كلية الكنوز الجامعة
رياضيات عامة

قسم المحاسبة
المرحلة الأولى

المصفوفات

المصفوفات

المصفوفة Matrix: عبارة عن مجموعة من الاعداد الحقيقية أو المعقدة أو منهما معاً مرتبة على شكل صفوف واعمدة بشكل مستطيل .

المصفوفة التي تملك m من الصفوف و n من الاعمدة تدعى مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وتكتب بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فمثلاً المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ \sqrt{3} & 2+i & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة من الدرجة 2×3 .

اذا كانت $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ \ln 4 & 2 & e^3 \end{bmatrix}$ فان

$$a_{11} = 1\,, a_{12} = -3\,, a_{13} = \sqrt{2}\,, a_{21} = \ln 4\,, a_{22} = 2\,, a_{23} = e^3$$

جمع وطرح المصفوفات : لجمع أو طرح مصفوفتين أو أكثر فاننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة وفي هذه الحالة يجب ان تكون المصفوفات من الدرجة ذاتها فمثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-5) & -2+1 \\ 0+(-3) & 1+4 \\ 4+(-6) & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-(-2) \\ 2-1 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفة بثابت : اذا ضُربت مصفوفة بثابت معين c فان جميع عناصرها تُضرب بهذا الثابت فمثلاً

$$2\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times(-2) \\ 2\times 0 & 2\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفتين : يمكن ضرب مصفوفتين اذا كان عدد الاعمدة في الاولى يساوي عدد الصفوف في الثانية فاذا كانت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ والمصفوفة B من الدرجة $n \times r$ فان المصفوفة $C = A.B$ تكون من الدرجة $m \times r$ ويمكن التعبير عن حاصل ضرب المصفوفتين A و B كما يلي :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

حيث c_{ij} عنصر في المصفوفة C و $i = 1,2,3,\cdots,m \;\; and \;\; j = 1,2,3,\cdots,r$

ان عملية ضرب مصفوفتين ليست ابدالية اي انه ليس من الضروري ان يكون $A.B = B.A$

مثال (١) جد $B.A$ و $A.B$ (ان أمكن) اذا كان $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & -\sqrt{2} & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & \sqrt{2}\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & -\sqrt{2} & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & \sqrt{2}\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times3+0\times(-2)+1\times4 & 2\times(-1)+0\times\sqrt{2}+1\times(-3)\\ -4\times3+(-\sqrt{2})\times(-2)+5\times4 & -4\times(-1)+(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}+5\times(-3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & -5\\ 8+2\sqrt{2} & -13\end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & \sqrt{2}\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & -\sqrt{2} & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times2+(-1)\times(-4) & 3\times0+(-1)\times(-\sqrt{2}) & 3\times1+(-1)\times5\\ (-2)\times2+\sqrt{2}\times(-4) & (-2)\times0+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2}) & (-2)\times1+\sqrt{2}\times5\\ 4\times2+(-3)\times(-4) & 4\times0+(-3)\times(-\sqrt{2}) & 4\times1+(-3)\times5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & \sqrt{2} & -2\\ -4-4\sqrt{2} & -2 & -2+5\sqrt{2}\\ 20 & 3\sqrt{2} & -11\end{bmatrix}$$

مبدلة المصفوفة Transpse of a Matrix:

اذا كانت لدينا المصفوفة A من الدرجة $m\times n$ فان مبدلة A تكون من الدرجة $n\times m$ ويرمز لها بالرمز A^T

ويمكن الحصول عليها بابدال الصفوف بالاعمدة فمثلاً اذا كانت لدينا

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 6 & 3 & -9\end{bmatrix} \text{ فان } A^T=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\\ -3 & -9\end{bmatrix}$$

مصفوفات خاصة Special Matrices

المصفوفة المربعة Square Matrix:

وهي مصفوفة من الدرجة $m\times m$ اي تتساوى فيها عددالصفوف مع الاعمدة كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 9 & -2 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

المصفوفة القطرية Diagonal Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة التا فهة Null Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ونكتب $A = 0$

* اذا كان $A.B = 0$ فليس من الضروري ان تكون احدى المصفوفتين صفراً فمثلاً اذا كانت

$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$ فان $A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+4-6 & 18-6-12 \\ 6+12-18 & 54-18-36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الوحدة Unit Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي فانها تساوي 1 ونرمز لها بالرمز I

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* ان حاصل ضرب مصفوفة الوحدة باي مصفوفة اخرى من نفس الدرجة يساوي المصفوفة نفسها اي $A.I = I.A = A$

<u>المحددة للمصفوفة المربعة Determinant of Square Matrix :</u>

اذا كانت A مصفوفة مربعة فانها تمتلك محددة ونرمز لها بالرمز $det(A)$ أو $|A|$ وتحسب كما يلي

* اذا كانت A من الدرجة 2×2 و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فان $det(A) = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$

** اذا كانت A من الدرجة 3×3 و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ فان

$$det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \times a_{33} - a_{32} \times a_{23}) - a_{12}(a_{21} \times a_{33} - a_{31} \times a_{23}) + a_{13}(a_{21} \times a_{32} - a_{31} \times a_{22})$$

ويمكن حسابها بطريقة أُخرى وكما يلي :

$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

ملاحظة : $det(A) = det(A^T)$

مثال (٢) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ فجد $det(A)\ ,\ det(B)$

الحل : $det(A) = 12 - 2 = 10$

$$det(B) = 5(42 - 12) - 2(0 - 24) + 1(0 - 48) = 150$$

مرافق المصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة فان لكل عنصر من عناصرها مرافق A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, det(M_{ij})$$

حيث $det(M_{ij})$ هي المحددة الناتجة من المصفوفة A وذلك بحذف الصف i والعمود j

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل \

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\ det(M)$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3 - 2) = -5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 1) = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(4 + 1) = 5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(-3 - 0) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(9 - 0) = 9$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(6 + 1) = -7$$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1(-1-0)=-1$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1(3-0)=-3$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1(-3+2)=-1$

$$A_{ij}=\begin{bmatrix}-5 & -5 & 5\\ 3 & 9 & -7\\ -1 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة يحيث ان $det(A)\neq 0$ فان معكوس A يُرمز له بالرمز A^{-1} يُحسب من القاعدة التالية :

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}adj(A)$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

الحل

1- نستخرج محدد المصفوفة

$det(A)=1\begin{vmatrix}7 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}5 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}5 & 7\\ 2 & 1\end{vmatrix}$

$=1(21-4)-2(15-8)+3(5-14)=17-14-27=-24$

det(A)= -24

2- نستخرج مرافق المصفوفة

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1(21-4)=17$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1(15-8)=-7$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 7\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1(5-14)=-9$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 3\end{vmatrix} = -1(6-3) = -3$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 3\end{vmatrix} = 1(3-6) = -3$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix} = -1(1-4) = 3$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\7 & 4\end{vmatrix} = 1(8-21) = -13$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\5 & 4\end{vmatrix} = -1(4-15) = 11$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\5 & 7\end{vmatrix} = 1(7-10) = -3$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix}17 & -7 & -9\\-3 & -3 & 3\\-13 & 11 & -3\end{bmatrix}$$

3- نستخرج مبدل المصفوفة وتسمى مصفوفة المرافقات

$$A^T \text{ او } adj(A)=\begin{bmatrix}17 & -3 & -13\\-7 & -3 & 11\\-9 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

4- نستخرج معكوس المصفوفة

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

$$A^{-1}= \frac{1}{-24}\begin{bmatrix}17 & -3 & -13\\-7 & -3 & 11\\-9 & 3 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.708 & 0.125 & 0.541\\0.291 & 0.125 & -0.458\\0.375 & -0.125 & 0.125\end{bmatrix}$$

تمارين إضافية

1- جد $A+B$ لكل المصفوفات الاتية:-

a) $A = \begin{bmatrix}2 & -2\\0 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix}-5 & 1\\-3 & 4\\-6 & -2\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & -7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} 1 & -8 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 9 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

e) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

f) $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

g) $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

2- جد $A-B$ لكل المصفوفات الاتية:-

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$e)\quad A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{bmatrix}\quad$ B= $\begin{bmatrix}4&-1&1\\1&2&-4\\-2&1&3\end{bmatrix}$

$f)\, A=\begin{bmatrix}4&5\\6&7\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}3&2\\5&8\end{bmatrix}$

$g)\quad A=\begin{bmatrix}1&4\\0&3\\5&6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&0\\1&4\end{bmatrix}$

3- جد كل من $A.B$ و B.A لكل المصفوفات الاتية:-

a) $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}8&-1&3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{bmatrix}$

$b)\quad A=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&3&-2\\2&-1&0\end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&3&-2\\2&-1&0\end{bmatrix}$

e) $A=\begin{bmatrix}-5&2&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}7&6\\0&-3\\-2&5\end{bmatrix}$

4- جد A^T لكل من المصفوفات الاتية:-

$a)\quad A=\begin{bmatrix}2&0\\3&4\end{bmatrix}\qquad b)\quad A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&6&5\\3&-1&10\end{bmatrix}$

$$d)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$c)\quad A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -1 & 0\\ 8 & -2\end{bmatrix}$$

5- جد $|A|$ لكل من المصفوفات الاتية:-

$$a)\quad A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ 3 & 6 & 2\\ 4 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$$b)\quad A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ -1 & 5 & -2\\ 4 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

$$c)\quad A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$d)\quad A=\begin{bmatrix}-8 & 2\\ 7 & -3\end{bmatrix}$$

$$e)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$f)\quad A=\begin{bmatrix}-14 & 0\\ 23 & 0\end{bmatrix}$$

$$g)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 6\\ -4 & 7 & -2\end{bmatrix}$$

6- جد (A^{-1}) معكوس المصفوفة الاتية:-

$$a)\quad A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

حل المعادلات باستخدام المصفوفات

مثال \ حل المعادلتين باستخدام المصفوفات

x+y=5
x-y=1

**الحل **

1- تشكيل المصفوفات وهي

أ- مصفوفة المعاملات ويرمز لها بالرمز A

$$A=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

ب- مصفوفة المتغيرات ويرمز لها بالرمز B

$$B=\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix}$$

ج- مصفوفة النواتج ويرمز لها بالرمز C

$$C=\begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

2- نحسب المحدد من المصفوفة A

$$[\boldsymbol{A}] = (\mathbf{1} \times -\mathbf{1}) - (\mathbf{1} \times \mathbf{1}) = -\mathbf{2}$$

3- نستخرج المصفوفة بعد التبديل

نستبدل عناصر القطر الرئيسي اما عناصر القطر الثانوي نستبدل فقط الإشارة

$$A^{T}=\begin{bmatrix} -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

4- نستخرج معكوس المصفوفة A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0.5} & -\mathbf{0.5} \end{bmatrix}$$

5- نحسب قيمة x,y

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{-0.5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 \times 5 + 0.5 \times 1 \\ 0.5 \times 5 + (-0.5) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

X=3 y=2

مثال \ حل المعادلتين باستخدام المصفوفات

2X+5Y=1

3X+7Y=2

تشكيل المصفوفات وهي

أ- مصفوفة المعاملات ويرمز لها بالرمز A

A=$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$

ب- مصفوفة المتغيرات ويرمز لها بالرمز B

B=$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix}$

ج- مصفوفة النواتج ويرمز لها بالرمز C

C=$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$

2- نحسب المحدد من المصفوفة A

$$[\boldsymbol{A}] = (\mathbf{2} \times \mathbf{7}) - (\mathbf{3} \times \mathbf{5}) = -\mathbf{1}$$

3- نستخرج المصفوفة بعد التبديل

نستبدل عناصر القطر الرئيسي اما عناصر القطر الثانوي نستبدل فقط الإشارة

A^T=$\begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

4- نستخرج معكوس المصفوفةA^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{1}\begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

5- نحسب قيمة x,y

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 \times 1 + 5 \times 2 \\ 3 \times 1 + -2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

X=3 y=-1

تمارين إضافية

حل المعادلتين باستخدام المصفوفات

1.

2x+3y=7
x-3y=-1

2.

3x+4y= 12
4X+2y=16

3.

3x+y=5

6x+2y=1

كلية الكنوز الجامعة
رياضيات عامة

قسم المحاسبة
المرحلة الأولى

المتبـاينـات

المتباينات:

أي تعبير يتضمن احد الرموز $<$ ، $\leq$ ، $>$ ، $\geq$ يسمى متباينة. فمثلاً كل مما يلي هي متباينات:

$$(i)\ 3x+4\leq 8-2x$$

$$(ii)\ \frac{2x+4}{x+5}<3$$

$$(iii)\ (x+4)(x-1)>9$$

تستخدم المتباينات في تعريف نوع خاص من المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية والتي تسمى الفترة. وهناك أربعة أنواع من الفترات تعرف كما يلي:

1. فترة مغلقة $[a,b]=\{x\in R: a\leq x\leq b\}$
2. فترة مفتوحة $(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$
3. نصف مغلقة (نصف مفتوحة) $[a,b)=\{x\in R: a\leq x<b\}$
4. فترة نصف مفتوحة (نصف مغلقة) $(a,b]=\{x\in R: a<x\leq b\}$

خواص المتباينات:

1. $a^2\geq 0 \quad a\in R$

2- إذا كانت $a<b$ و $b<c$ فان $a<c$

3- إذا كانت $a<b$ فان $a+c<b+c$ وكذلك $a-c<b-c$

4- إذا كانت $a<b$ وكانت $c>0$ فان $ac<bc$

5- إذا كانت $a<b$ وكانت $c<0$ فان $ac>bc$

6- إذا كانت $a>0$ فان $\frac{1}{a}>0$

7- إذا كانت $a>0$ و $b>0$ بحيث $a<b$ فان $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

حل المتباينات:

حل المتباينة هو القيمة أو مجموعة القيم التي تجعل المتباينة صحيحاً.

مثال\ حل المتباينة $4x+7 \geq 2x-3$

الحل:

$$4x+7-7 \geq 2x-3-7$$

$$4x \geq 2x-10$$

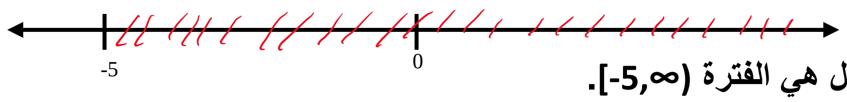
$$4x-2x \geq -10$$

$$2x \geq -10$$

$$\frac{1}{2} \times 2x \geq \frac{1}{2} \times -10$$

$$x \geq -5$$

$$\{x : x \in R, X \geq -5\}$$



مجموعة الحل هي الفترة (-5,∞].

مثال \ حل المتباينة $-5 < 3x-2 < 1$

الحل:

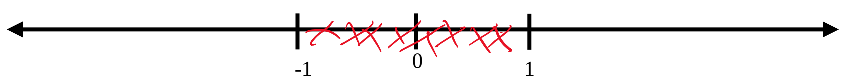
$$-5+2 < 3x < 1+2$$

$$-3 < 3x < 3$$

$$\frac{1}{3} \times -3 < \frac{1}{3} \times 3x < \frac{1}{3} \times 3$$

$$-1 < x < 1$$

$$\{x : x \in R, -1 < X < 1\}$$



مجموعة الحل هي الفترة (-1,1).

مثال \ حل المتباينة

$$x^2 + x - 12 > 0$$

(اختيار طريقة الحل تترك للطالب)

الطريقة الأولى للحل

الحل: $(x-3)(x+4) > 0$

الحالة الأولى $(x-3) > 0$ $\quad$ $(x+4) > 0$

اذاً $x > 3$ $\quad$ $x > -4$

أي أن $x > 3$

الحالة الثانية $(x-3) < 0$ $\quad$ $(x+4) < 0$

اذاً $x < 3$ $\quad$ $x < -4$

أي أن $x < -4$

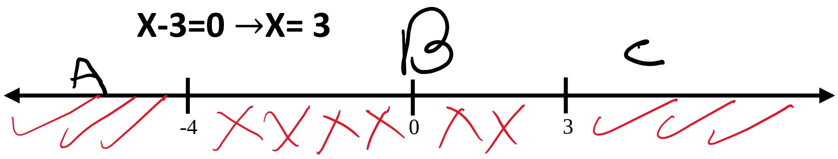
اذاً مجموعة الحل هي $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

الطريقة الثانية للحل

(X+4)(X-3)>0

X+4=0 →X= -4

X-3=0 →X= 3



نختار أي عدد من كل من منطقة ونجربه في المعادلة (X+4)(X-3)>0

منطقة C	منطقة B	منطقة A
(X+4)(X-3)>0	(X+4)(X-3)>0	(X+4)(X-3)>0
(5+4)(5-3)	(2+4)(2-3)	(-5+4)(-5-3)
(9)(2)	(6)(-1)	(-1)(-8)
18>0 ✓	-6<0 ✗	8>0 ✓

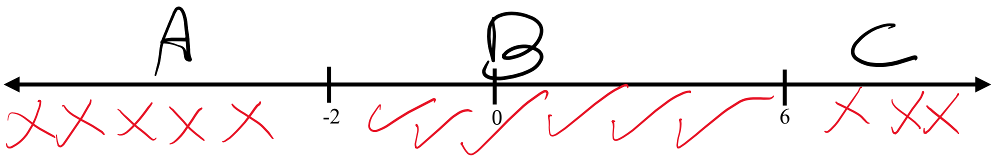
اذاً مجموعة الحل هي $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

مثال\ حل المتباينة

$$x^2 \leq 4x+12$$

الحل:

$$x^2-4x-12 \leq 0$$
$$(x-6)(x+2) \leq 0$$
$$(x-6)(x+2)=0$$
$$x-6=0 \Rightarrow x=6$$
$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$



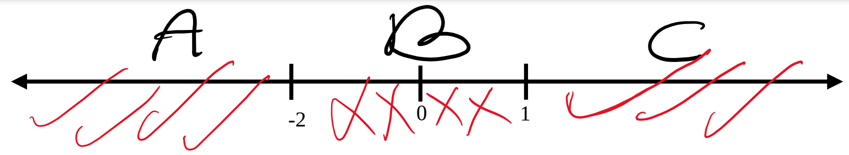
منطقة A	منطقة B	منطقة C
$(X-6)(X+2) \leq 0$	$(X-6)(X+2) \leq 0$	$(X-6)(X+2) \leq 0$
(-7-6)(-7+2)	(5-6)(5+2)	(8-6)(8+2)
(-13)(-5)	(-1)(7)	(2) (10)
65>0 ✗	-7<0 ✓	20>0 ✗

مجموعة الحل هي $[-2,6]$

مثال \حل المتباينة $\dfrac{4x+5}{x+2} \geq 3$

الحل:

$$\frac{4x+5}{x+2}-3 \geq 0$$
$$\frac{4x+5-3x-6}{x+2} \geq 0$$
$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$
$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$



منطقة A

$$\frac{X-1}{X+2} \geq 0$$

$$\frac{-5-1}{-5+2} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7} > 0$$

منطقة B

$$\frac{X-1}{X+2} \geq 0$$

$$\frac{0-1}{0+2} = \frac{-1}{2} < 0$$

منطقة C

$$\frac{X-1}{X+2} \geq 0$$

$$\frac{4-1}{4+2} = \frac{3}{6} > 0$$

مجموعة الحل $(-\infty,-2) \cup [1,\infty)$

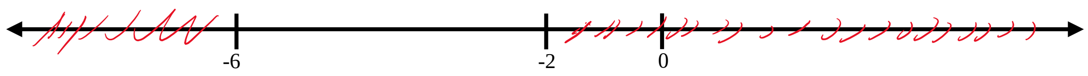
**مثال **

$|X+4| > 2$

X+4>2 او X+4<-2

X>-2 او X<-6

$\{x{:}x\in R, X > -2\} \cup \{x{:}x\in R, X < -6\}$



$(-\infty,-6) \cup (-2,\infty)$

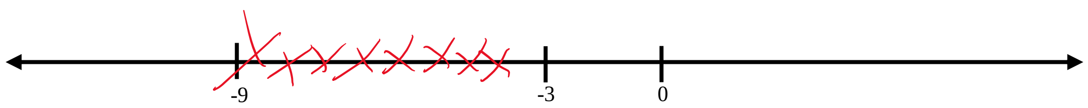
$|X+6| < 3$

-3< X+6<3

-3-6<X+6-6<3-6

-9<X<-3

$\{x{:}x\in R, -9 < X < -3\}$



مجموعة الحل هي (-9,-3)

تمارين إضافية

حل المتباينات التالية:

1- $5 > 2 - 9x > -4$

2- $5x - 6 > 11$

3- $-6 \leq 1 - 3x \leq 2$

4- $3x - 5 < 10$

5- $4 \leq 2x + 2 \leq 10$

6- $3 \leq 4x - 7 < 9$

7- $3x < 5x - 8$

8- $|5 - x| < 10$

9- $|5y| - 2 \leq 8$

10- $|2x| + 7 \geq 8$

11- $|4y| - 2 > 3$

12- $\frac{X+7}{X-1} \leq 0$

13- $x^2 + x < 2$

14- $X^2 + 4X - 21 > 0$

15- $X^2 + 2X - 15 \geq 0$

كلية الكنوز الجامعة
رياضيات عامة

قسم المحاسبة
المرحلة الأولى

الغايات

الغايات:

الغاية هي أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات وبشكل خاص في التفاضل والتكامل و التحليل الرياضي يقصد بغاية الدالة $f(x)$ هو التعبير عن سلوك الدالة f عندما يقترب متغير الدالة x من قيمة معينة ولتكن a يعبر عن الغاية رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x \to a} f(x) = C$$

C : عدد حقيقي يمثل غاية الدالة او نهاية الدالة تقرأ نهاية او غاية الدالة $f(x)$ هي C عندما x تؤول او تقترب الى a.

اذا كانت الغاية من جهة اليمين يعبر عنها رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = C_1$$

واذا كانت الغاية من جهة اليسار يعبر عنها رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = C_2$$

فأن غاية الدالة $f(x)$ تكون موجودة اذا كان $C_1 = C_2$ وتكون غاية الدالة $f(x)$ غير موجودة اذا كان $C_1 \neq C_2$.

مثال (1) اوجد غاية الدالة $f(x) = x^2 - 1$ عندما $x \to 0$.

الحل:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 - 1 = (0)^2 - 1 = -1$$

x	0.5	0.25	0.125	0.0625	⋯	0
$f(x)$	-0.75	-0.93	-0.98	-0.99	⋯	-1

نلاحظ ان الدالة $f(x)$ تقترب من -1 عندما x تقترب من 0.

مثال (2) اوجد غاية الدالة $f(x) = 3x + 2$ عندما $x \to 1$

الحل:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x + 2 = 3(1) + 2 = 5$$

x	0.5	0.6	0.8	0.9	0.99	$\cdots$	1
$f(x)$	3.5	3.8	4.4	4.7	4.97	$\cdots$	5

نلاحظ ان الدالة $f(x)$ تقترب من 5 عندما x تقترب من 1.

2. خواص الغايات

اذا كانت غاية الدالة $f(x)$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = C$$

وكانت غاية الدالة $g(x)$

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = L$$

وكانت z , m , n ثوابت فأن الخواص التالية تكون متحققة

- **الخاصية الاولى: غاية الدالة الثابتة تساوي الثابت نفسه**

$$\lim_{x\to a} z = z \qquad , \quad f(x) = z$$

مثال (3): اوجد الغاية للدوال التالية

$$\lim_{x\to 1} 8 = 8$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

- **الخاصية الثانية: الغاية تتوزع على عملية الجمع والطرح للدوال**

$$\lim_{x\to a}(f(x)\mp g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x) = C\mp L$$

مثال(4): اوجد الغاية للدالة كثيرة الحدود التالية

$$\lim_{x\to 2}(3x^2+6x+8)$$

حسب الخاصية الثانية يتم ادخال الغاية على كل حد من حدود الدالة

$$= \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 6x + \lim_{x\to 2} 8$$

ثم يتم تعويض القيمة (2) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$= 3(2)^2 + 6(2) + 8$$

$$= 12 + 12 + 8$$

$$= 32$$

بما ان غاية الدالة موجودة اذن الغاية من جهة اليمين تساوي الغاية من جهة اليسار.

مثال(5): اوجد الغاية للدالة كثيرة الحدود التالية

$$\lim_{x\to -1}(4x^2-2x-x)$$

حسب الخاصية الثانية يتم ادخال الغاية على كل حد من حدود الدالة

$$= \lim_{x\to -1} 4x^2 - \lim_{x\to -1} 2x - \lim_{x\to -1} x$$

ثم يتم تعويض القيمة (-1) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$= 4(-1)^2 - 2(-1) + 1$$

$$= 4 + 2 + 1$$

$$= 7$$

❖ **الخاصية الثالثة: الغاية تتوزع على عملية الضرب لدالتين**

$$\lim_{x\to a}(f(x)*g(x))=\lim_{x\to a}f(x)*\lim_{x\to a}g(x)=C*L$$

مثال(6): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 2}(x+1)(x^2-1)$$

حسب الخاصية الثالثة يتم توزيع الغاية على الدالتين

$$=\lim_{x\to 2}(x+1)\lim_{x\to 2}(x^2-1)$$

ثم يتم تعويض القيمة (2) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$=(2+1)*((2)^2-1)$$

$$=3*(4-1)$$

$$=3*3$$

$$=9$$

❖ **الخاصية الرابعة: الغاية لثابت مضروب في دالة يساوي الثابت في غاية الدالة**

$$\lim_{x\to a}z\,f(x)=z\lim_{x\to a}f(x)=zC$$

مثال(7): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 3}9(x^2-x)$$

حسب الخاصية الرابعة يتم ادخال الغاية على الدالة فقط واخراج الثابت خارج الغاية

$$=9\lim_{x\to 3}(x^2-x)$$

$$=9((3)^2-3)$$

$$=9(9-3)$$

$$=9*6$$

$$=54$$

❖ **الخاصية الخامسة: الغاية تتوزع على حاصل قسمة دالتين**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{C}{L}$$

مثال(8): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 6}\frac{x+2}{x-3}$$

حسب الخاصية الخامسة يتم توزيع الغاية على دالة البسط ودالة المقام

$$=\frac{\lim_{x\to 6} x+2}{\lim_{x\to 6} x-3}$$

$$=\frac{6+2}{6-3}$$

$$=\frac{8}{3}$$

❖ **الخاصية السادسة: الغاية لدالة مرفوعة للأس**

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{\frac{n}{m}}=(\lim_{x\to a}f(x))^{\frac{n}{m}}=C^{\frac{n}{m}}$$

مثال(9): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 3}(x^2-x+4)^{\frac{2}{3}}$$

حسب الخاصية السادسة يتم ادخال الغاية على الدالة داخل القوس المرفوع للأس

$$=\left(\lim_{x\to 3}(x^2-x+4)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=(\lim_{x\to 3}x^2-\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}4)^{\frac{2}{3}}$$

$$=((3)^2-3+4)^{\frac{2}{3}}$$

$$=(9-3+4)^{\frac{2}{3}}$$

$$= (10)^{\frac{2}{3}}$$

$=$

❖ **الخاصية السابعة: الغاية لدالة تحت الجذر**

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

مثال(10): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x^2 - 2}$$

حسب الخاصية السابعة يتم ادخال الغاية على الدالة داخل الجذر التربيعي

$$= \sqrt{\lim_{x\to 4} (x^2 - 2)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 - \lim_{x\to 4} 2}$$

$$= \sqrt{((4)^2 - 2)}$$

$$= \sqrt{16 - 2}$$

$$= \sqrt{14}$$

♣ **ملاحظات حول ايجاد غاية الدالة $f(x)$**

لغرض الوصول الى غاية الدالة $f(x)$ يتم تعويض قيمة a التي يؤول اليها المتغير x في الدالة f كما في الامثلة السابقة ويكون ناتج التعويض اما كمية محددة (معرفة) عندها ينتهي الحل او يكون ناتج التعويض كمية غير محددة (غير معرفة) مثل $\frac{\infty}{\infty}$ او $\frac{0}{0}$ هذه الحالة تظهر عادةً في الدوال الكسرية التي يكون فيها كل من البسط والمقام عبارة عن دوال متعددة الحدود ولغرض ايجاد حل لهذه الحالات نطبق الاتي:

1. اذا كان ناتج التعويض يساوي $\frac{0}{0}$ نقوم بأحد الاجراءات التالية:

أ- نحلل البسط والمقام بأحد طرق التحليل (الفرق بين مربعين ، التجربة ، الفرق بين مكعبين ، مرافق الجذر)

ب- نستخدم القانون التالي اذا كان يلائم السؤال

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

2. اذا كان ناتج التعويض يساوي $\frac{\infty}{\infty}$ وكان أس x في المقام اكبر او تساوي أس x في البسط نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على x المرفوعة لاكبر أس في المقام، أما اذا كان أس x في البسط اكبر من أس x في المقام فنقوم بقسمة كل من البسط والمقام على x المرفوعة لاكبر أس في البسط.

مثال(11): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

حسب الخاصية الخامسة يتم توزيع الغاية على البسط والمقام

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\lim_{x\to 1} x^2-1}{\lim_{x\to 1} x-1}$$

$$=\frac{(1)^2-1}{1-1}$$

$$=\frac{0}{0}$$

بما ان ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ يجب ان نحلل الدالة للوصول الى غاية الدالة يكون التحليل بأستخدام قانون الفرق بين مربعين

$$(x^2-a^2)=(x-a)(x+a)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)$$

$$=1+1=2$$

لتكن
$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$$

هل للدالة $f(x)$ غاية عندما $x\longrightarrow 1$ ؟

الحل

عندما $x\longrightarrow 1^+$ من اليمين فإن $f(x)=x^2+1$ من تعريف الدالة في السؤال

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)$$
$$=\lim_{x\to 1^+} x^2+\lim_{x\to 1^+} 1=1^2+1=2=L_1$$

عندما $x\longrightarrow 1^-$ من اليسار فإن $f(x)=2x$ من تعريف الدالة في السؤال

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x)=2\cdot\lim_{x\to 1^-} x=2\cdot 1=2=L_2$$

$$\because L_1=L_2$$
$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=2$$ موجودة

تمارين إضافية

(a) جد قيمة كل مما يأتي:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2+2x-15}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+2x+3)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+1}{x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to -3}(x^3+2x)$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+5}{2x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-1)}{(2x-2)}$

(b)**جد قيمة كل مما يأتي:**

1-

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x > 2 \\ 2 - 2x & x \leq 2 \end{cases}$$

هل للدالة f غاية عند 2 ؟ بين ذلك .

2-

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ 2 - x & x < 2 \end{cases}$$

هل للدالة f غاية عندما $x \longrightarrow 2$ ؟ بين ذلك

3- اذا كانت $f : \{x : x \geq -2 \text{ ، } x \in R\} \to R$ وان $f(x) = \sqrt{x+2}$ جد $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$