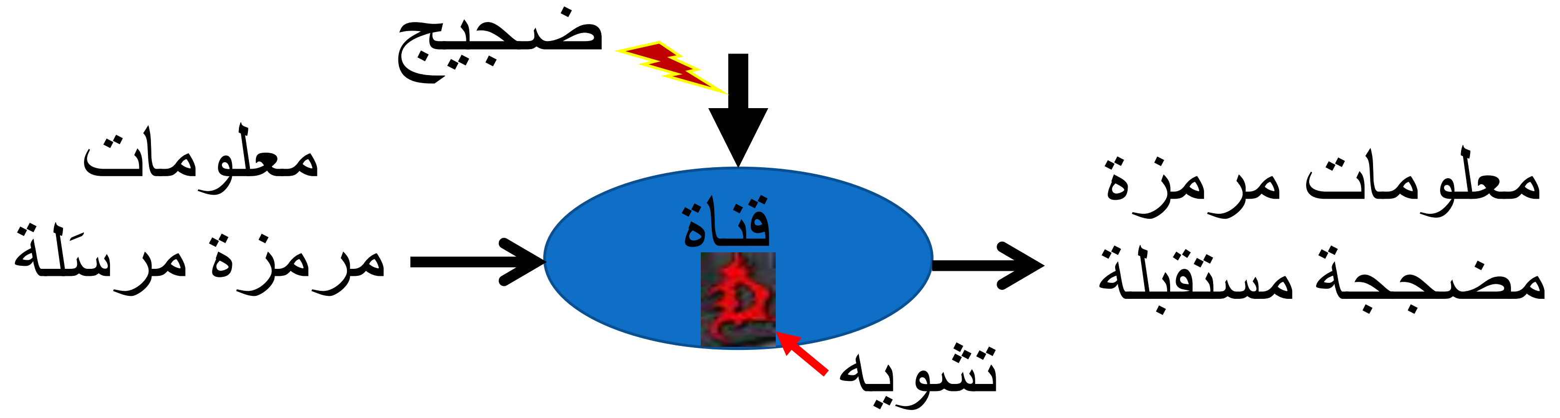


طنين الخمسين هرتز: هَمْ Hum

يحصل نتيجة لتسرب إشارة شبكة الكهرباء العامة إلى خط الاتصال، وغالبا ما يلاحَظ في الخطوط الهاتفية السلكية التي تختلف مواصفاتها عن المواصفات القياسية.

ترميز القناة

قناة الاتصال: التشويه Distortion

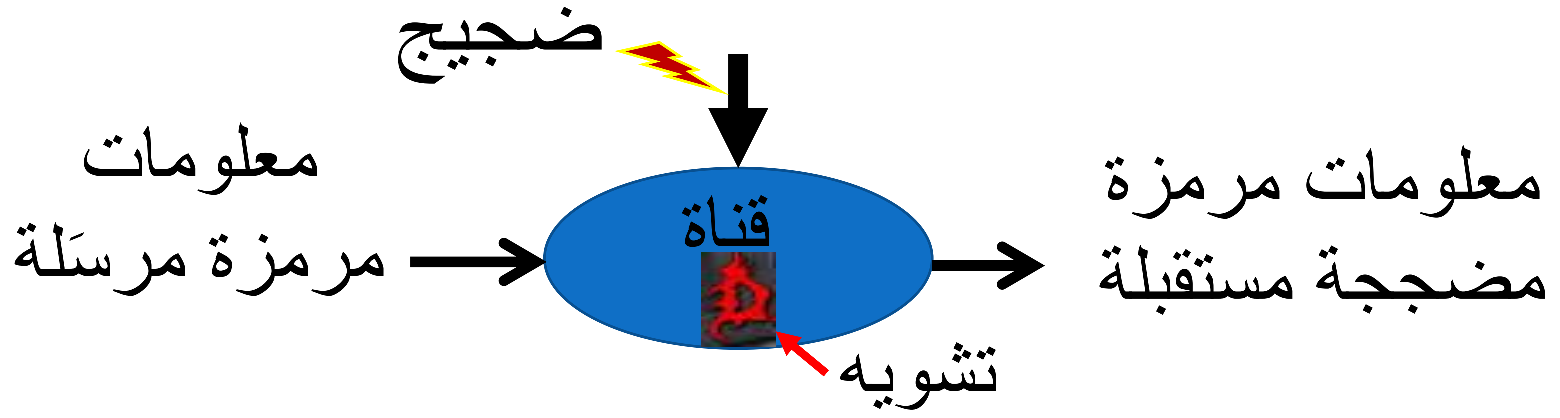


التشويه:

يحصل بسبب لاخطية تابع تحويل قناة الاتصال، وينجم عن التخميد والتخميد المطالي والتشويه الطوري ولاخطية العناصر الإلكترونية والخفوت الترددي الانتقائي.

ترميز القناة

قناة الاتصال: التشويه

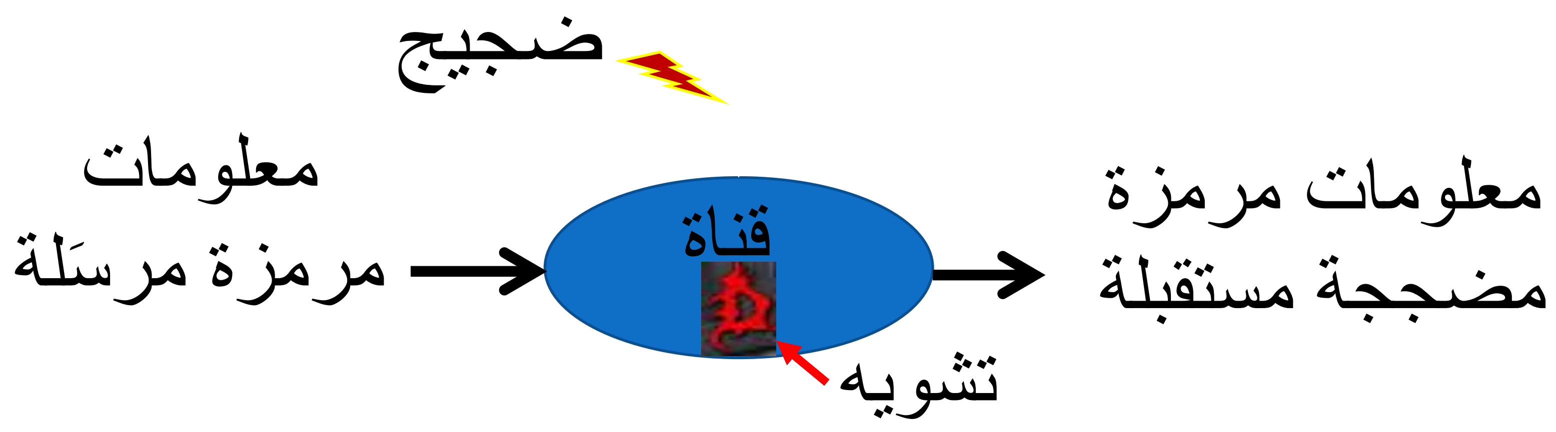


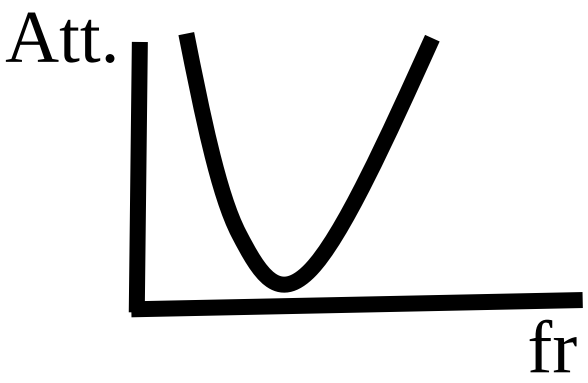
التخميد attenuation:

يحصل التخميد نتيجة لضياع طاقة الإشارة أثناء نقلها في مقاومة الأسلاك الأومية أو في عملية الانتشار الكهرمغنطيسي. ينعكس التخميد على شكل انخفاض في نسبة الإشارة إلى الضجيج.

ترميز القناة

قناة الاتصال: التشويه



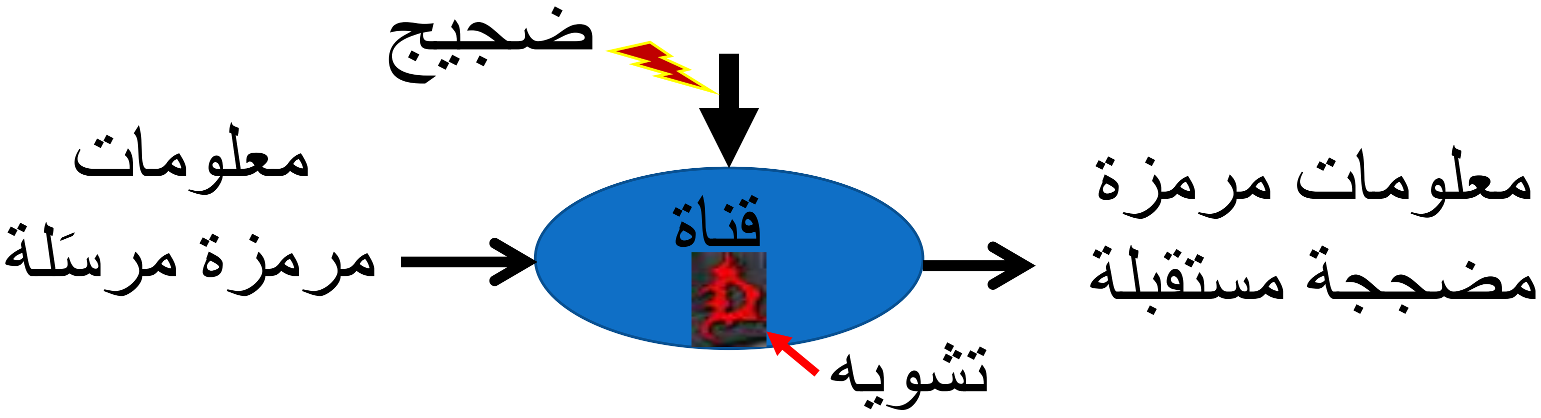


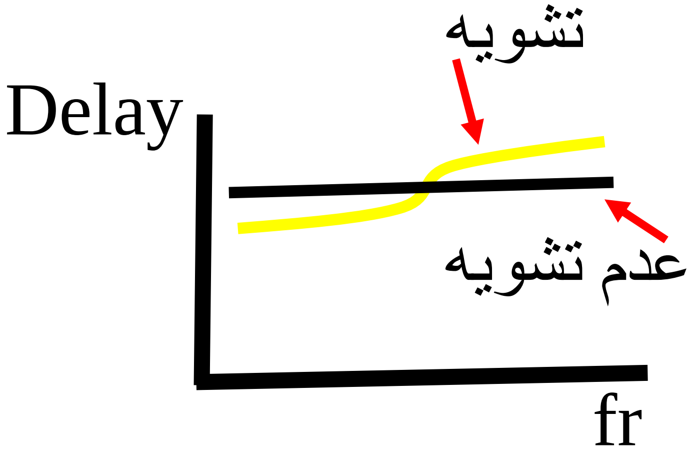
التخميد المطالي amplitude attenuation:

ينجم التخميد المطالي عن عدم تمرير القناة كل الترددات الموجودة في طيف الإشارة بنفس المستوى. فمثلا، تمرر القنوات الهاتفية السلكية الترددات التي بجوار الـ 1000 هرتز على نحو جيد، وتخمّد الترددات التي هي أقل وأكبر.

ترميز القناة

قناة الاتصال: التشويه



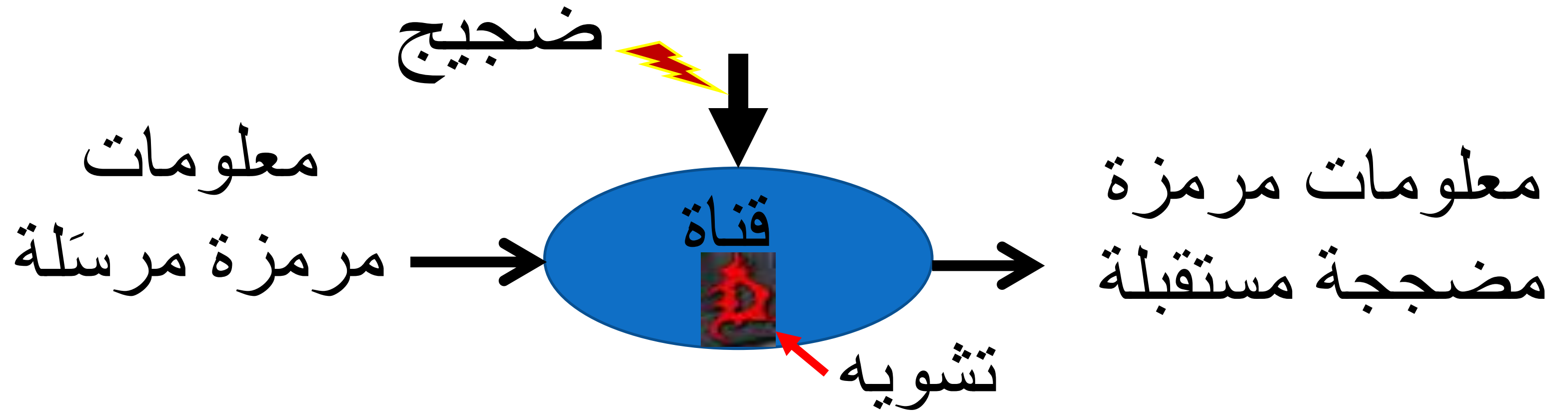


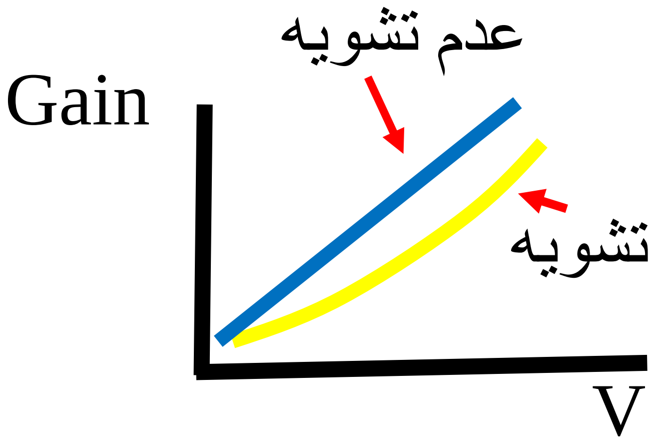
التشويه الطوري phase distortion:

ينجم التشويه الطوري عن تأخير القناة للترددات الموجودة في طيف الإشارة بمدد مختلفة.

ترميز القناة

قناة الاتصال: التشويه



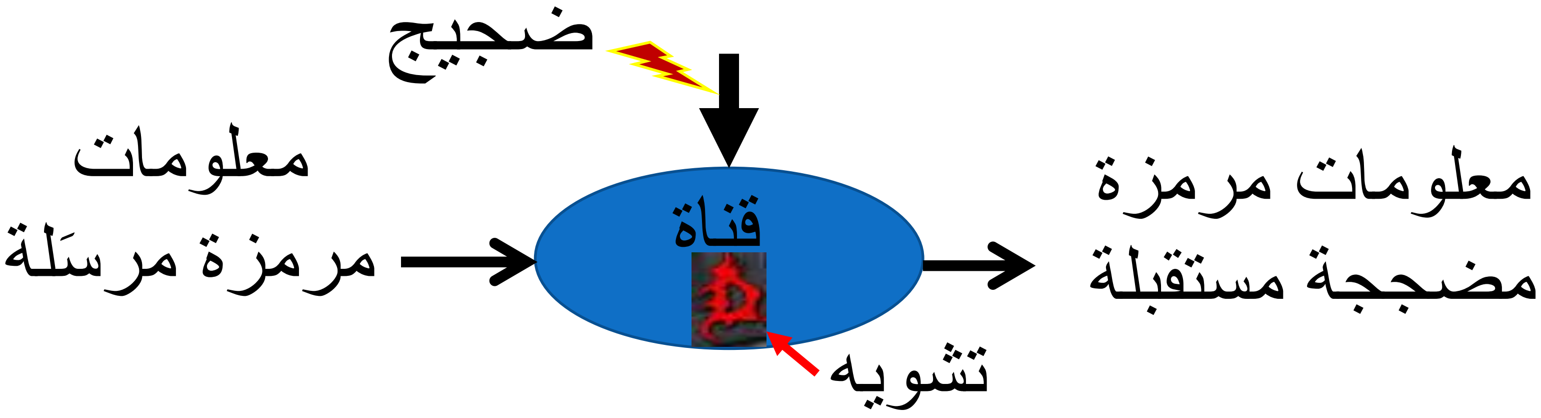


لاخطية العناصر الإلكترونية:

ينجم هذه التشويه عن تغير تكبير العناصر نصف الناقلة مع تغير جهد الإشارة الكهربائي. تؤدي اللاخطية إلى ظهور توافقيات في طيف الإشارة.

ترميز القناة

قناة الاتصال: التشويه

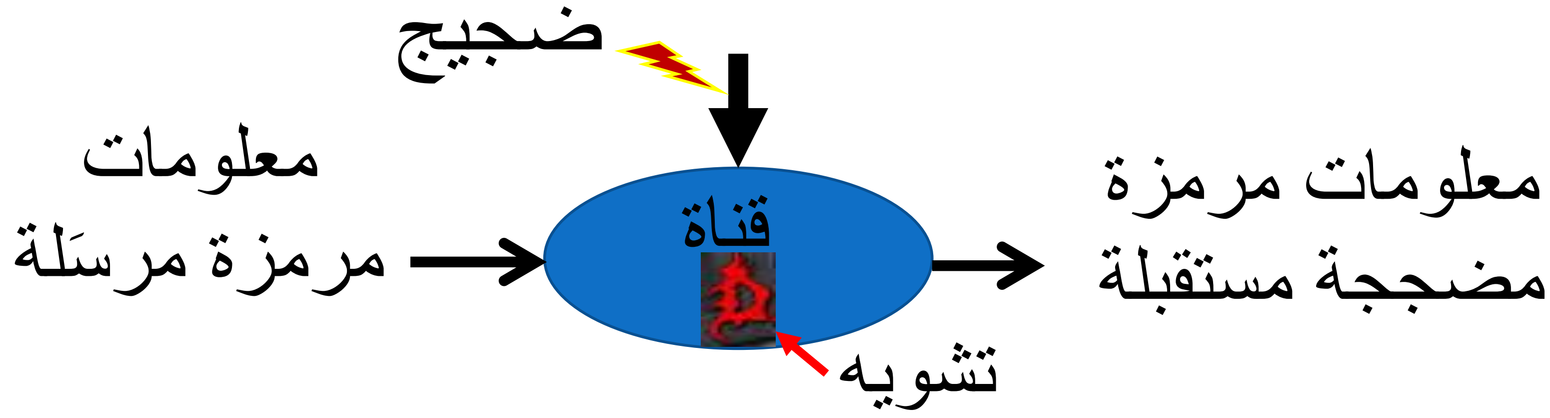


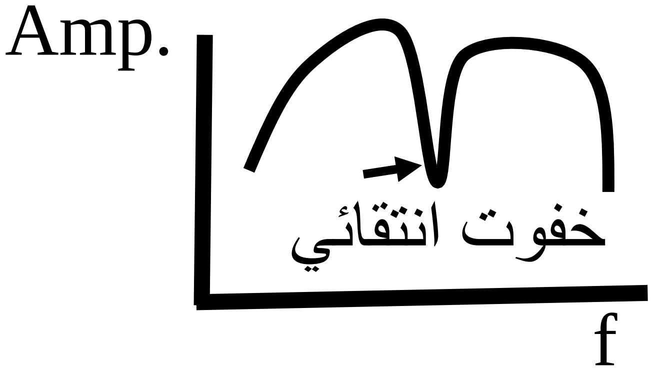
الخفوت fading:

ينجم الخفوت عن تعدد مسارات الإشارة ووصول عدة نسخ منها إلى المستقبل بأطوار مختلفة تعمل على إضعافها وتقويتها على نحو دائم مع الزمن. وتحصل المسارات المتعددة بسبب انعكاس الإشارة عن الأبنية في حالة الأمواج القصيرة جدا، وعن طبقات الجو المتأينة في حالة الأمواج القصيرة.

ترميز القناة

قناة الاتصال: التشويه





الخفوت الترددي الانتقائي frequency selective fading:

نوع من الخفوت يحصل حزمة ترددية ضيقة، وليس على كامل حزمة الإشارة الترددية.

ترميز القناة

قناة الاتصال: تابع التحويل

Transfer function

$$x(t) = \sum_i s_i \, \delta(t - iT) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) + n(t)$$

$n(t)$

نموذج عام للقناة

النموذج العام للقناة:

$\{s_i\}$ سلسلة من بتات المعلومات تفصل بينها فواصل زمنية مقدار كل منها T ثانية.

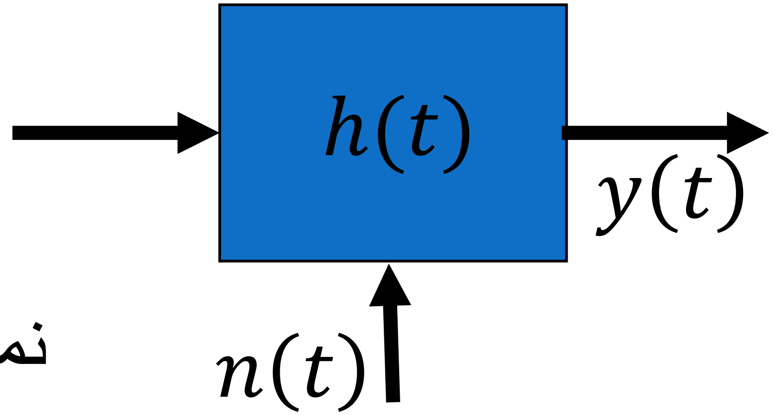
$\delta(t)$ تابع ديراك. $\delta(t - iT)$ تابع ديراك في اللحظة iT.

$h(t)$ الاستجابة الزمنية للقناة الموافقة **لتابع التحويل** $H(f)$ في المجال الترددي.

ترميز القناة قناة الاتصال

$$x(t) = \sum_i s_i \, \delta(t - iT)$$

نموذج عام للقناة



$$y(t) = x(t) * h(t) + n(t)$$

تلاف

النموذج العام للقناة:

$n(t)$ ضجيج القناة

$y(t)$ خرج القناة

ترميز القناة قناة الاتصال

$$x(t) = \sum_i s_i\, \delta(t - iT)$$

$$h(t)$$

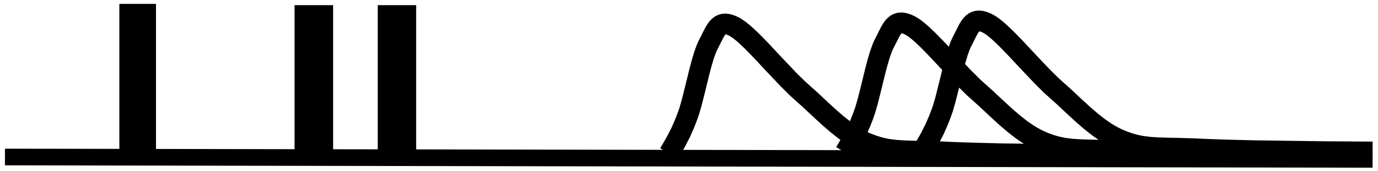
$$y(t) = x(t) * h(t) + n(t)$$

$$n(t)$$

نموذج عام للقناة

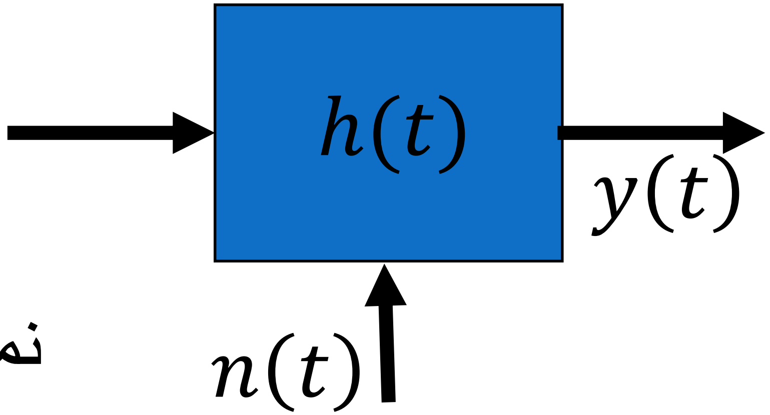
النموذج العام للقناة:

في الحالة العامة يؤدي التشويه إلى امتطاط رموز المعلومات في القناة، ومن ثم إلى تراكبها وتداخلها فيما يسمى بالتداخل بين الرموز Intersymbol Inerference (ISI).



ترميز القناة قناة الاتصال

$$x(t) = \sum_i s_i\, \delta(t - iT)$$



$$y(t) = x(t) * h(t) + n(t)$$

$n(t)$

نموذج عام للقناة

النموذج العام للقناة:

$h(t)$ تمثل مجمل أنواع التشويه الحاصل في القناة

$n(t)$ تمثل مجمل أنواع الضجيج في القناة

ترميز القناة

قناة الاتصال: النموذج المبسط

$$x(t) = \sum_i s_i \, \delta(t - iT) \longrightarrow \oplus \longrightarrow y(t) = x(t) + n(t)$$

$$n(t) \uparrow$$

نموذج مبسط للقناة

النموذج المبسط للقناة:

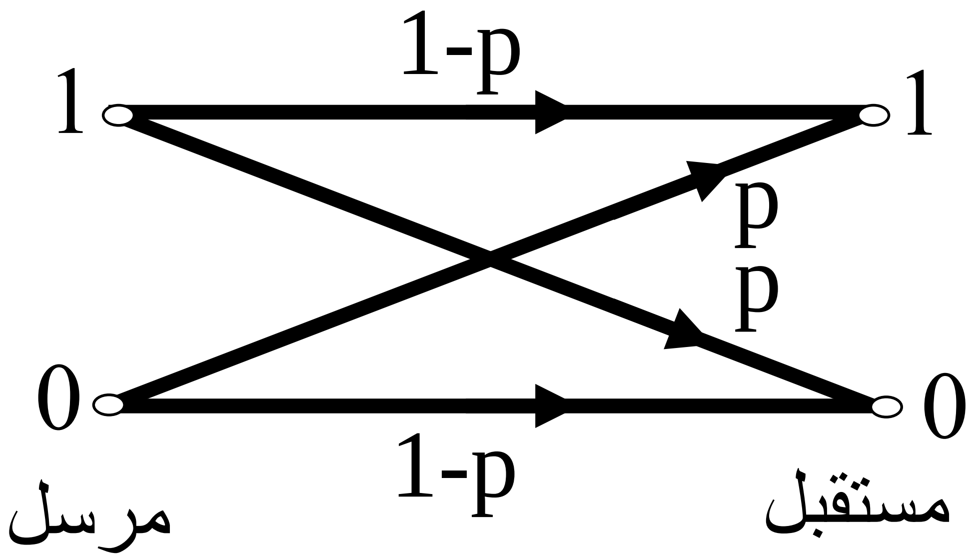
قناة مثالية لا تُدخل تشويه في الإشارة: $\boldsymbol{h(t) = 1}$

ضجيج غوصي جمعي (حراري، أبيض، طبيعي): $\boldsymbol{n(t)}$

ترميز القناة القناة الاثنانية المتناظرة

القناة الاثنانية المتناظرة

هي قناة بسيطة لا تُدخل في الإشارة تشويهها، وتُدخل فيها ضجيجا غوصيا فقط.



تحصل أخطاء في نقل البيانات من المرسل إلى المستقبل باحتمال يساوي p. وهذا ينطبق على الواحدات والأصفار.

تصل البت سليمة إلى المستقبل باحتمال يساوي 1-p.

ترميز القناة تابع الالتباس equivocation

افترض أننا أرسلنا سلسلة من الرموز $x_i \in \{0,1\}$ بسرعة 1000 رمز في الثانية باحتمال:

$$p_0 = p_1 = 1/2$$

أثناء النقل، يؤدي الضجيج إلى حصول أخطاء في الإشارة المكشوفة في المستقبل، أي أن الـ 0 يُكشف على أنه 1، ويُكشف الـ 1 على أنه 0. فما هو معدل نقل المعلومات حينئذ إذا كان معدل الخطأ 1%؟

ترميز القناة تابع الالتباس

بالتأكيد، سوف يكون المعدل أقل من 1000 بت في الثانية بسبب وجود نسبة خطأ تساوي 1%. هذا يوحي بأن عدد الأخطاء في الثانية يساوي 10، ومن ثم يكون المعدل 990 بت في الثانية.

لكن هذا غير صحيح لأنه لا يأخذ في الحسبان جهل المستقبل بمواقع الأخطاء.

ترميز القناة تابع الالتباس

في الحالة المتطرفة عندما يكون الضجيج كبيرا بحيث تصبح الرموز المستقبلة مستقلة تماما عن الرموز المرسلة، يكون احتمال استقبال 1 أو 0 مساويا 1/2 بقطع النظر عن الرموز المرسلة. ومن ثَمَّ، يكون نصف الرموز المستقبلة صحيحا بالمصادفة البحتة، ونقول حينئذ، وفقا للحجة السابقة، أن معدل الإرسال هو 500 بت في الثانية، في حين أنه لا تكون أية معلومات قد أُرسلت. ونحصل على نتيجة مماثلة لو استغنينا عن القناة كليا وولدنا رموزا عشوائية في المستقبل بالطرة والنقش.

ترميز القناة تابع الالتباس

من الواضح أن الإجراء الصحيح الذي يجب تطبيقه على المعلومات المرسلة هو الأخذ في الحسبان لتلك المعلومات المفقودة في طرف الاستقبال، أو للارتياب في الإشارة المستقبلة المقابلة لإشارة أرسلناها فعلا. ومن مناقشتنا السابقة للإنتروبي بصفته مقياسا للارتياب يبدو من المعقول استعمال إنتروبيا مشروطا للرسالة، استنادا إلى معرفتنا بالرسالة المستقبلة، ليكون مقياسا للمعلومات المفقودة. بذلك يكون معدل الإرسال الفعلي R هو حاصل طرح الإنتربي الشرطي للرسالة المستقبلة من إنتروبي الرسالة المرسلة:

$$R = H(X) - H(Y|X)$$

ترميز القناة تابع الالتباس

معدل الإرسال هو المعلومات المشتركة بين الرموز المرسلة والرموز المستقبلة:

$$R(X,Y) = I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) \\ = H(Y) - H(Y|X)$$

حيث:

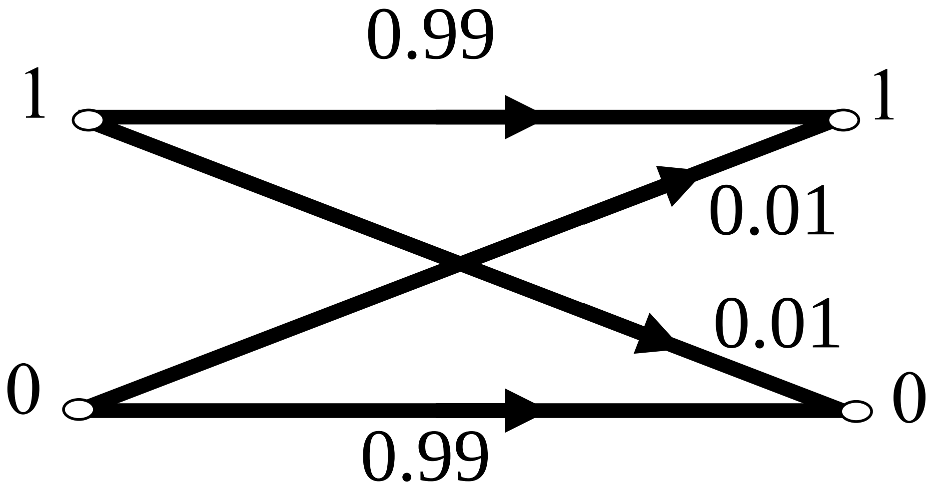
$$H(X|Y) = \sum_{X,Y} P(X|Y)\ log\, P(X|Y)$$

هو تابع الالتباس.

ترميز القناة تابع الالتباس

يسمى الإنتروبي الشرطي $H(Y|X)$ بتابع الالتباس لأنه يمثل المعلومات الملتبسة في المعلومات المستقبلة. أي إنه يعبر عن المعلومات المستقبلة التي فيها خطأ.

ترميز القناة تابع الالتباس

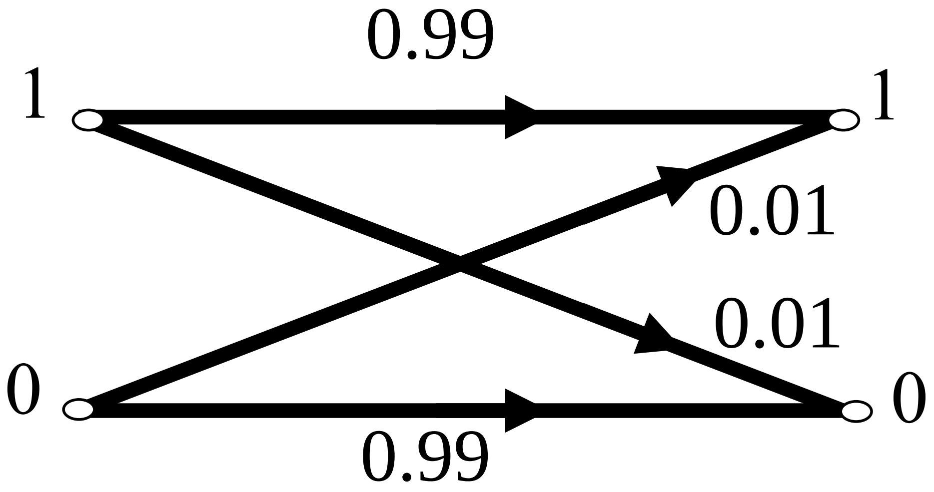


مثال:

في المثال السابق لدينا:

$$P(X = 1|Y = 1) = 0.99$$
$$P(X = 1|Y = 0) = 0.01$$
$$P(X = 0|Y = 0) = 0.99$$
$$P(X = 0|Y = 1) = 0.01$$

ترميز القناة تابع الالتباس

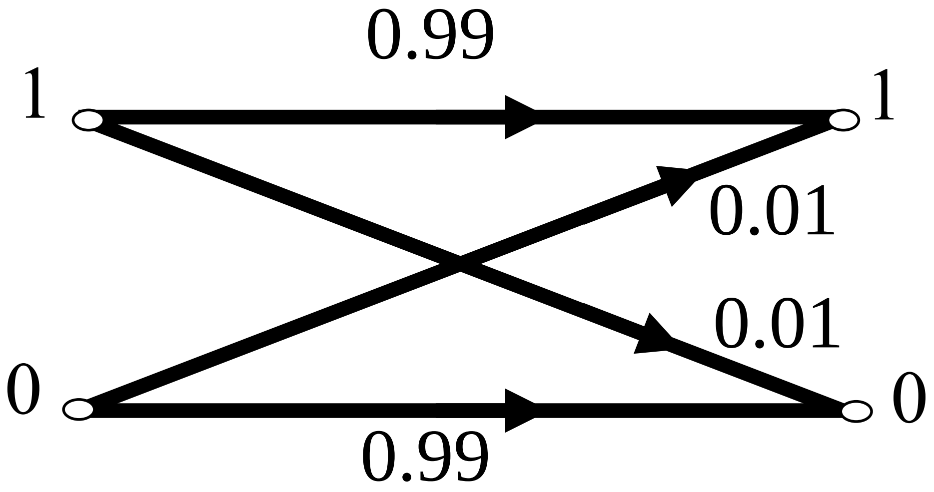


الحل:

$$H(Y|X) = -(0.99 \log 0.99 + 0.01 \log 0)$$
$$= 0.081\ bit/symbol$$

أي إن مقدار الالتباس في المعلومات المستقبلة يساوي 0.081 بت للرمز.

ترميز القناة تابع الالتباس



ومن ثم تكون المعلومات المشتركة بين المعلومات المرسلة والمعلومات المستقبلة، أو معدل إرسال المعلومات الفعلي:

$$\mathrm{I(X,Y)} = 1000 - 81 = 919 \quad bit/sec$$

وهي قيمة تختلف عن القيمة الحدسية 990 بت في الثانية.

ترميز القناة تابع الالتباس

نتيجة:

يجب إرسال عدد من البتات الإضافية على قناة لتصحيح الخطأ يساوي قيمة تابع الالتباس $H(Y|X)$ من أجل التعويض عن البتات الخاطئة

ترميز القناة

سعة القناة Channel Capacity

تعريف سعة القناة:

لكي تستطيع القناة المضججة نقل معلومات المنبع، يجب أن تساوي سعتها C معدل الإرسال الأعظمي الممكن، ولذا تُعرَّف سعة القناة بـ:

$$C = \mathrm{MAX}(R) = \mathrm{Max}(H(X) - H(Y|X))$$

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t) = \sum_i s_i\,\delta(t - iT) \longrightarrow \bigoplus \longrightarrow y(t) = x(t) + n(t)$$

نموذج مبسط للقناة $n(t)$

تعطى **سعة القناة** C في حالة القناة البسيطة:

- التي لا تُدخل تشويها في الإشارة،
- وذات عرض المجال الترددي W،
- والتي تُدخل فيها ضجيجا غوصيا جمعا، بالعلاقة:

$$C = W\,log\,(1 + SNR)$$

حيث SNR هي النسبة الخطية (لا اللوغاريتمية) لاستطاعة الإشارة إلى استطاعة الضجيج.

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t) = \sum_i s_i \, \delta(t - iT) \longrightarrow \oplus \longrightarrow y(t) = x(t) + n(t)$$

$n(t)$ نموذج مبسط للقناة

اشتقاق سعة القناة (نظرية شانون)

باستعمال رموز الشكل المبين في الأعلى، لدينا:

$$C = MAX(R) = MAX(H(x) - H(y|x))$$

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t) = \sum_i s_i\, \delta(t - iT) \longrightarrow \oplus \longrightarrow y(t) = x(t) + n(t)$$

$n(t)$ نموذج مبسط للقناة

من الشكل، لدينا:

$$y = x + n$$

لذا:

$$H(x,y) = H(x,n)$$

بنشر الطرفين الأيسر والأيمن مع الأخذ في الحسبان أن x و n مستقلان عن بعضهما، نحصل على:

$$H(y) + H(x|y) = H(x) + H(n)$$

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t)=\sum_i s_i\,\delta(t-iT)\longrightarrow \bigoplus \longrightarrow y(t)=x(t)+n(t)$$

$n(t)$ نموذج مبسط للقناة

ومنه يكون معدل الإرسال:

$$R=H(x)-H(y|x)$$
$$=H(y)-H(n)$$

لذا:

$$C=\mathrm{Max}(H(y)-H(n))$$

ونظرا إلى أنه ليس لدينا سيطرة على الضجيج، يقتضي تعظيم C تعظيم $H(y)$، أي تعظيم إنتروبي الإشارة المستقبلة.

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t)=\sum_i s_i\,\delta(t-iT) \longrightarrow \bigoplus \longrightarrow y(t)=x(t)+n(t)$$

$n(t)$ نموذج مبسط للقناة

فيما يخص التوزع الغوصي لمتغير عشوائي u عموما، تعطى كثافة احتماله بالعلاقة:

$$p(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\left(u^2/2\sigma^2\right)}$$

حيث σ الانحراف المعياري (التشتت) للمتغير العشوائي.

وفي حالة الإشارات المستمرة، يعطى الإنتروبي بالعلاقة:

$$H(u)=-\int p(u)\log p(u)du$$

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t) = \sum_i s_i\, \delta(t - iT) \longrightarrow \oplus \longrightarrow y(t) = x(t) + n(t)$$

$n(t)$ نموذج مبسط للقناة

$$\mathrm{H(u)} = \int \mathrm{p(u)} \log\sqrt{2\pi}\sigma\, \mathrm{du} + \int \mathrm{p(u)}\, \frac{\mathrm{u}^2}{2\sigma^2} \mathrm{du}$$

$$= \log\sqrt{2\pi}\sigma + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \log\sqrt{2\pi}\sigma + \log\sqrt{e}$$

لأن: $\log_e \sqrt{e} = \frac{1}{2}$، حيث e هو العدد النيبري.

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t) = \sum_i s_i\, \delta(t - iT) \longrightarrow \oplus \longrightarrow y(t) = x(t) + n(t)$$

$n(t)$ نموذج مبسط للقناة

ومنه: يكون إنتروبي المتغير العشوائي الغوصي:

$$H(u) = \log\sqrt{2\pi e}\sigma = \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2$$

حيث σ^2 هي استطاعة الضجيج الوسطى.

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t) = \sum_i s_i\,\delta(t - iT) \longrightarrow \oplus \longrightarrow y(t) = x(t) + n(t)$$

نموذج مبسط للقناة $n(t)$

من ناحية أخرى، يتحقق الإنتروبي الأعظمي للإشارة المستقبلة إذا كان تابع كثافة احتمال y غوصيا. وحينئذ تكون الإشارة المستقبلة هي مجموع متغيرين غوصيين. فإذا كانت الاستطاعة الوسطية للضجيج هي N، وكانت الاستطاعة الوسطية للإشارة المرسلة هي P، كانت الاستطاعة الوسطى للإشارة المستقبلة $P + N$. وعندئذ يعطى إنتروبي y بـ:

$$H(y) = \log\sqrt{2\pi e}\sigma = \frac{1}{2}\log 2\pi e(P + N)$$

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t) = \sum_i s_i\, \delta(t - iT) \longrightarrow \bigoplus \longrightarrow y(t) = x(t) + n(t)$$

$n(t)$ نموذج مبسط للقناة

من ناحية أخرى، وبناء على نظرية شانون-هارتلي، معدل النبضات الأعظمي (الرموز في حالتنا) التي يمكن إرسالها على القناة يجب أن يحقق العلاقة:

$$\mathrm{f_s} \le 2\mathrm{W}$$

(يجب عدم خلط هذه العلاقة مع علاقة تردد التقطيع في نظرية نايكويست).

ويتحقق الإنتروبي الأعظمي في الثانية للإشارة المستقبلة عندما $f_s = 2W$. لذا:

$$H_{max}(y) = 2W\, H(y)$$

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t) = \sum_i s_i \, \delta(t - iT) \longrightarrow \bigoplus \longrightarrow y(t) = x(t) + n(t)$$

$n(t)$ نموذج مبسط للقناة

$$H_{max}(y) = 2W \, H(y)$$
$$= \frac{1}{2} 2W \log 2\pi e(P + N)$$
$$= W \log 2\pi e(P + N)$$

ويكون إنتروبي الضجيج أيضا:

$$H(n) = W \log 2\pi e(N)$$

ترميز القناة

سعة القناة

$$x(t)=\sum_i s_i\,\delta(t-iT) \longrightarrow \bigoplus \longrightarrow y(t)=x(t)+n(t)$$

$n(t)$ نموذج مبسط للقناة

$$\begin{aligned}
C &= Max(H(y)-H(n)) \\
&= W\log 2\pi e(P+N) - W\log 2\pi e(N) \\
&= W\log\frac{P+N}{N} \\
&= W\log(1+SNR)
\end{aligned}$$

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

سبق أن رأينا أن قيمة تابع الالتباس $H(X|Y)$ تعبر عن المعلومات المستقبلة التي فيها خطأ. لذا يجب إرسال معلومات إضافية لتصحيح الأخطاء قيمتها تساوي $H(X|Y)$ من أجل التعويض عن البتات الخاطئة.

إذا كانت سعة قناة التصحيح أكبر من $H(X|Y)$ أو مساوية له، أمكن أن نرمّز بيانات التصحيح بطريقة تمكن من تصحيح الغالبية العظمى من الأخطاء عدا جزء صغير ما ϵ منها.

وهذا غير ممكن إذا كانت سعة قناة التصحيح أصغر من $H(X|Y)$.

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

يمكن أن نرى ذلك مما يلي. من تعريف الإنتروبي لدينا:

$$H(X,Z) = H(X) + H(Z|X)$$

لذا، من أجل أي متغيرات عشوائية X,Y,Z لدينا:

$$H(X,Z|Y) \geq H(X\,|Y)$$

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

ويمكن نشر الجانب الأيسر على النحو التالي:

$$H(Z|Y) + H(X|Y,Z) \geq H(X|Y)$$

$$\begin{aligned} H(X|Y,Z) &\geq H(X|Y) - H(Z|Y) \\ &\geq H(X|Y) - H(Z) \end{aligned}$$

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

إذا اعتبرنا X الإشارة المرسلة، و Y الإشارة المستقبلة، و Z المعلومات المرسلة على قناة التصحيح، كان الطرف الأيمن هو الالتباس مطروحا منه معدل الإرسال على قناة التصحيح. إذا كانت سعة قناة التصحيح (إنتروبي Z) أصغر من قيمة الالتباس، كان الطرف الأيمن أكبر من الصفر. لكن هذه القيمة هي الارتياب فيما تم إرساله ($H(X|Y,Z)$) بعد معرفة الإشارة المرسلة ومعلومات التصحيح. وإذا كان هذا الارتياب أكبر من الصفر فإن معدل الأخطاء التي يمكن تصحيحها لا يمكن أن يكون أصغر ما يمكن، أي ϵ.

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

النتيجة

يجب أن تكون سعة قناة التصحيح أكبر من قيمة الالتباس أو مساوية له:

$$C_{cor} \geq H(X|Y)$$

المراجع

A Mathematical Theory of Communication, By C. E. SHANNON, The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379–423, 623–656, July, October, 1948.

The Theory of Information and Coding, Robert J. McEliece, Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

BASIC CONCEPTS IN INFORMATION THEORY, Marc URO

EE 376A: Information theory Winter 2017 Lecture 1 — January 10, Lecturer: David Tse .

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

سبق أن رأينا أن قيمة تابع الالتباس $H(X|Y)$ تعبر عن المعلومات المستقبلة التي فيها خطأ. لذا يجب إرسال معلومات إضافية لتصحيح الأخطاء قيمتها تساوي $H(X|Y)$ من أجل التعويض عن البتات الخاطئة.

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

نظرية ترميز القناة (نظرية شانون):

من أجل أي قناة عديمة الذاكرة وملوثة بضجيج مهما كانت درجته، من الممكن نقل بيانات رقمية عليها خالية من الأخطاء تقريبا بمعدل أعظمي يمكن حسابه.

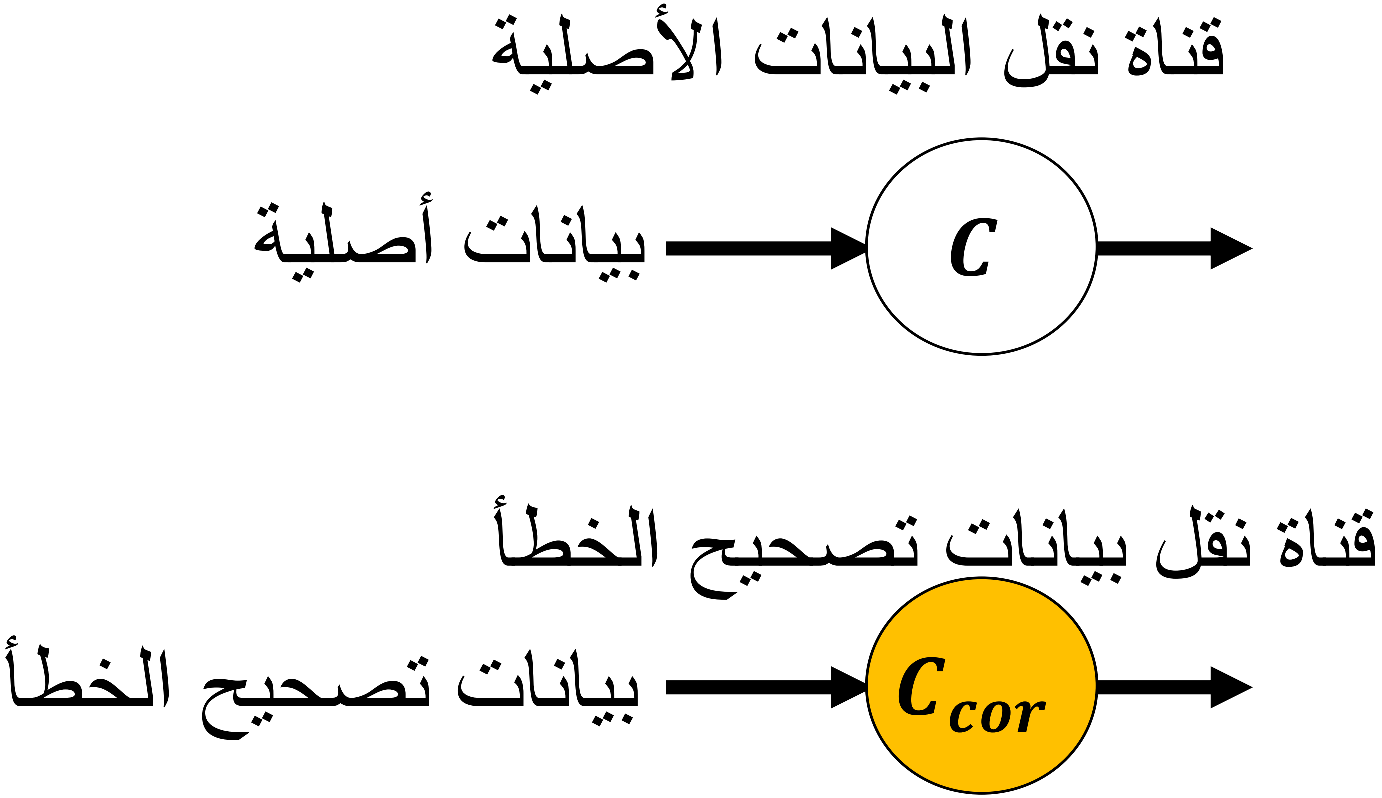
ترميز القناة تصحيح الأخطاء

نظرية ترميز القناة (نظرية شانون):

من أجل أي قناة عديمة الذاكرة وملوثة بضجيج وسعتها تساوي C وتنقل البيانات بمعدل $R<C$، توجد أرمزة تجعل احتمال الخطأ في البيانات المستقبلة صغيرا بقدر ما نريد. هذا يعني أنه يمكننا نقل بيانات خالية من الأخطاء تقريبا بأي معدل R أصغر من سعة القناة C.

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

مقترح شانون لتصحيح الأخطاء:
استعمال قناة إضافية لنقل بيانات تصحيح الخطأ



$$C_{cor} \geq H(X|Y)$$

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

مقترح شانون صعب التطبيق عمليا:

- صعوبة في العثور على الأرمزة.
- صعوبة في تحليلها.
- صعوبة في تنفيذها.

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

لا مغزى من استعمال قناة إضافية عمليا، إذ يمكن استعمال قناة الاتصال نفسها لنقل البيانات الأساسية وبيانات التصحيح.

الطريقة المعتمدة عمليا لتصحيح الأخطاء: قناة واحدة سعتها:

$$C = R_d + R_{Cor}$$

R_d: معدل البيانات الأصلية،

R_{Cor}: معدل بيانات التصحيح.

ترميز القناة تصحيح الأخطاء

توضع البيانات الأصلية وبيانات التصحيح ضمن لبِنة واحدة:

بيانات تصحيح بمعدل R_{cor}	بيانات رسالة بمعدل R_d

ترميز القناة كشف وتصحيح الأخطاء

مثال: بت التدقيق parity bit

كلمة بيانات سباعية	عدد الواحدات	بت تدقيق زوجية	بت تدقيق فردية
0000000	0	00000000	00000001
1010001	3	10100011	10100010
1101001	4	11010010	11010011
1111111	7	11111111	11111110

بت التدقيق الزوجية تجعل عدد الواحدات الكلي زوجيا: $pb=b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7$

بت التدقيق الفردية تجعل عدد الواحدات الكلي فرديا: $pb=b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+1$

ترميز القناة كشف وتصحيح الأخطاء

مثال: بت التدقيق parity bit

تكشف الأخطاء التي عددها فردي،
ومن ضمنها خطؤها نفسها

لا تصحح الخطأ!

التصحيح:
عندما يكتشف المستقبل وجود الخطأ، يطلب من المرسل إعادة الإرسال.

ترميز القناة كشف وتصحيح الأخطاء

خصائص أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء:

يوضح المثال السابق الخصائص الأساسية لأرمزة كشف وتصحيح الأخطاء:

- نقل معلومات إضافية لتصحيح الخطأ، انسجاما مع مقترح شانون. معدل نقل البيانات الأصلية أقل من معدل النقل الفعلي على القناة.
- مقدرة الرماز على كشف الخطأ وتصحيحه ليست مطلقة.
- ليس كل رماز كشف للأخطاء قادرا على تصحيحها جزئيا أو كليا.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

تقسم سلسلة البيانات المراد ترميزها إلى لبِنات متتالية تسمى لبنات الرسالة، ويتألف كل منها من k بت. ثم تُرمَّز كل لبنة على انفراد بتحويلها إلى لبنة أخرى تسمى كلمة الرماز أو لبنة الرماز وتتكون من n بت، حيث $n>k$.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

مثال:

كلمة رسالة $m_0, m_1, \dots, m_{k-1}$ | بيانات تصحيح $a_0, a_1, \cdots a_m$

k bit | m bit

كلمة رماز مؤلفة من $n = k + m$ bit

2^k: كلمة رسالة

2^n: كلمة رماز ممكنة

$$2^k \ll 2^n$$

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

تعريف

معدل الرماز: $R = \frac{k}{n}$

مسافة هامينغ d: تعطى مسافة هامينغ بين أي كلمتي رماز بعدد المواقع المختلفة فيما بينهما.

ترميز القناة

أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

رماز الأغلبية majority code

مثال: من أجل $n = 3$ و $k = 1$:

لنفترض أن كلمة الرسالة هي 1. فنرسل 111. فإذا حصل خطآن في الكلمة المستقبلة، أي استقبلنا الكلمة 001 أو 100 أو 010، اخترنا أقرب كلمة رماز إليها، وهي 000 التي تقابل كلمة الرسالة 0، وحينئذ تكون نتيجة التصحيح خاطئة.

كلمة الرماز	كلمة الرسالة
0 0 0	0
1 1 1	1

في المستقبل، ننظر إلى ثلاثة البتات الموافقة للبت المرسَلة، وقيمة البت الأكثر تكرارا هي قيمة البت المكشوفة. إذا كان هناك خطأ واحد حصل التصحيح، وإلا كان كشف البت خطأ.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

رماز الأغلبية

كلمة الرماز	كلمة الرسالة
0 0 0	0
1 1 1	1

عدد الأخطاء القابلة للتصحيح 1.

المسافة بين كلمتي رماز: $d = 3$.

معدل الرماز: $R = \frac{1}{3}$

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

مثال اعتباطي: من أجل $n = 4$ و $k = 2$:

كلمة الرسالة	كلمة الرماز
0 0	0 0 0 0
0 1	1 1 0 1
1 0	0 0 1 1
1 1	1 1 1 1

استعملنا 4 كلمات رماز فقط من أصل 16 كلمة ممكنة.

المسافة الدنيا = 1

لا يمكن تصحيح كل الأخطاء

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

من الأمثلة السابقة يتضح أن اختيار نوع الرماز ليس اعتباطيا.
في رماز الأغلبية معدل الرماز منخفض، أي إن الهدر في استغلال سعة القناة كبير.
وفي المثال الأخير، تصحيح الأخطاء ليس ممكنا إطلاقا على نحو موثوق.

لذا، لا بد من اتباع منهجية متناسقة في اختيار الرماز.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

الرماز اللَّبِني الخطي linear block code

$m_0,m_1,\dots,m_{k-1}$ كلمة رسالة	$a_0,a_1,\cdots a_{n-k-1}$ بيانات تصحيح
k bit	n-k bit

كلمة رماز مؤلفة من n bit

كلمة رسالة :2^k

كلمة رماز ممكنة :2^n

$$2^k \ll 2^n$$

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

الرماز اللَّبِني الخطي

تُجرى عملية الترميز اللبني الخطي، أي حساب كلمة الرماز U، بضرب

الشعاع الممثِّل للبنة الرسالة m بالمصفوفة المولدة للرماز G:

$$U = m\,G$$

$$U = u_0, u_1, \cdots, u_{n-1} \qquad m = m_0, m_1, \cdots, m_{k-1}$$

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

المصفوفة المولدة Generator Matrix:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & p_{0,0} & p_{0,1} \cdots & p_{0,n-k-1} \\ 0 & 1 \cdots & 0 & 0 \cdots & p_{1,0} & p_{1,1} \cdots & p_{1,n-k-1} \\ 0 & 0 \cdots & 1 & 0 \cdots & p_{2,0} & p_{2,1} \cdots & p_{2,n-k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \cdots & p_{k-1,0} & p_{k-1,1} \cdots & p_{k-1,n-k-1} \end{bmatrix}$$

$$G = [I_k\ P]$$

I_k هي مصفوفة واحدية بعداها $k \times k$ ، و P هي أي مصفوفة بعداها $k \times (n-k)$

وعناصرها تحدد العلاقة بين بتات كلمة الرماز وكلمة الرسالة.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

الرماز اللَّبِني الخطي

تُختار المصفوفة P، ومن ثم المصفوفة المولدة G بحيث يكون الرماز المولد بحسب العلاقة رمازا خطيا. أي إن أسطر G يجب أن تكون مستقلة خطيا بعضا عن بعض.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

مثال:

من أجل $k = 3$ و $n = 6$، لتكن المصفوفة المولدة كالتالي:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

$$U = mG = [m_0\ m_1\ m_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

فتكون كلمات الرماز تراكيب خطية من بتات الرسالة:

$$U = m\,G$$

$$u_0 = m_0 \qquad u_1 = m_1 \qquad u_2 = m_2$$

$$u_4 = m_0 + m_2$$

$$u_5 = m_0 + m_1$$

$$u_6 = m_1 + m_2$$

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

النتيجة

m				U					
0	0	0	$\Leftrightarrow$	0	0	0	0	0	0
1	0	0	$\Leftrightarrow$	1	0	0	1	1	0
0	1	0	$\Leftrightarrow$	0	1	0	0	1	1
1	1	0	$\Leftrightarrow$	1	1	0	1	0	1
0	0	1	$\Leftrightarrow$	0	0	1	1	0	1
1	0	1	$\Leftrightarrow$	1	0	1	0	1	1
0	1	1	$\Leftrightarrow$	0	1	1	1	1	0
1	1	1	$\Leftrightarrow$	1	1	1	0	0	0

معدل الرماز: $R = \frac{1}{2}$

مسافة هامينغ الدنيا: $d_{min} = 3$

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

مثال:

كلمة الرسالة: 1 1 0

كلمة الرماز: 1 1 0 1 0 1

كلمة مستقبلة: 1 1 0 1 0 0

أقرب كلمة: 1 1 0 1 0 1 هي الكلمة المرسلة، ويحصل التصحيح.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

مثال:

كلمة الرسالة: 1 1 0

كلمة الرماز: 1 1 0 1 0 1

كلمة مستقبلة: 1 1 0 1 1 0 خطآن

أقرب كلمة: 1 0 0 1 1 0 الكشف، ومن ثم التصحيح، خطأ.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

قدرة الرماز اللَّبِني الخطي على كشف الأخطاء

يمكن البرهان على أن الرماز الخطي يستطيع تصحيح t خطأ:

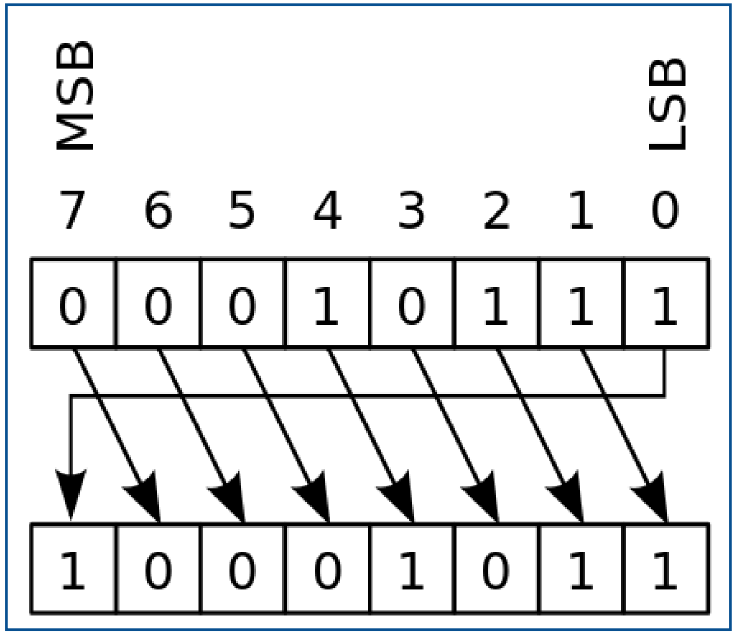
$$t \leq \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor$$

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

أنواع الأرمزة اللَّبِنية الخطية

Reed–Solomon codes, Hamming codes, Hadamard codes, Expander codes, Golay codes, and Reed–Muller codes

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء



الرماز اللَّبِني الدوري

تنتُج كلمات هذا الرماز من الإزاحة الدورانية للكلمات الأخرى.

إذا كانت الكلمة : $U = u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}$

كلمة رماز، كانت الكلمة: $U = u_{n-1}, u_0, \cdots, u_{n-2}$

كلمة رماز أيضا.

والكلمة الصفرية : $U = 0, 0, \cdots, 0$، هي كلمة رماز أيضا.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

الرماز اللَّبِني الدوري

يجري تكوين كلمات الرماز بضرب كثير حدود يمثل بتات الرسالة بكثير حدود آخر يسمى كثير الحدود المولد، وذلك في حقل غالوا.

أسهل طرائق حساب الرماز الدوري هي استعمال سجلات الإزاحة.

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

الرماز اللَّبِني الدوري

مثال: $k = 3$ و $n = 7$

كلمة الرماز	كلمة الرسالة
0 0 0 0 0 0 0	0 0 0
1 0 1 1 1 0 0	1 0 0
0 1 0 1 1 1 0	0 1 0
1 1 1 0 0 1 0	1 1 0
0 0 1 0 1 1 1	0 0 1
1 0 0 1 0 1 1	1 0 1
0 1 1 1 0 0 1	0 1 1
1 1 0 0 1 0 1	1 1 1

ترميز القناة أرمزة كشف وتصحيح الأخطاء

قدرة الرماز اللَّبِني الدوري على كشف الأخطاء

يمكن البرهان على أن الرماز اللَّبِني الدوري يستطيع تصحيح t خطأ:

$$t \leq \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor$$

المراجع

A Mathematical Theory of Communication, By C. E. SHANNON, The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379–423, 623–656, July, October, 1948.

The Theory of Information and Coding, Robert J. McEliece, Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

BASIC CONCEPTS IN INFORMATION THEORY, Marc URO

EE 376A: Information theory Winter 2017 Lecture 1 — January 10, Lecturer: David Tse .

1. العمليات التي تُطبَّق على المعلومات:

- عمليات من أجل نقلها، وهذه تتضمن تأهيلها للنقل بوجود الضجيج والتشويش والتشويه، وحمايتها من الخطأ من أجل استعادتها على نحو صحيح، وحمايتها من السرقة والعبث بها.
- عمليات من أجل حفظها.
- عمليات من أجل استعمالها.
- عمليات من أجل تفسيرها، ومن أمثلة ذلك معالجة اللغات الطبيعية.

2. مرمّز المنبع:

يرمّز معلومات المنبع بطريقة أكثر إيجازا وذلك بحذف التكرار (الفائض redundancy) منها. والغرض من ذلك تخفيض معدل البيانات Data Rate التي سوف تُرسَل.

3. مرمّز القناة:

يُضيف مرمّز القناة حشوا (redundancy) إلى البيانات من أجل حماية البيانات المرسلة من أخطاء النقل.

4. مرمز المنبع يقلص البيانات، مرمز القناة يزيد البيانات.
5. لا ينطوي الحدث على معلومات إذا كان أكيدا.
6. إذا كان الحدث أكيدا، كان احتماله مساويا للواحد.
7. ينطوي الحدث على معلومات إذا كان احتمال حدوثه أصغر من الواحد.
8. إذا كان الحدثان x و y مستقلان عن بعضهما، ساوت المعلومات الذاتية المقترنة بحدوثهما معا مجموع المعلومات التي ينطوي عليها كل منهما على حدة:

$$I(x,y) = I(x) + I(y).$$

9. حين رمي حجر نرد متزن، يساوي احتمال الوقوع على الرقم خمسة $1/6$. ويساوي الغموض أو المعلومة الذاتية أو المفاجأة في هذا الحدث:

$$h(x) = -\log_2 \frac{1}{6} = 2.585 \quad bit$$

10. ما هو مقدار المعلومات الذاتية التي يحملها M رمزا مستقلا بعضا عن بعض؟
11. ما مقدار المفاجأة في العبارة: 1=1؟
12. ما مقدار المفاجأة في العبارة: 1=2؟ (نأخذ ***المتمم***).
13. ما مقدار المفاجأة في العبارة: x=y إذا علمنا أن المساواة تتحقق باحتمال يساوي 30%؟

14. ما نوع الغموض الذي ينطوي عليه السؤال التالي؟
15. ما مقدار الغموض في سحب بنت الكبة إذا علمنا أن الورقة المسحوبة هي ورقة كبة؟
16. احسب عدد البتات التي يمكن لقلابين أن يخزناها عندما تكون جميع وضعياتهما متساوية الاحتمال.
17. احسب الارتياب في وضعية حجر نرد متوازن، أي إنه يتخذ جميع وضعياته بنفس الاحتمال.
18. احسب إنتروبي ورقة شدة تُسحب عشوائيا، وإنتروبي ورقتين تُسحبان عشوائيا.
19. إذا أرسلت رسالة إلى صديق لك مكونة من حرفين فقط من الحروف اللاتينية التي يبلغ عددها 26 حرفا، فما هي كمية المعلومات المختلفة التي يحملها ذينك الحرفان؟
20. الإنتروبي: هو القيمة الوسطى للغموضات أو الارتيابات في قيم المتغير العشوائي.
21. تحصل القيمة العظمى للانتروبي عندما يكون توزع كثافة احتمال المتغير متجانسا.
22. تحصل القيمة العظمى للمعلومات الذاتية الكامنة في رمي النقدة عندما تكون النقدة متزنة.
23. القلاب غير المتزن لا يخزن بتا كاملة من المعلومات.
24. عموما، يعبِّر الإنتروبي عن:
    - كمية المعلومات اللازمة للتعبير عن حالة المنظومة العشوائية.
    - كمية المعلومات التي يمكن للمنظومة العشوائية أن تحملها.
    - مقدار عدم الانتظام في المنظومة العشوائية.
    - الارتياب في حالة المنظومة العشوائية.
    - مقدار تدهور انتظام المنظومة العشوائية.
25. الإنتروبي المشروط للمتغيرين X و Y يعطى بالعلاقة:

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$$

أو العلاقة

$$H(Y|X) = H(X|Y) - H(X) + H(Y)$$

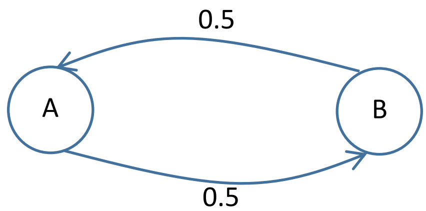
26. إذا كان المتغيران العشوائيان X, Y مستقلين:

$$\mathrm{H(X|Y) = H(X)}$$
$$\mathrm{H(Y|X) = H(Y)}$$
$$\mathrm{I(X,\ Y) = 0}$$
$$\mathrm{H(X,Y) = H(X) + H(Y)}$$

27. ما مقدار إنتروبي حجر نرد متزن؟
28. ما مقدار إنتروبي حجري نرد متزنين؟
29. ما مقدار المعلومات المشتركة بين رميتي حجر نرد متزن؟
30. سحبنا من مجموعة أوراق الكبة من الشدة ورقة فكانت 4. ما قيمة إنتروبي بقية أوراق الكبة؟
31. ما هو العدد الأصغري للحروف اللازم لتكوين أبجدية رماز ما؟
32. لماذا تنخفض القيمة الوسطية الفعلية لإنتروبي اللغة العربية إلى نحو 2.3 بت للحرف؟
33. يعطي منبع الرموز العديم الذاكرة في خرجه رموزا عديمة الترابط فيما بينها.
34. يعطي هذا المنبع سلاسل رموز عشوائية من الشكل:

AAAAABBAAAAABAAAAAAAAB.

صح أم خطأ؟



35. بافتراض أن الإنتروبي الفعلي للغة الألمانية يساوي 3.4 بت للحرف الواحد، وأن عدد أحرف اللغة الألمانية يساوي 30 حرفا. ما مقدار الفائض في هذه اللغة؟
36. هل تصلح اللغة التي ينعدم فيها الفائض للتواصل؟
37. أيهما أفضل للتراسل، استعمال رماز ينطوي على فائض، أم رماز لا فائض فيه:

أ- في حالة انعدام الضجيج ب- في حالة وجود الضجيج

38. ما مقدار معدل الإنتروبي لمنبع يُعطي رموزا مستقلة عن بعضها ويساوي عددها أربعة رموز بمعدل 2500 رمز في الثانية؟
39. ما هي الخوارزمية الفضلى لتكوين رماز يضغط البيانات غير المتجانسة الاحتمالات إلى أقصى حد ممكن؟
40. إذا كانت رموز البيانات مستقلة عن بعضها، ما هي أفضل خوارزمية لضغط تلك البيانات؟
41. ما هو الشرط الذي يضمن فك الرماز المضغوط على نحو فريد؟
42. الرماز ذو البادئة هو الرماز الذي تكون فيه كل كلمة رمز جزءا من كلمات الرمز الأخرى.

صح أم خطأ؟

43. إذا حققت أبجدية رموز ما متراجحة كرافت $\sum_{i=0}^{r-1} s^{-n_i} \leq 1$ أمكن تكوين رماز ذي بادئة من تلك الأبجدية. صح أم خطأ؟

44. هل يؤدي رماز هفمان إلى فقد في البيانات؟

45. هل تسبب خوارزمية JPEG ضياعا في جزء من البيانات المضغوطة؟

46. الغاية من ترميز المنبع هي ضغط البيانات إلى أقصى حد ممكن وذلك بتخليصها من الفائض بغية تقليص مدة إرسالها على خطوط الاتصال، وتقليص الحيز اللازم لخزنها. صح أم خطأ؟

47. ينطوي ترميز القناة على حشر بيانات إضافية في البيانات بغية المساعدة على تخليصها من الأخطاء في حالة نقلها أو خزنها في ظروف من التشويش والتشويه والضجيج. صح أم خطأ.

48. تُدخل قناة الاتصال في إشارة البيانات الرقمية المنقولة عليها ضجيجا يُضاف إليها، وتشويها في بنيتها. صح أم خطأ؟

49. الضجيج إشارة عشوائية من مصدر تشويش تُضيفها قناة الاتصال أو وسط التخزين إلى إشارة البيانات.

50. معالجة الضجيج الرشقي أبسط من معالجة ضجيج التكميم. صح أم خطأ؟

51. تابع الالتباس هو إنتروبي المعلومات المستقبلة حين معرفة المعلومات المرسَلة. أي إنه مقدار الغموض أو الارتياب في المعلومات المستقبلة حين إرسال معلومات معينة. ولذا يعبِّر عن مقدار المعلومات الملتبسة في المستقبل، أي تلك الخاطئة.

52. معدل الإرسال هو مقدار البيانات التي يجري نقلها على قناة الاتصال بشكل سليم. صح أم خطأ؟

53. معدل الإرسال= إنتروبي المرسل – تابع الالتباس في المستقبل. صح أم خطأ؟

54. للتعويض عن أخطاء النقل يجب إرسال بيانات لتصحيح الأخطاء على قناة اتصال إضافية تساوي سعتها تابع الالتباس، أي الإنتروبي الشرطي للمعلومات المستقبلة حين إرسال معلومات معروفة ما. صح أ خطأ؟

55.