كلية شط العرب الجامعة
قسم هندسة تقنيات الاجهزة الطبية
المرحلة الاولى

Differential Mathematics

Limits and Continuity

م.م اية عبد الحسين عبد الرزاق

الغاية والاستمرارية

الغاية

ان مفهوم الغاية من اهم المفاهيم الاساسية في موضوع الرياضيات وهو مفهوم يتعلق بسلوك الدالة عندما يقترب متغيرها نحو عدد معين

1)إيجاد الغاية

غاية الدالة الثابتة = الثابت نفسه $f(x) = c$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

مثال :- أوجد غاية الدوال التالية:

$$\lim_{x \to -2} 5, \lim_{x \to 0} \sqrt{7}$$

الحل:- $\lim_{x \to 0} \sqrt{7} = \sqrt{7}\,, \lim_{x \to -2} 5 = 5$

إيجاد غاية لدالة متعددة حدود

(غير كسرية =لا يوجد متغير في المقام لايوجد متغير له اس سالب)

- $f(x) = x^2 + 3x + 1$
- $f(t) = 2t^2 + t + 1$
- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$
- $f(x) = 1$

حل الغاية لدالة متعددة الحدود هو التعويض المباشر

$$\lim_{x\to 2} x^2 = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 3} x^2 + x = (3)^2 + 3 = 12$$

$$\lim_{t\to 2} \frac{1}{4}t + 1 = \frac{1}{4}(2)+1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} 1 = 1$$

إيجاد الغاية لدالة كسرية

الحالة الأولى :عند التعويض تظهر لدينا غاية (المقام لا يساوي صفرا)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2} = \frac{(1)^2+(1)-6}{(1)+2} = \frac{-4}{3}$$

الحالة الثانية: عند التعويض لا تظهر لدينا غاية (المقام يساوي صفرا)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 6}{x - 3} = \frac{(3)^2+(3)-6}{(3)-3} = \frac{6}{0} = \text{غيرمعرف}$$

التحليل او التبسيط (التجربة او الفرق بين مربعين او فرق بين مكعبين او سحب عامل مشترك او توحيد المقامات او اخرى)

التجربة

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)}= \qquad \lim_{x\to3}(x+4)=3+4=7$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=$$

$$\lim_{x\to2}(x+2)=(2)+2=4$$

تحليل فرق بين مربعين

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$w^2-3=(w-\sqrt{3})(w+\sqrt{3})$$

$$\lim_{x\to5}\frac{x^3-125}{x-5}=$$

$$\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(X-5)}=$$

$$\lim_{x\to5}(x^2+5x+25)$$

$$=(5)^2+5(5)+25=75$$

تحليل الفرق بين مكعبين ومجموع مكعبين

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

الضرب في العامل المرافق

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}*\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+5+\sqrt{5}*\sqrt{x+5}-\sqrt{5}*\sqrt{x+5}-5}{x(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{(0)+5}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{(5)}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

سحب عامل مشترك

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x)(x-4)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}(x-4)=(0)-4=-4$$

<u>مثال :-</u> جد

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

<u>الحل :-</u>

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3=3+3=6$$

<u>مثال :-</u> جد

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4=4+4+4=12$$

مثال ـ :- جد

$$\lim_{x\to -1}(x^3+2x+3)$$

الحل :-

$$\lim_{x\to -1}(x^3+2x+3) = (-1)^3+2(-1)+3 = \ -1-2+3 = 0$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to -3}(x^3+2x)$$

الحل :-

$$\lim_{x\to -3}(x^3+2x) = (-3)^3+2(-3) = -27-6 = -33$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2+4)}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{4+4+4}{(-2-2)(4+4)} = \frac{12}{-4*8} = \frac{-3}{8}$$

2)إيجاد غاية الدالة المنفصلة

لايجاد غاية الدالة المنفصلة عند $x \to a$ نتبع ما يلي :

1- نجد غاية الدالة من اليمين $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و نرمز لها بالرمز L_1

2- نجد غاية الدالة من اليسار $\lim_{x\to a^-} f(x)$ و نرمز لها بالرمز L_2

3- اذا كانت الغاية من اليمين = الغاية من اليسار اي ان $L_2 = L_1$ فأن للدالة غاية عند $x \to a$.

4- اذا كانت الغاية من اليمين ≠ الغاية من اليسار $L_1 \neq L_2$ فأنه ليس للدالة غاية عند $x \to a$.

مثال :-لتكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \leq 2 \\ x + 1 & x > 2 \end{cases}$$

هل للدالة غاية عند 2؟

الحل :-

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} x + 1 = 1 + 1 = 2 = L_1 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} 1 - x = 1 - 2 = -1 = L_2 \end{cases}$$

∴ ليس للدالة غاية لان $L_2 \neq L_1$.

مثال :-لتكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

هل للدالة غاية عند 1؟

الحل :-

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 + 1 = 1 + 1 = 2 = L_1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2(1) = 2 = L_2 \end{cases}$$

∴ للدالة غاية لان $L_2 = L_1$

الاستمرارية

تكون f مستمرة في العدد a أذا وفقط اذا حققت الشروط الثلاثة الاتية:

1) $f(\mathrm{a})$ موجودة، أي، أن f معرفة في a ،

2) $\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x)$ موجودة،

3) $\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$.

<u>مثال :-</u> *ابحث استمرارية الدالة* $f(x) = x^2 + 3$ عند x = 1؟

<u>الحل :-</u>

1- $f(1) = (1)^2 + 3 = 4$

2- $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 + 3 = (1)^2 + 3 = 4$

3- $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

∴ *الغاية موجودة عند* x=1. *اذن* f *مستمرة عند* x=1.

<u>مثال :-</u> *ابحث استمرارية الدالة*

$f(x) = \frac{x}{x+1}$ عند $x = 3$?

<u>الحل :-</u>

1- $f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

2- $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

3- $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

اذن f *مستمرة عند* x=3

مثال :- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x<0 \\ x^2+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

هل f مستمرة عند $x = 0$ ؟ بين ذلك

الحل :-

1- $f(0) = (0)^2 + 1 = 1$

2- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2+1 = (0)^2+1 = 1 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x+3 = 2(0)+3 = 3 = L_2 \end{cases}$

$\therefore$ الغاية غير موجودة عند $x = 0$ لان $L_2 \neq L_1$.

f غير مستمرة عند $x = 0$.

مثال :- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x<-1 \\ 2x^2+1 & x \geq -1 \end{cases}$$

هل f مستمرة عند $x = -1$ ؟ بين ذلك

الحل :-

1- $f(-1) = 2\,(-1)^2 + 1 = 2+1 = 3$

2- $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} 2x^2+1 = 2(-1)^2+1 = 3 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} 2-x = 2-(-1) = 3 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة عند $x = -1$ لان $L_2 = L_1$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

$\therefore$ f مستمرة عند $x = -1$.

مثال :- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq -1 \\ x^2 & x < -1 \end{cases}$$

هل f مستمرة عند $x = -1$ ؟ بين ذلك

الحل :-

1- $f(-1) = 3\,(-1) + 1 = -3 + 1 = -2$

2- $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} 3x+1 = -3+1 = -2 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} x^2 = (-1)^2 = 1 = L_2 \end{cases}$

$\therefore$ الغاية غير موجودة عند $x = -1$ لان $L_2 \neq L_1$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$

$\therefore$ f غير مستمرة عند $x = -1$.

مثال :-: لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq -1 \\ 3x+1 & x < -1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة f مستمرة عند $x = -1$ ؟

الحل :-

1- $f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$

2- $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 3x+1 = 3(-1)+1 = -2 = L_2 \end{cases}$

$\therefore$ الغاية غير موجودة عند $x = -1$ لان $L_2 \neq L_1$

f غير مستمرة عند $x = -1$

مثال :- *ابحث استمرارية الدالة*

$f(x) = x^3 + 1$ عند $x = 1$?

الحل:

1- $f(1) = (1)^3 + 1 = 1 + 1 = 2$

2- $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x^3 + 1 = (1)^3 + 1 = 2$

3- $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

اذن f *مستمرة عند* **x=1**

مثال: أفرض أن $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

هذه الدالة غير مستمرة في العدد 1 ، لأن $f(1)$ غير موجودة، وكذلك الغاية غير موجودة.

مثال: أفرض أن

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \le 1 \quad \text{عندما} \\ 2 & , \quad x > 1 \quad \text{عندما} \end{cases}$$

واضح أن هذه الدالة غير مستمرة في العدد 1.

مثال: أفرض أن

$f(x) = \frac{1}{x}$

هذه الدالة غير مستمرة عندما $x = 0$ ، لأن $f(0)$ غير موجودة (أو غير معرفة)، وكذلك الغاية غير موجودة.

كلية شط العرب الجامعة
قسم هندسة تقنيات الاجهزة الطبية
المرحلة الاولى

Differential Mathematics

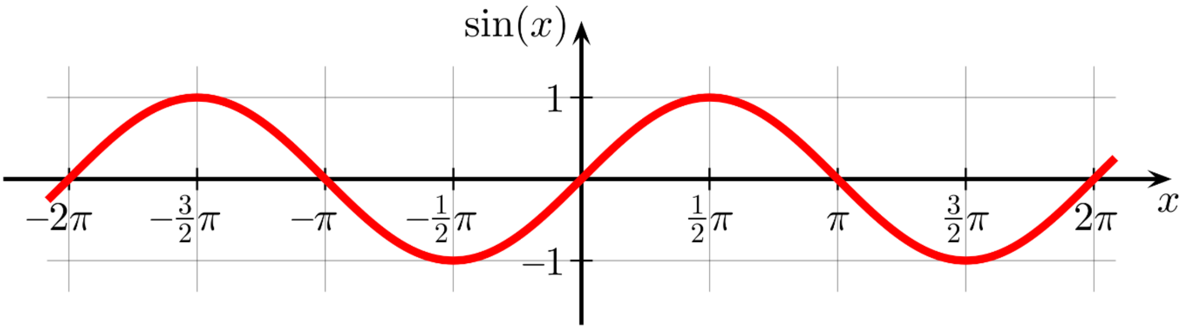
Transcendental functions- trigonometric functions, and their inverses

م.م اية عبد الحسين عبد الرزاق

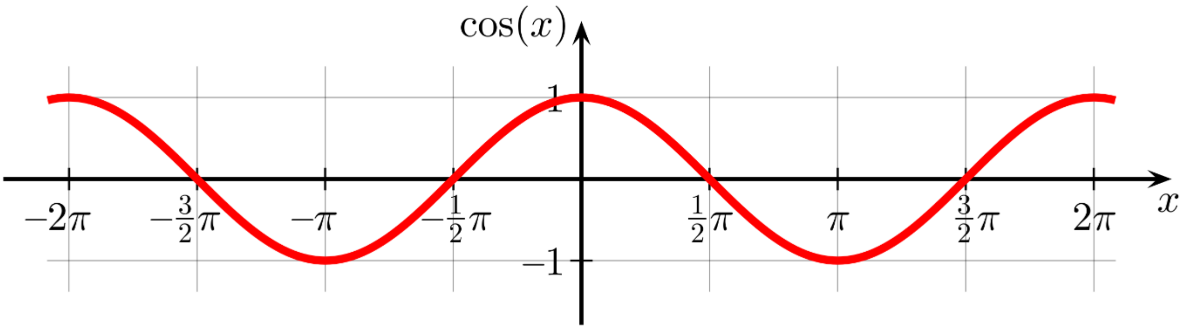
الدوال المثلثية

وهي دوال لزاوية هندسية وهي ذات اهمية لدراسة مثلث أو عرض ظواهرِ دورية أو متكررة كالموجات.

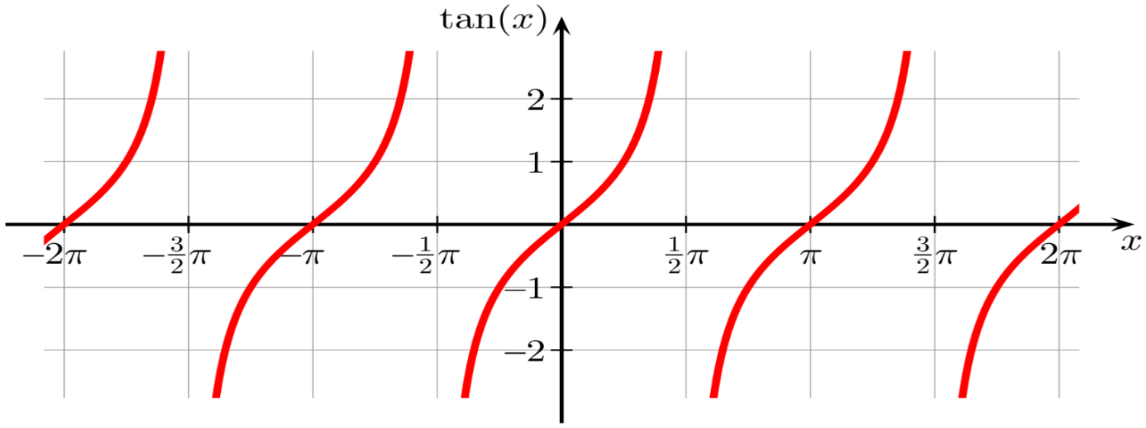
الزاوية بالدرجات	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
الزاوية بالراديان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



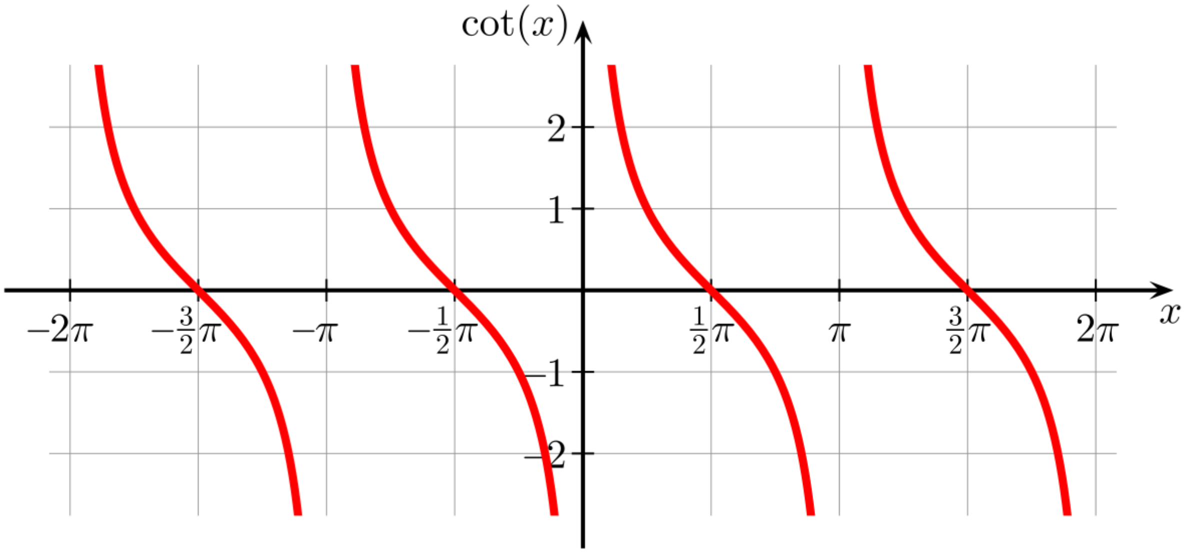
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°



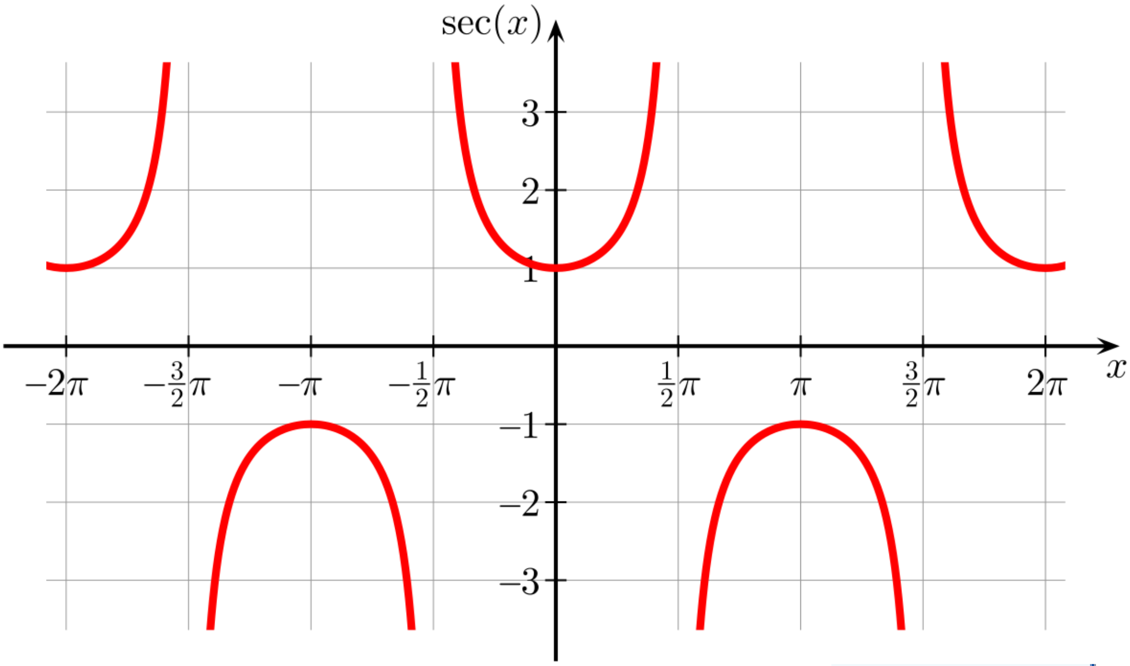
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°



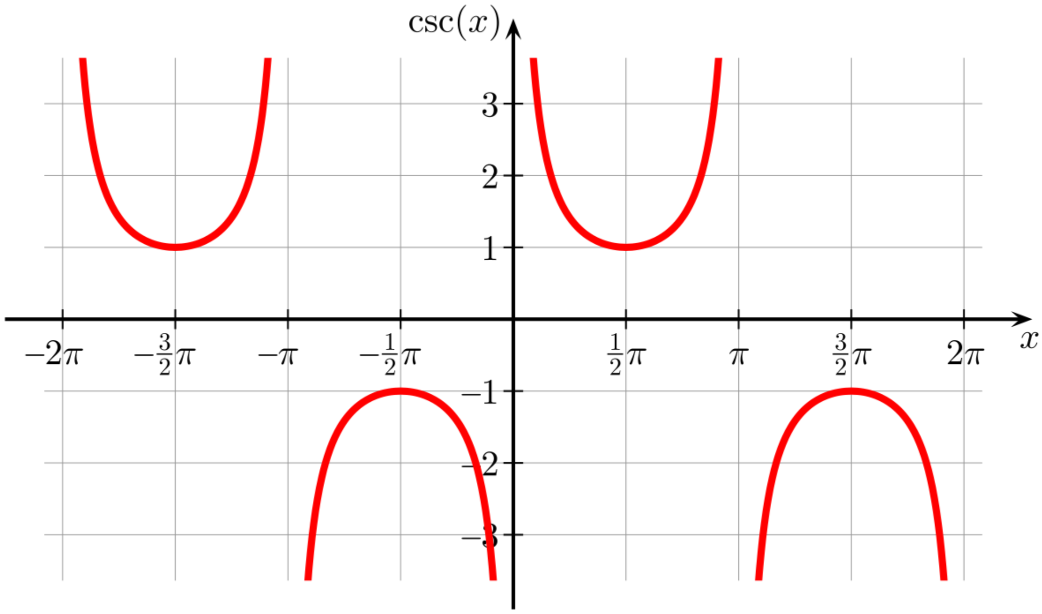
$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180° n, n \in Z\}$	المجال
مجموعة الأعداد الحقيقية	المدى
غير معرَّفة	السعة
180°	طول الدورة



$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in Z\}$	المجال
مجموعة الأعداد الحقيقية	المدى
غير معرَّفة	السعة
180°	طول الدورة



المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n, n \epsilon Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$
السعة	غير معرَّفة
طول الدورة	$360°$



المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \epsilon Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$
السعة	غير معرَّفة
طول الدورة	$360°$

إذا كانت دورة كلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ تبدأ عند $\theta = 0$ ، فإن نقاط تقاطع كلٍّ منهما مع المحور θ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$

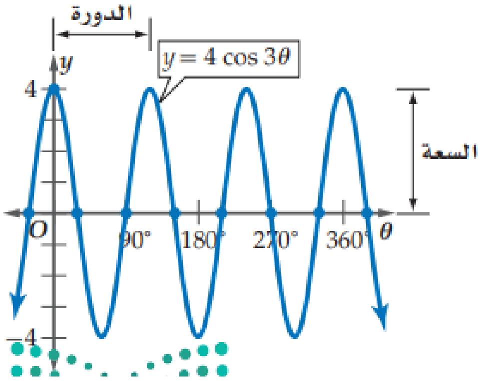
مثال 1 إيجاد السعة وطول الدورة

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4 \cos 3\theta$.

السعة: من الرسم نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة يساوي $\frac{4 - (-4)}{2} = 4$ أو $|a| = |4| = 4$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|3|} = 120°$

من الرسم يكرّر الرسم نفسه كلَّ $120°$



مثال 2 تمثيل دالّتي الجيب وجيب التمام بيانيًا

مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

a) $y = 2 \sin \theta$

أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2 , b = 1$.

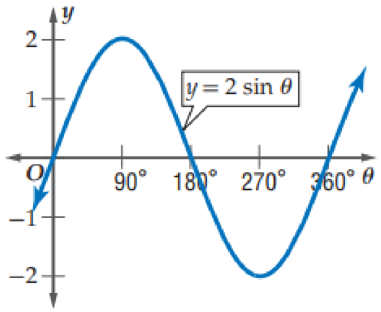
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← المنحنى يتسع رأسيًّا بحيث تكون القيمة العظمى 2 والقيمة الصغرى -2 .

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|1|} = 360°$ ← دورة واحدة طولها $360°$.

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (180°, 0)$

$\left(\frac{360°}{b}, 0\right) = (360°, 0)$



$y = \cos 4\theta$ (b

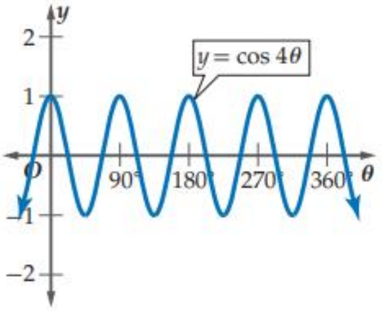
أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ، حيث: $a = 1 , b = 4$.

السعة: $|a| = |1| = 1$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (22.5°, 0)$

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (67.5°, 0)$

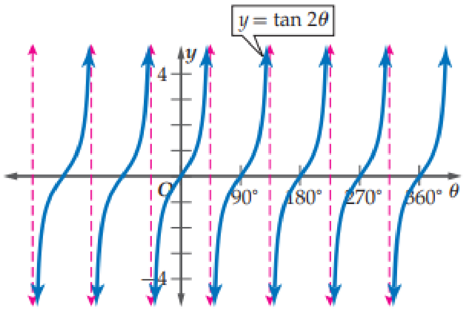


مثال 3 تمثيل دوالّ الظلّ بيانيًا

أوجد طول دورة الدالّة $y = \tan 2\theta$. ومثّل هذه الدالّة بيانيًا.

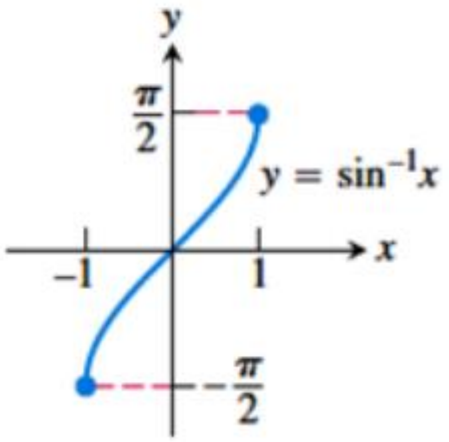
طول الدورة: $\frac{180°}{|b|} = \frac{180°}{|2|} = 90°$

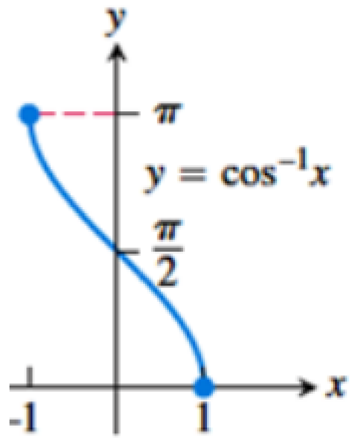
خط تقارب عند: $\frac{180°}{|2b|} = \frac{180°}{2|2|} = 45°$

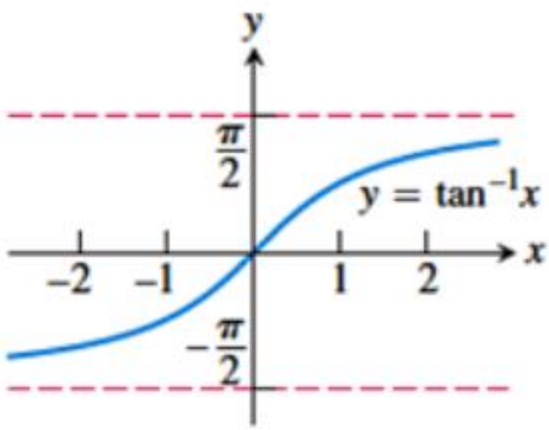


الدوال المثلثية العكسية

تسمى هذه الدوال بدوال (القوس) وهي عبارة عن معكوس الدوال المثلثية فاذا كان $x = \sin y$ فان
$y = \sin^{-1} x$







الدالّة العكسية	الرموز	المجال	المدى
دالّة الجيب العكسية	$y = \mathrm{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$
دالّة جيب التمام العكسية	$y = \mathrm{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$
دالّة الظل العكسية	$y = \mathrm{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$

كلية شط العرب الجامعة
قسم هندسة تقنيات الاجهزة الطبية
المرحلة الاولى

Differential Mathematics

Hyperbolic and inverse hyperbolic

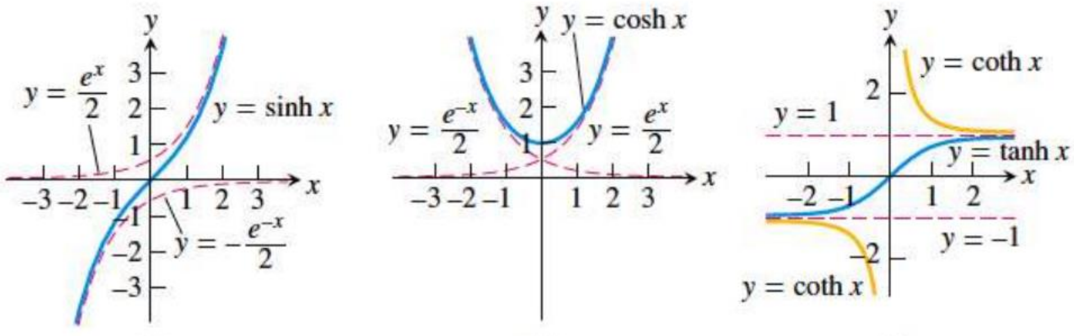
م.م اية عبد الحسين عبد الرزاق

Hyperbolic functions الدوال الزائدية

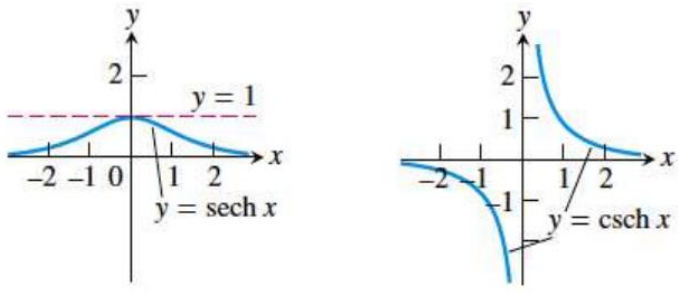
$1.\ \sinh u = \dfrac{e^{u} - e^{-u}}{2}$ $\qquad$ $2.\ \cosh u = \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{2}$

$3.\ \tanh u = \dfrac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}}$ $\qquad$ $4.\ \coth u = \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{e^{u} - e^{-u}}$

$5.\ \operatorname{sech} u = \dfrac{2}{e^{u} + e^{-u}}$ $\qquad$ $6.\ \operatorname{csch} u = \dfrac{2}{e^{u} - e^{-u}}$



(a) (b) (c)



(d) (e)

بعض المتطابقات:

$1.\ \cosh u + \sinh u = e^{u}$ $\qquad$ $2.\ \cosh u - \sinh u = e^{-u}$

$3.\ \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ $\qquad$ $4.\ \cosh(-u)$

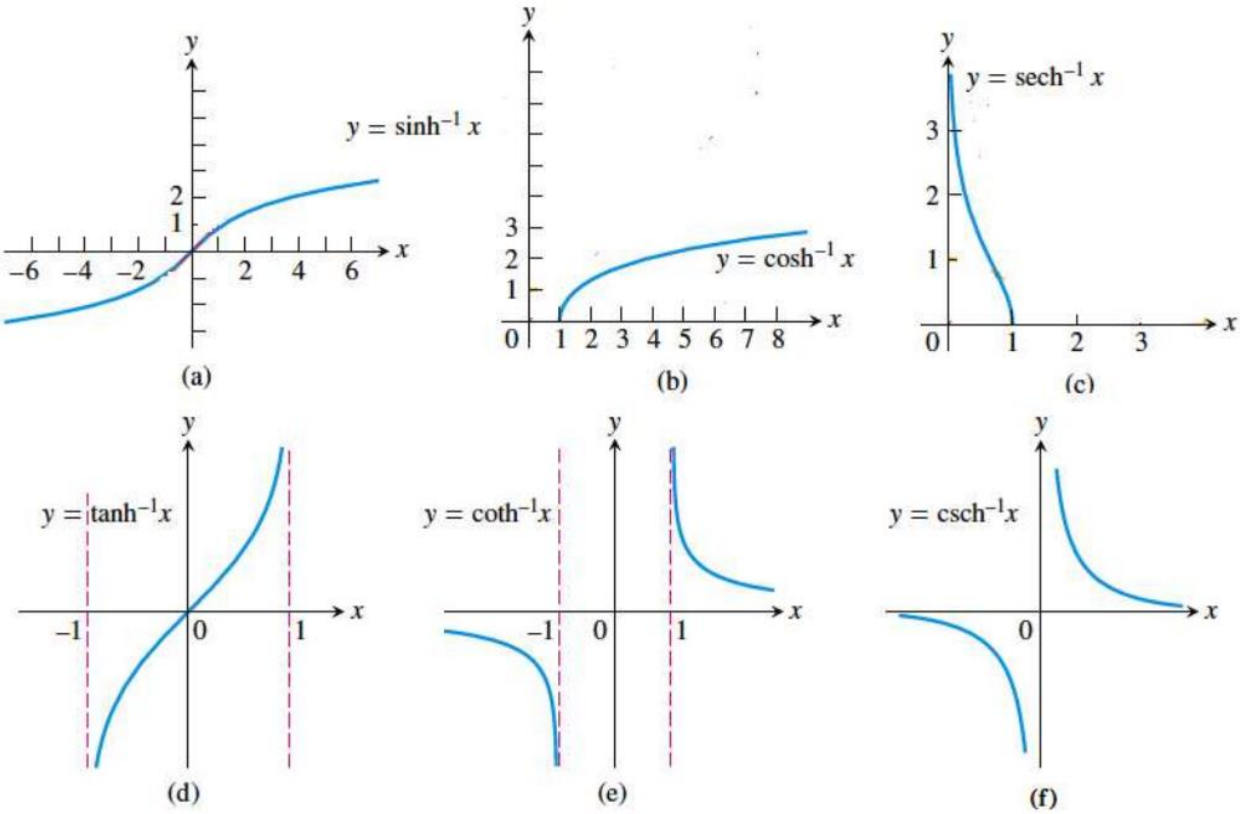
$= \cosh u\ \ \&\ \ \sinh(-u) = -\sinh u$

$5.\ \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$ $\qquad$ $6.\ \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

$7.\ \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x$ $\qquad$ $8.\ \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$9.\ 2\cosh^2 x = \cosh 2x + 1$ $\qquad$ $10.\ 2\sinh^2 x = \cosh 2x - 1$

The inverse hyperbolic functions الدوال الزائدية العكسية



$y = \sinh^{-1} x \quad means \quad x = \sinh y \quad and \quad y = \cosh^{-1} x \quad means \quad x = \cosh y$

1. $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad ; \quad -\infty < x < \infty$
2. $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad ; \quad x \geq 1$
3. $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) = \cosh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad ; \quad 0 < x \leq 1$
4. $\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right) = \sinh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad ; \quad x \neq 0$
5. $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x + 1}{x - 1} = \tanh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad ; \quad |x| \geq 1$

البرهان :

$1. let \quad u = \sinh^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \sinh u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2} \quad \rightarrow \quad 2x = e^u - e^{-u}$

$$2x = e^u - \frac{1}{e^u} \quad \rightarrow \quad 2x = \frac{e^{2u} - 1}{e^u} \quad \rightarrow \quad 2xe^u = e^{2u} - 1$$

$$e^{2u} - 2xe^u - 1 = 0$$

اذا فرضنا ان $y = e^u$ فان $y^2 = e^{2u}$ وتصبح المعادلة من الدرجة الثانية بالمتغير y

$$y^2 - 2xy - 1 = 0$$

ونجد قيمة y باستعمال قانون الدستور

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2x) \pm \sqrt{(-2x)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore \quad e^u = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \quad \rightarrow \quad u = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

هنا نهمل القيمة $\ln\left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)$ لان $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 \quad \forall x$

$$\therefore \quad \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

كلية شط العرب الجامعة
قسم هندسة تقنيات الاجهزة الطبية
المرحلة الاولى

Differential Mathematics

Exponential function and logarithmic

م.م اية عبد الحسين عبد الرزاق

الدوال الأسية

قوانين الأسس

إذا كان كل من x و y عددا حقيقيا لا يساوي الصفر وكان كل من n و m عددا صحيحا فإن:

$$1)\ \left(x^n\right)^m = x^{nm}$$

$$2)\ (x\,y)^n = x^n y^n$$

$$3)\ x^n x^m = x^{n+m}$$

$$4)\ \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

مثال : احسب كلا مما يلي:

$$1)\ (xy)^{-2},\qquad 2)\ \left((-2)^{-4}\right)^2,\qquad 3)\ \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}},\qquad 4)\ 5^2 5^3$$

الحل:

$$1)\ (xy)^{-2} = \frac{1}{(xy)^2} = \frac{1}{x^2y^2},\qquad 2)\ \left((-2)^{-4}\right)^2 = (-2)^{-8} = \frac{1}{(-2)^8} = \frac{1}{256}$$

$$3)\ \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}} = (-3)^{-3-(-4)} = (-3)^{-3+4} = (-3)^1 = -3,$$

$$4)\ 5^2 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3125$$

الدوال الأسية :

تعريف:

الدالة الأسية هي من الشكل: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $y=f(x)=b^x$ و $b\neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت.

خواص الدوال الأسية :

١) $D_f=\mathbb{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f=[0,\infty)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $b^x>0$.

٣) ليست فردية ولا زوجية.

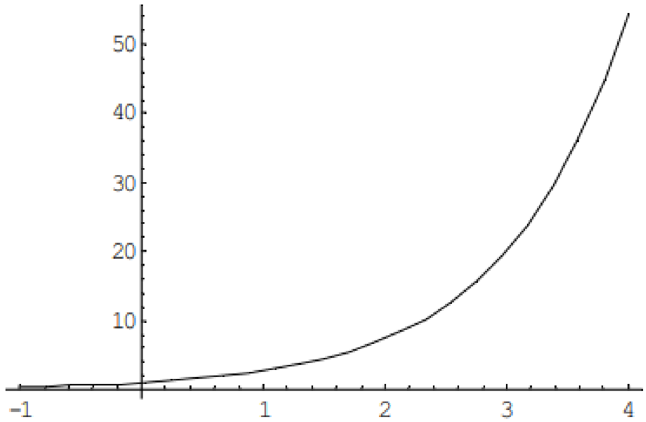
٤) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الاستعمال: دالة الأساس الطبيعي $y=e^x$ حيث $e\cong 2.71828$ وهي متزايدة بسرعة أي أن قيمها تكبر بسرعة، وتقترب من الصفر كلما كانت قيم x سالبة.

٥) قانون تغيير الأساس للدوال الأسية: $b^x = e^{x\ln b}$.

٦) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة الأساس أي للعدد b.

مثال : مثل الدالة التالية: $y = e^x$.

الحل:



مثال : حدد أساس كل من الدوال الأسية التالية:

$$1)\ y = f(x) = 2^{-x}, \qquad 2)\ y = f(x) = \pi^x, \qquad 3)\ y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$$

الحل:

1) الأساس هو $\frac{1}{2}$ لأن: $y = f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2) الأساس هو π .

3) الأساس هو $\sqrt{2}$ لأن: $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^x$

نظرية : ليكن لدينا المتغيران الحقيقيان x و y والعدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$ فإن:

$$1)\ b^x > 0, \quad 2)\ b^x b^y = b^{x+y}, \quad 3)\ \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, \quad 4)\ \left(b^x\right)^y = b^{xy}$$

**مثال : ** بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad 2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}}, \qquad 3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x$$

الحل:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{x}{4}} 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}\left(\sqrt[4]{2}\right)^x$$

$$2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}\left(5^2\right)^x}{\left(5^3\right)^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}5^{2x}}{5^{9+3x}} = \frac{5^{x+2}}{5^{9+3x}} = 5^{-2x-7} = \frac{1}{5^{2x+7}} = \frac{1}{5^7 5^{2x}}$$

$$= \frac{1}{5^7}\frac{1}{5^{2x}} = \frac{1}{5^7}\left(\frac{1}{5^2}\right)^x = \frac{1}{78125}\left(\frac{1}{25}\right)^x$$

$$3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x = \left((9)^{\frac{1}{x}}9\right)^x = 9\left(9^x\right)$$

المعادلات الأسية:

**قاعدة : ** ليكن لدينا عددان حقيقيان x و y وعدد حقيقي موجب a حيث $a \neq 1$ فإن:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

إدا تساوت الأساسات تتساوى الأسس

قاعدة : إذا كان a,b عددين حقيقيين موجبين، x عدد حقيقي فإن:

$$a^x = b^y \Leftrightarrow a = b$$

إدا تساوت الأسس تتساوى الأساسات

**مثال : ** حل المعادلات التالية:

$$1)\ 3^{x-2} = 3^5, \qquad 2)\ x^3 - 1 = 7$$

الحل:

$$1)\ 3^{x-2} = 3^5 \Leftrightarrow x - 2 = 5$$
$$\therefore\ x = 7$$
$$2)\ x^3 - 1 = 7 \Leftrightarrow x^3 = 8$$
$$\Leftrightarrow x^3 = 2^3 \quad \therefore\ x = 2$$

الدوال اللوغاريتمية :

تعريف :

ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y = \log_b x$ بحيث: $x = b^y$.

أي أن الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية ($\log_b b^x = x$ و $b^{\log_b x} = x$)

والرمز $\log_a x$ يقرأ لوغاريتم x للأساس a

خواص الدوال اللوغاريتمية:

١) $\log_b(b^x) = x$ و $b^{\log_b x} = x$ أي أنها تسمح لنا بالتخلص من الدالة الأسية الموافقة لها والعكس.

٢) $D_f = (0,\infty)$ أي أنها ليست معرفة إلا للأعداد الموجبة.

٣) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

٤) ليست فردية ولا زوجية.

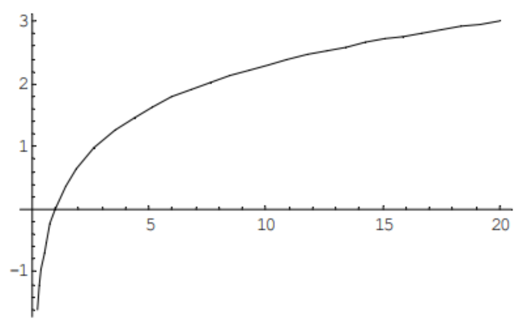
٥) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الاستعمال: دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x = \log_e x$ حيث $e \cong 2.71828$.وهي متزايدة ببطء أي أن قيمها تكبر ببطء ولذلك تستخدم لتمثيل الأعداد الكبيرة. وكذلك تتجه قيمها إلى الأعداد السالبة الصغيرة جدا كلما صغرت قيم x .

٦) قانون تغيير الأساس للدوال اللوغاريتمية: $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b}$.

٧) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b.

مثال : مثل الدالة التالية: $y = \ln x$.

الحل:



مثال :

١) بما أن $8 = 2^3$ إذن $\log_2 8 = 3$

٢) بما أن $32 = 2^5$ إذن $\log_2 32 = 5$

٣) بما أن $10000 = 10^4$ إذن $\log_{10} 10000 = 4$

٤) بما أن $0.01 = 10^{-2}$ إذن $\log_{10} 0.01 = -2$

قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان كل من x, y, a أعداد حقيقية موجبة ، و $a \neq 1$ وكان n عدد حقيقي فإن:

$$1)\log_a 1 = 0$$

$$2)\log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y$$

$$3)\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$4)\log_a x^n = n\log_a x$$

$$5)\log_a a = 1$$

مثال : أوجد قيمة كل لوغاريتم فيما يلي:

$$1)\log_7 7\ , \qquad 2)\log_5\left(\frac{1}{125}\right), \qquad 3)\log_4 16$$

$$4)\log_3 21 - \log_3 7\ , \qquad 5)\log_4 8$$

الحل:

$$1)\log_7 7 = 1$$

$$2)\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = \log_5 1 - \log_5 125 = 0 - \log_5 5^3 = -3\log_5 5 = -3\times 1 = 3$$

$$3)\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2\log_4 4 = 2\times 1 = 2$$

$$4)\log_3 21 - \log_3 7 = \log_3 \frac{21}{7} = \log_3 3 = 1$$

$$5)\log_4 8 = \log_4 2^3 = \log_4(\sqrt{4})^3 = \log_4(4^{\frac{1}{2}})^3 = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_4 4 = \frac{3}{2}$$

كلية شط العرب الجامعة

قسم هندسة تقنيات الاجهزة الطبية

المرحلة الاولى

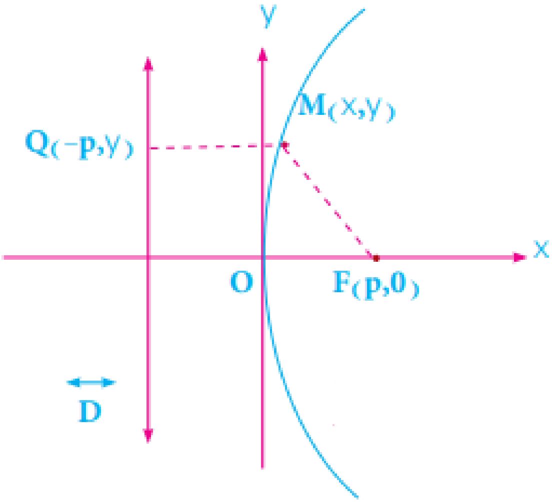
Differential Mathematics

Plane analytical geometry, parabola & ellipse, hyperbola

م.م اية عبد الحسين عبد الرزاق

القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مجموعة النقط $M(x , y)$ في المستوي والتي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(p,0)$ تسمى البؤرة حيث $P > 0$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم "D" يسمى الدليل لا يحوي البؤرة .

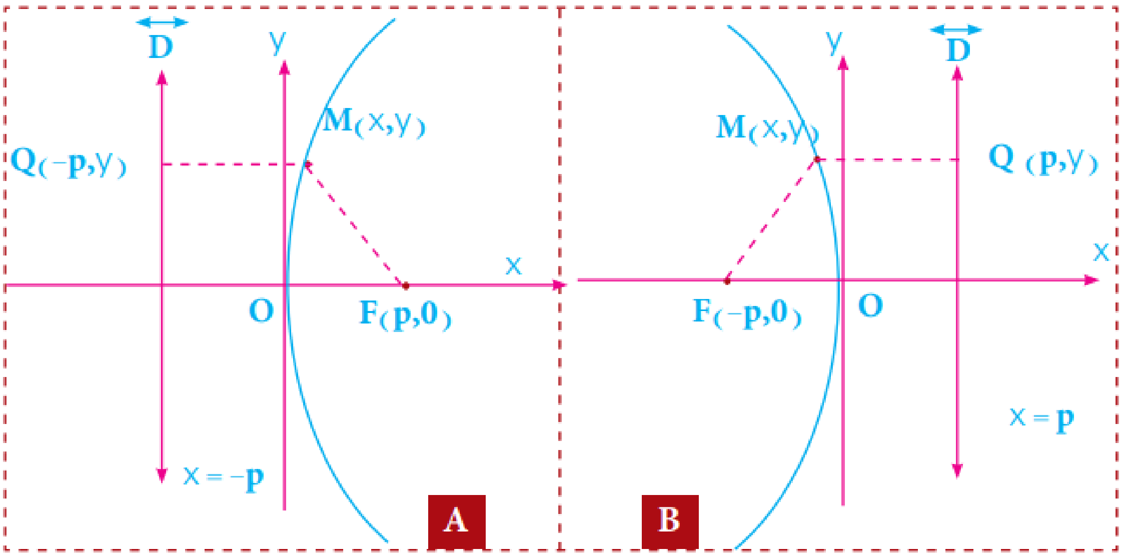


اي ان $MF = MQ$ لاحظ الشكل ،

وتسمى النقطة "O" برأس القطع المكافئ "Vertex"

ويسمى المستقيم (x) المار بالبؤرة والعمود على الدليل بمحور القطع المكافئ .حيث لاحظ ان $e = 1 = \frac{MF}{MQ}$

معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات (x−axis) والرأس في نقطة الأصل



في المستوي الديكارتي المتعامد المحورين وبناءاً على تعريف القطع المكافئ يمكن ايجاد معادلة القطع المكافئ في ابسط صورة ممكنة وكما يأتي :

لتكن النقطة $F(p,0)$ هي بؤرة القطع المكافئ والمستقيم D هو دليل القطع المكافئ ، والنقطة $Q(-p,y)$ نقطة على الدليل حيث $\overline{MQ}$ عمودي على المستقيم D ، والنقطة $M(x,y)$ من نقط منحني القطع المكافئ والرأس في نقطة الاصل $(0,0)$. كما في الشكل $(2-3)$ (A) . من تعريف القطع المكافئ .

$$MF = MQ$$

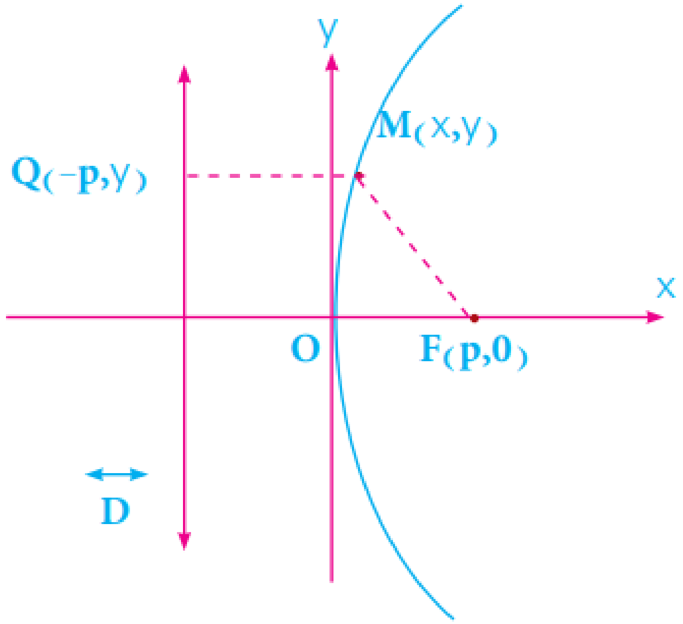
$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين
$$\sqrt{x^2-2px+p^2+y^2}=\sqrt{x^2+2xp+p^2}$$

بالتبسيط
$$x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2xp+p^2$$

$$\boxed{y^2=4px\ ,\ \forall p>0}$$ (المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات)

ومعادلة الدليل x=-p



مثال -1- جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = -8x$

$y^2 = -8x$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $y^2 = -4px$

$\Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} = 2 > 0$

$\therefore \boxed{p = 2}$

$F(-p, 0) = F(-2, 0)$

معادلة الدليل $x = p$

$\therefore \boxed{x = 2}$

مثال -2- جد معادلة القطع المكافئ اذا علم :

أ) بؤرته $(3,0)$ والرأس نقطة الاصل .

ب) معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه نقطة الاصل .

الحل

أ)

$(p,0) = (3,0)$

$\Rightarrow p = 3$

$\therefore y^2 = 4px$ (المعادلة القياسية)

$\Rightarrow y^2 = (4)(3)x = 12x$

$y^2 = 12x$

ب) من معادلة الدليل

$2x - 6 = 0$

$2x = 6 \Rightarrow x = 3$

$\therefore p = 3$ (بفضل التعريف)

بتطبيق المعادلة القياسية

$y^2 = -4px$

$y^2 = (-4)(3)x = -12x \Rightarrow y^2 = -12x$

مثال -3-

جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ثم أرسمه :

الحل

بالمقارنة مع معادلة القطع المكافئ :

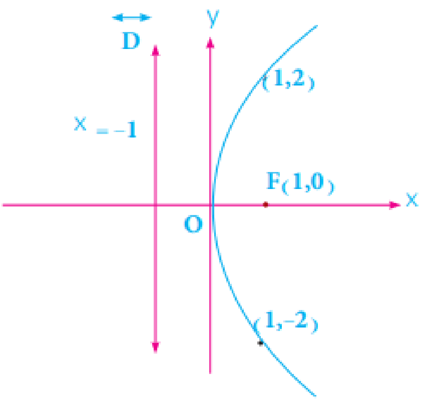
$y^2 = 4px$

$\Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$F(1, 0)$ البؤرة

$x = -1$ معادلة الدليل

$y^2 = 4x \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$

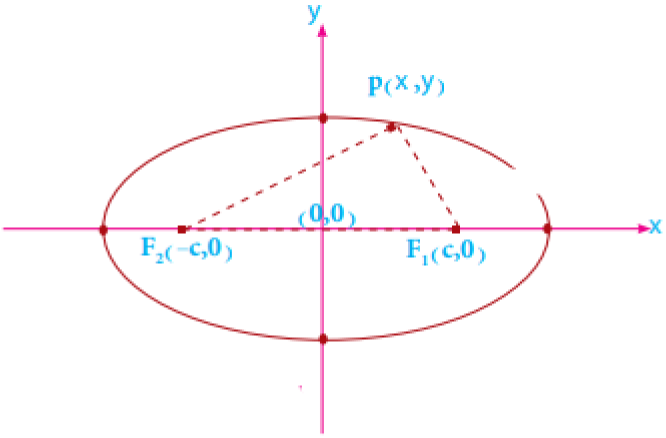


x	0	1	2
y	0	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$

القطع الناقص

القطع الناقص مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت .

قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .



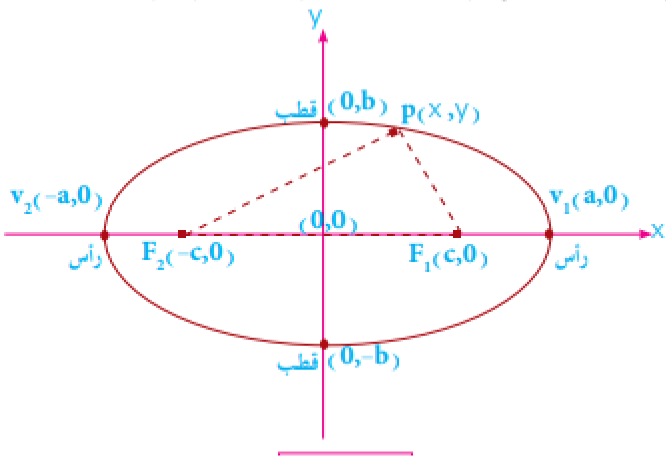
بؤرتا القطع الناقص هما $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ والعدد الثابت هو $2a$, $a>0$, $c>0$

تسمى النقطة التي تقع في منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين بمركز القطع الناقص (Center)، ويسمى المستقيم المار بالبؤرتين بالمحور البؤري (Focal axis) ويقطع القطع الناقص في نقطتين تسميان رأسا القطع وتسمى قطعة المستقيم الواصلة بين الرأسين بالمحور الكبير (Major axis) وطولها ($2a$) ايضاً ويساوي مجموع بعدي اي نقطة $P(x, y)$ من نقاط القطع الناقص عن البؤرتين اي ان :

$$\boxed{pF_1 + pF_2 = 2a}$$

وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع المستقيم العمود على المحور الكبير من مركز القطع الناقص

مع القطع الناقص بالمحور الصغير (Minor axis) وطولها ($2b$) حيث $b>0$ ونهايتاه تسميان القطبين .



معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

$\because \quad PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

(بتربيع طرفي المعادلة)

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+y^2$$

(بقسمة طرفي المعادلة على 4)

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

(بتربيع طرفي المعادلة)

$$\Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

$$a^2\left[x^2+2cx+c^2+y^2\right]=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

بالتبسيط

$$a^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2=a^4+\cancel{2a^2cx}+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$\boxed{x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)}..........(1)$$

بما ان $a > c$ دائماً فان $a^2-c^2>0$ ويفرض ان $b^2=a^2-c^2$ حيث $b>0$

نعوض 2 في 1

بقسمة طرفي المعادلة على $a^2\ b^2$

$$\Rightarrow \boxed{b^2=a^2-c^2}...........(2)$$

$$\Rightarrow x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

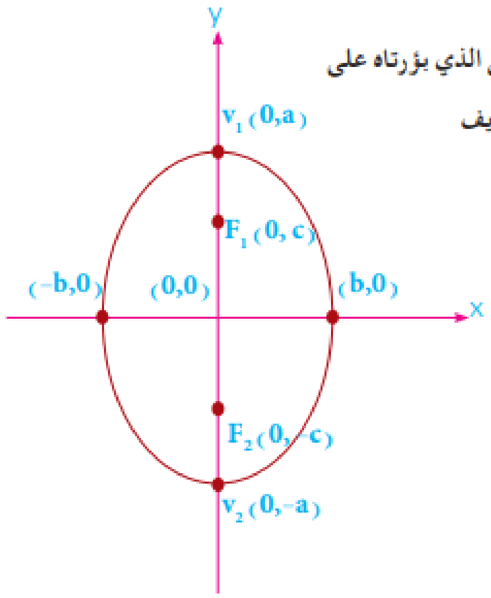
$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

تمثل المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

وتسمى النسبة $\frac{c}{a}$ بالاختلاف المركزي .

أي ان $e=\frac{c}{a}$ ويكون دائماً اقل من الواحد .

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبؤرتان تنتميان لمحور الصادات .



لاحظ الشكل

بنفس خطوات الاشتقاق السابق لمعادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل وباستخدام التعريف نحصل على المعادلة :

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

حيث البؤرتان على محور الصادات والمركز في نقطة الاصل .

نلخص ما سبق بالجدول الآتي :

	قطع ناقص بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل .	قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .
المعادلة	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
البؤرتان	$F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$	2) $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$
الرأسان	$V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$	3) $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$

4) $c=\sqrt{a^2-b^2}$

5) $a > c$, $a > b$

6) $2a =$ طول المحور الكبير

7) $2b =$ طول المحور الصغير

8) $2c =$ المسافة بين البؤرتين

مساحة منطقة القطع الناقص ويرمز لها A (Area) : 9) $A= ab\pi$

محيط القطع الناقص ويرمز له P (Perimeter) $\pi=\frac{22}{7}$, 10) $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

"e" الاختلاف المركزي ويكون دائماً اقل من الواحد $(e<1)$, 11) $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

مثال [redacted]

في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين واحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي .

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

2) $4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$

الحل [redacted]

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث $a>b$.

طول المحور الكبير $\Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$ وحدة

طول المحور الصغير $b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 2b=8$ وحدة

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$$

$$\therefore c=3$$

البؤرتان $\therefore F_1(3,0)\ ,\ F_2(-3,0)$

الرأسان $V_1(5,0)\ ,\ V_2(-5,0)$

(الاختلاف المركزي) $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}<1$

مثال [redacted]

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)\ ,\ F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان $V_1(5,0)\ ,\ V_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الاصل.

الحل

البؤرتان والرأسان يقعان على محور السينات والمركز في نقطة الاصل :

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow c=3 \Rightarrow c^2=9$$

$$\Rightarrow a=5 \Rightarrow a^2=25$$

$$\Rightarrow c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-9=16$$

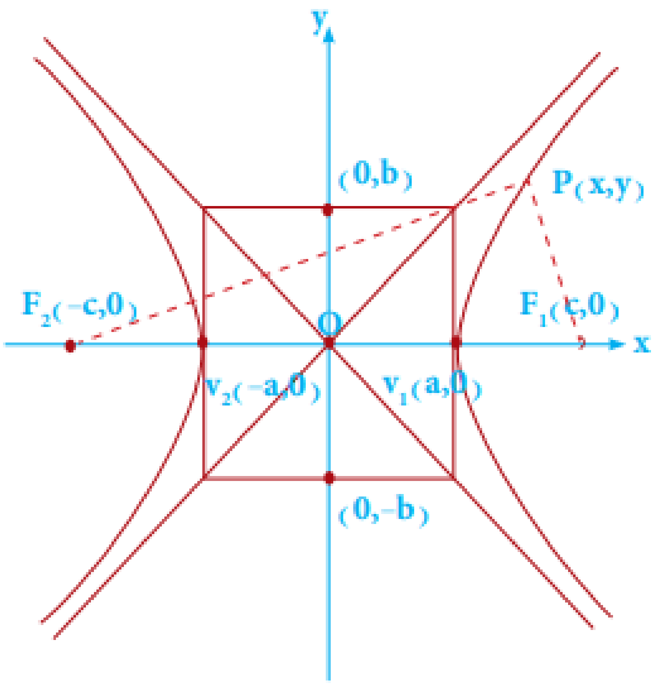
معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

القطع الزائد

تعــريـف

القطع الزائد هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتاً .

كما في الشكل ،



البؤرتان هما $F_1\ (c,0)\ ,\ F_2(-c,0)$

الرأسان هما $V_1\ (a,0)\ ,\ V_2(-a,0)$

والنقطة $P(x,y)$ نقطة من نقاط منحني القطع الزائد ومن التعريف [2 – 6]

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

حيث 2a عدداً ثابتاً يمثل طول المحور الحقيقي للقطع الزائد الذي تقع عليه البؤرتين والرأسين وكل من pF_1 ، pF_2 يسميان طولي نصفي القطرين البؤريين المرسومين من نقطة (p) والمسافة F_1F_2 هي البعد بين البؤرتين وتساوي 2c وطول المحور المرافق او التخيلي هو (2b) وهو المحور العمودي على المحور الحقيقي والمار بمركز القطع) .

معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

تبعاً لتعريف القطع الزائد :

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\Rightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

وبتربيع الطرفين والتبسيط كما مر في معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبؤرتان على محور السينات نحصل على المعادلة :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}$$

من الشكل (2 – 22) فان : $c > 0 , a > 0 , c > a$

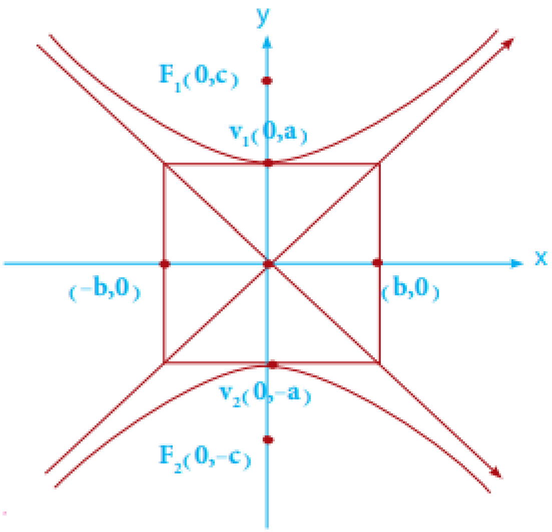
$c^2 - a^2 > 0$

وبفرض ان $b^2 = c^2 - a^2$

وبتعويض عن $a^2 - c^2 = -b^2$ في المعادلة القياسية السابقة نحصل على :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل .



اذا كانت البؤرتان على محور الصـــادات ومحورالسينات هو العمـــود على $F_1 F_2$ من نقطة الاصل كما في الشكل(2 – 23) وبنفس الطريقة السابقة نجد المعادلـــة القيـاسيـــة للقـطـــع الزائـــــد .

وهي : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ملاحظة

الاختلاف المركزي e للقطع الزائد يكون أكبر من واحد أي

$$\boxed{e = \frac{c}{a} > 1}$$

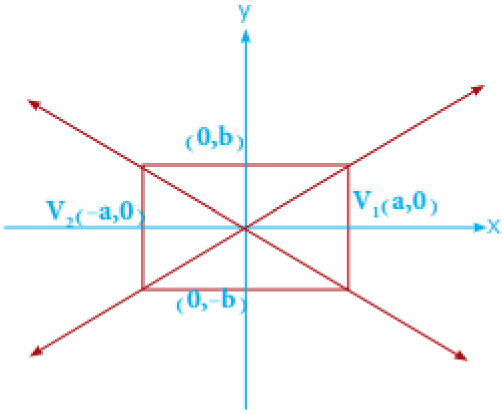
طريقة رسم القطع الزائد Graph The Hyperbola .

لتكن $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلة قطع زائد بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ولرسم هذا القطع :

1. نعين النقطتين $(a , 0) , (-a , 0)$.

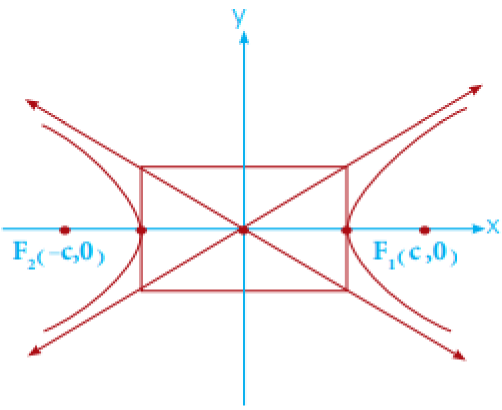
2. نعين النقطتين $(0 , b) , (0 , -b)$.

3. نكون مستطيلاً من هذه النقط أضلاعه تـــوازي المحورين كمـــا في الشكـل



4. نرســـم قطـــري المستطيـــــل كما في الشكل (24 - 2) فهما يمثلان المستقيمين المحاذيين لمنحني القطـع الزائد .

5. نعين البؤرتين $F_1(c , 0)$, $F_2(-c,0)$ ثم نرسم ذراعي القطع الزائد كما في الشكل .



مثال [redacted]

عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد ثم أرسمه.

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

الحل

بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\Rightarrow a^2=64 \Rightarrow a=8 \Rightarrow 2a=16$ وحدة طول المحور الحقيقي

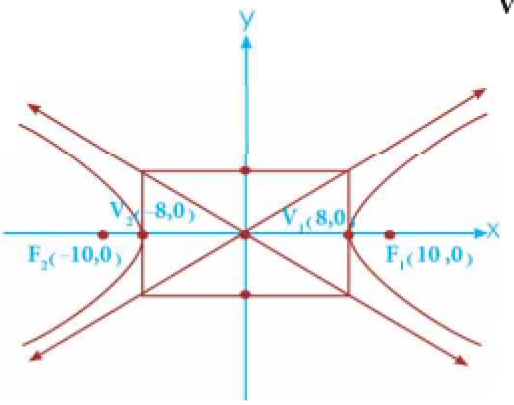
$\Rightarrow b^2=36 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 2b=12$ وحدة طول المحور المرافق

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=64+36$

$\Rightarrow c^2=100 \Rightarrow c=10$

رأسا القطع الزائد هما $V_1(8,0)\ ,\ V_2(-8,0)$

والبؤرتان هما $F_1(10,0)\ ,\ F_2(-10,0)$



مثال [redacted]

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي = 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) والبؤرتان على محور السينات.

الحل

$2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$

$\therefore e=\frac{c}{a} \Rightarrow 2=\frac{c}{3} \Rightarrow c=6$

$\therefore c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 36=9+b^2$

$\Rightarrow b^2=36-9 \Rightarrow b^2=27$

$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ معادلة القطع الزائد القياسية

مثال [redacted]

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق **4** وحدات وبؤرتاه هما النقطتان : $F_1(0,\sqrt{8})$, $F_2(0,-\sqrt{8})$

الحل

بما ان البؤرتين على محور الصادات فمعادلته القياسية $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$$2b=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow b^2=4$$

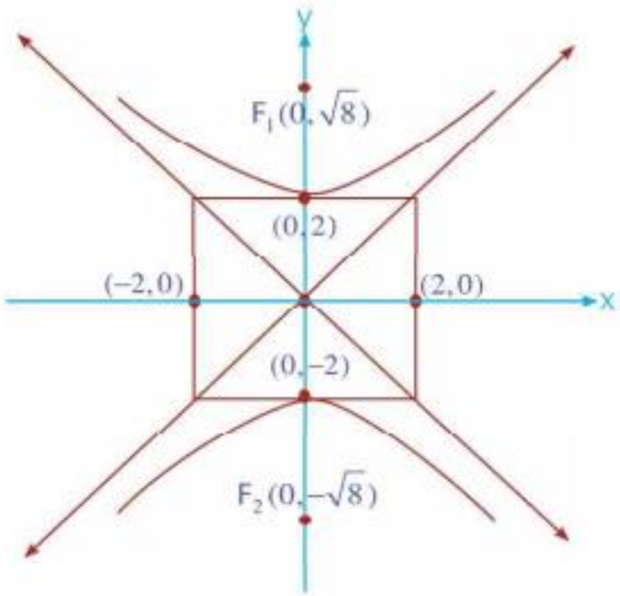
$$c=\sqrt{8} \Rightarrow c^2=8$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$\therefore 8=a^2+4$$

$$a^2=4$$

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$$



كلية شط العرب الجامعة

قسم هندسة تقنيات الاجهزة الطبية

المرحلة الاولى

Differential Mathematics

Theory and rules of derivatives

م.م اية عبد الحسين عبد الرزاق

قواعد المشتقات

1. لتكن $c \in R$ ، $f(x)=c$ دالة ثابتة
فإن $f'(x)=0$
أي أن $\dfrac{dy}{dx} = 0$

مثال 1

جد $f'(x)$

$f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$

$f(x)=\sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = 0$

2. لتكن $f(x)=x^n$
حيث $n \in R \; , \; x \in R \setminus \{0\}$
فأن $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال 2

جد $f'(x)$

1. $f(x)=x^6$
$\therefore f'(x)=6x^5$

2. $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$
$\therefore f'(x) = \dfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

3. $g(n)= \sqrt[3]{n}$
$g(n)=n^{\frac{1}{3}}$
$\therefore g'(n)= \dfrac{1}{3} n^{\frac{-2}{3}}$

اذا اكانت كل من f , g , h دوال قابلة للاشتقاق عند x وكذلك $c \in R$

3.

$$f(x) = cg(x)$$
$$f'(x) = cg'(x)$$

4.

$$f(x) = g(x) \pm h(x)$$
$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

مثال 3 جد $h'(x) , g'(x)$

1. $$g(x) = \frac{3}{2x^2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$g(x) = \frac{3}{2}x^{-2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$g'(x) = -3x^{-3} + \frac{10x}{3} - \frac{7}{5}$$

2. $$h(x) = 10\left(\frac{x^2}{50} + \frac{x}{9} - \frac{1}{3}\right)$$

$$h'(x) = 10\left(\frac{2x}{50} + \frac{1}{9}\right)$$

$$= 10\left(\frac{x}{25} + \frac{1}{9}\right)$$

5.

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$f'(x) = g(x)\, h'(x) + h(x)\, g'(x)$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الاولى

مثال 4

$$f(x) = (3-2x-x^5)\ (2x^7+5)$$

$$f'(x) = (3-2x-x^5)\ (14x^6) + (2x^7+5)\ (-2-5x^4)$$

6.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad h(x) \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{h(x)\, g'(x) - g(x)\, h'(x)}{(h(x))^2}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\dfrac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال 5

جد $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+5}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(2x+3)-(x^2+3x+1)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

التبسيط يترك للطالب

$$\frac{d}{dx}(f'(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

اذا كانت هذه الغاية موجودة تسمى المشتقة الثانية للدالة f بالنسبة الى x ويرمز لها بالرمز:

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

وبالطريقة نفسها تعرف المشتقة الثالثة والرابعة .....

7.

اذا كان

$$g(x) = u^n$$

فأن

$$g'(x) = \frac{dg}{dx}$$

أي

$$\frac{d}{dx}(u)^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

مثال 6

اذا كان $y = (1-x)^3$ جد y', y'' عند $x = 2$

الحل :

$y = (1-x)^3$

$y' = 3(1-x)^2 \ (-1)$

$y' = -3\ (1-x)^2$

عند $x=2$

$\therefore\ y' = -3(1-2)^2 = -3$

$y'' = -6\ (1-x)\ (-1)$

$y'' = 6(1-x)$

عندما $x=2$

$y'' = 6(1-2) = -6$

كلية شط العرب الجامعة

قسم هندسة تقنيات الاجهزة الطبية

المرحلة الاولى

Differential Mathematics

Implicit Differentiation and Chain rules

م.م اية عبد الحسين عبد الرزاق

قاعدة السلسلة

1.

$y = f(n)$ f قابلة للاشتقاق عند n

$n = g(x)$ g قابلة للاشتقاق عند x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

مثال 1

اذا كان كل من $y = 3n^2 + 5$ و $n = 4x + 3$

جد : $\frac{dy}{dx}$

الحل :

$$\frac{dy}{dn} = 6n$$

$$\frac{dn}{dx} = 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

$$= 6n\,(4)$$

$$= 24\,n$$

$$\because n = 4x+3$$

$$\therefore = 24\,(4x+3)$$

$$= 96x + 72$$

حل آخر : نعوض عن قيمة n في $y = 3n^2+5$

$$\Rightarrow \quad y = 3\,(4x+3)^2 + 5$$

$$\therefore\ \acute{y} = 6(4x+3)(4)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 24\ (4x+3\ )$$
$$= 96x+72$$

2.

$y = f(n)$ f قابلة للاشتقاق عند n

$x = g(n)$ g قابلة للاشتقاق عند n

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

مثال 2

اذا كان

$x = 3n - 4$

$y = 2n + 5$

جد $\frac{dy}{dx}$

الحل :

$$\frac{dx}{dn} = 3$$

$$\frac{dy}{dn} = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

$$= \frac{2}{3}$$

مثال 3

اذا كان

$y = 5n + 4$

$x = 3n+1$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $n=1$

الحل :

$$\frac{dy}{dn} = 5$$

$$\frac{dx}{dn} = 3$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

$$= \frac{5}{3}$$

عندما $n = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}$$

مثال 4

اذا كان $y = n^2 + 3n + 2$

$n = 2x + 1$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$

الحل :

$$\frac{dy}{dn} = 2n+3$$

$$\frac{dn}{dx} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

$$= (2n+3)(2)$$

$$= 4n + 6$$

$$\because n = 2x+1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4(2x+1) + 6$$
$$= 8x + 4 + 6$$
$$= 8x + 10$$

عند $x=2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 16 + 10 = 26$$

3.

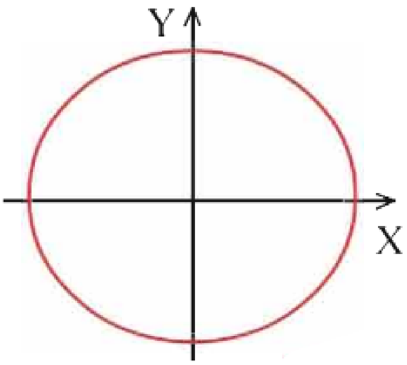
إذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ كلاهما قابلة للإشتقاق عند X

فإن : $(fog)(x) = f(g(x))$

وإن : $(fog)'(x) = f'(g(x))\ g'(x)$

الاشتقاق الضمني

حين تكون y دالة معطاة في x أي $y= f(x)$ ، فيقال ان الدالة صريحة ويسمى x بالمتغير المستقل بينما y بالمتغير التابع .

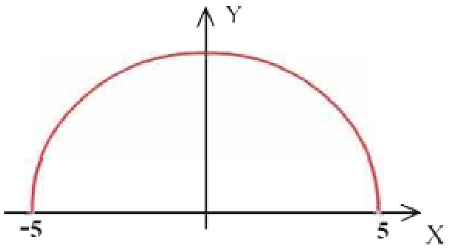


$x^2+ y^2 = 25$ معادلة دائرة وهي ليست دالة .

لكن $y^2 = 25 - x^2$

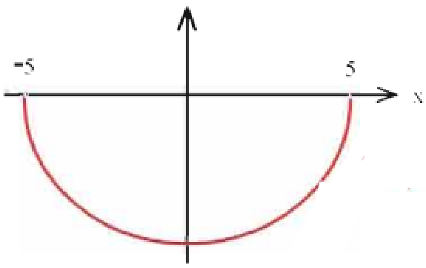
$y = \mp\sqrt{25 - x^2}$

فلو رسمنا $y = \sqrt{25 - x^2}$ لوجدنا انه يمثل نصف الدائرة الاعلى كما في الشكل



وكذلك $y = -\sqrt{25 - x^2}$ وهي تمثل نصف الدائرة الاسفل الشكل

ولكل من العلاقتين :



$y = \sqrt{25 - x^2}$. $y= -\sqrt{25 -x^2}$

يمثلان دالة مجالها $= [-5,5]$

أي أننا عرفنا دالتين ضمن العلاقة $x^2 +y^2 =25$ والتي كما اسلفنا لا تمثل دالة يقال لكل من

$y = \sqrt{25 - x^2}$. $y= -\sqrt{25 - x^2}$ دالة ضمنية.

ولإيجاد مشتقة العلاقة : لتكن $y= f(x)$

$$x^2 + (f(x))^2 = 25$$

$$2x + 2(f(x))\ f'(x) = 0$$

$$\because f(x) = y,\ f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

مثال 1

اذا كان $x^2 - y^2 = 7y - x$ جد

$$\frac{dy}{dx}$$

الحل :

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 7\frac{dy}{dx} - 1$$

$$2x + 1 = 7\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$2x + 1 = \frac{dy}{dx}(7 + 2y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{7+2y}$$

مثال 2

جد معادلة المماس للدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(-3 , 4)$

الحل :

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{y-4}{x+3} = \frac{3}{4}$$

$$3x + 9 = 4y - 16$$

$$3x - 4y + 25 = 0$$

مثال 3

اذا كان $x^2 + y^2 = 10$ اثبت ان : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$

الحل :

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$$ (و.هـ.م)

كلية شط العرب الجامعة

قسم هندسة تقنيات الاجهزة الطبية

المرحلة الاولى

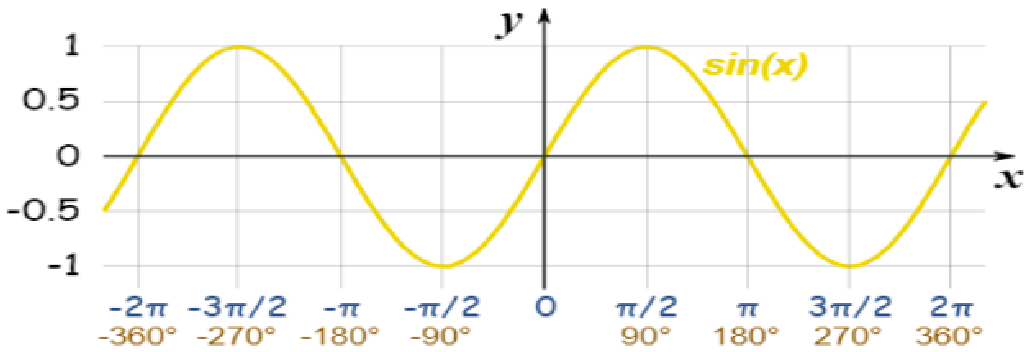
Differential Mathematics

Derivatives of trigonometric functions Derivatives of inverse trigonometric

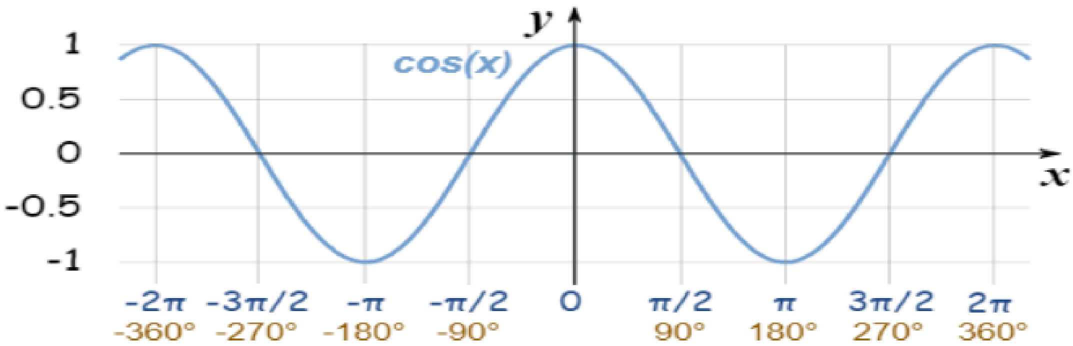
م.م اية عبد الحسين عبد الرزاق

مشتقات الدوال المثلثية

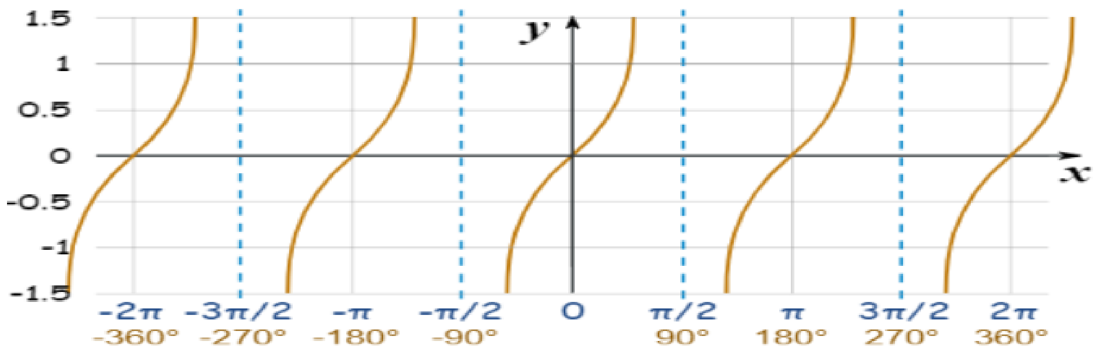
$1)\ \frac{d}{dx}\sin x = \cos x \Longrightarrow in\ Gen. \Rightarrow \frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$



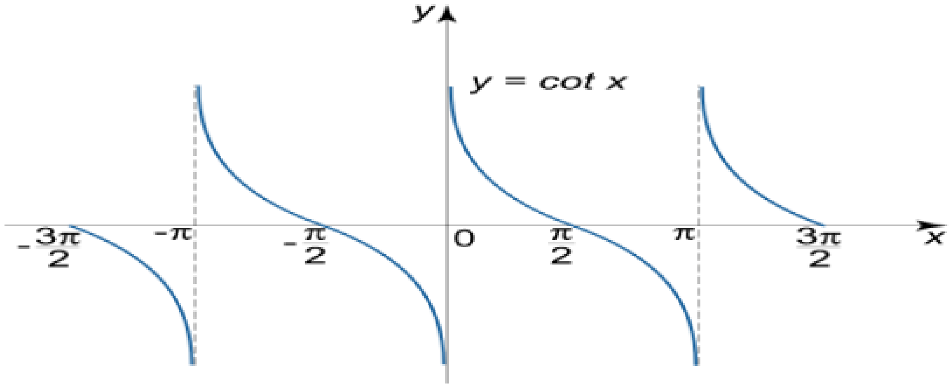
$2)\ \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \Longrightarrow in\ Gen. \Rightarrow \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$



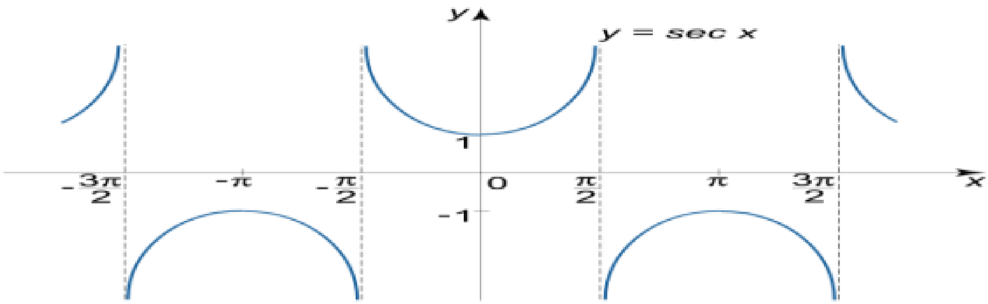
$3)\ \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \Longrightarrow in\ Gen. \Rightarrow \frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$



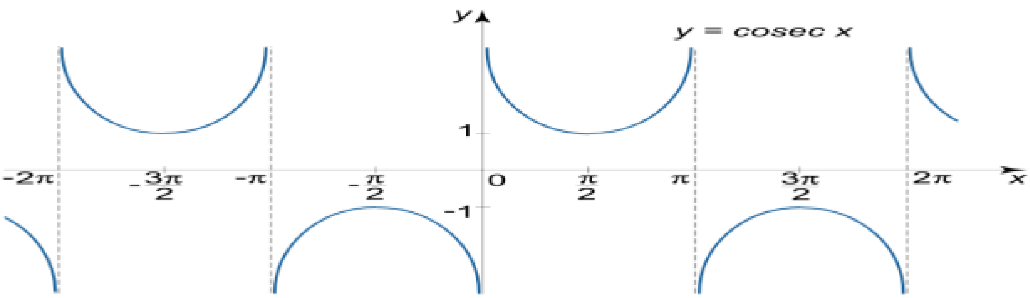
4) $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \Longrightarrow in\ Gen. \Rightarrow \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$



5) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \Longrightarrow in\ Gen. \Rightarrow \frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan\ u\frac{du}{dx}$



6) $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x \Longrightarrow in\ Gen. \Rightarrow \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot\ u\frac{du}{dx}$



مثال جد مشتقة الدالة $y = \sin^3 2x$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2 2x \times \cos 2x \times 2$$

$$= 6\sin^2 2x \cos 2x$$

مثال جد مشتقة الدالة $y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x$ عند $x = \pi$

الحل :

$$y' = x^2\cos x + 2x\sin x - 2x\sin x + 2\cos x - 2\cos x = x^2\cos x$$

$$y'(\pi) = \pi^2 \cos\pi = \pi^2(-1) = -\pi^2$$

مثال اذا كانت $y = \tan t \ , \ x = \sec t$ فاثبت ان $\frac{dy}{dx} = \csc t$

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 t \times \frac{1}{\sec t \tan t}$$

$$= \frac{\sec \mathrm{t}}{\tan t} = \frac{1/\cos t}{\sin t/\cos t}$$

$$= \frac{1}{\sin t} = \csc t$$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية :

$$1.\ \frac{d}{dx}(\sin^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$2.\ \frac{d}{dx}(\cos^{-1}u)=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$3.\ \frac{d}{dx}(\tan^{-1}u)=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$4.\ \frac{d}{dx}(\cot^{-1}u)=\frac{-1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$5.\ \frac{d}{dx}(\sec^{-1}u)=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$6.\ \frac{d}{dx}(\csc^{-1}u)=\frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال جد y' للدالة $\quad y=x\ \sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

الحل :

$$y'=x\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x$$

مثال جد مشتقة الدالة $\quad y=\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}$

الحل :

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\times\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}}\times\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1}=\frac{1}{x^2+1}$$

مثال : اذا كانت $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sec^{-1} x$ فاثبت ان $y'(1) = 0$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

$$y'(1) = \frac{\sqrt{1^2 - 1}}{1} = 0$$

مثال : اذا كانت $y = 2x\cos^{-1} 2x - \sqrt{1 - 4x^2}$ فاثبت ان $y'(0) = \pi$

$$y' = 2x \times \frac{-2}{\sqrt{1 - 4x^2}} + 2\cos^{-1} 2x - \frac{-8x}{2\sqrt{1 - 4x^2}}$$

$$= -\frac{4x}{\sqrt{1 - 4x^2}} + 2\cos^{-1} 2x + \frac{4x}{\sqrt{1 - 4x^2}} = 2\cos^{-1} 2x$$

$$y'(0) = 2\cos^{-1}(0) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$