وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

كلية الادارة والاقتصاد

قسم إدارة الاعمال

الرياضيات

اعداد

أ.د محمد عبود

2024 - 2023

المجموعة

(1)

ج جزئية
ع تمهيد

المجموعة:

هي تجمع من الأشياء المحددة تحديداً "تاماً" وتسمى هذه الأشياء بعناصر المجموعة

التعبير عن المجموعة:

① الأحرف الكبيرة A, B, E, H تدل على المجموعات

② " الصغيرة k, P " " عناصر المجموعة

③ يمكن كتابة جميع عناصر المجموعة مثل مجموعة الاعداد الطبيعية التي هي أقل من 10

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

④ يمكن كتابة بعض عناصر المجموعة حيث نكتب عدد معين من العناصر متبوع ~~بخط~~ ~~الحد~~ النقاط ثلاث نقاط "مثلاً" مجموعة الاعداد الطبيعية

$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$

⑤ يمكن تعبير عن المجموعة بطريقة الوصف اللفظي أي نعبر عن المجموعة بجمل مفيدة "مثلاً" N هي مجموعة الأعداد الطبيعية

⑥ يمكن تعبير عن المجموعة بطريقة الصفة المميزة حيث نستخدم حرف أو أكثر ليدل على عناصر المجموعة "مثلاً" $M = \{w : w^2 - 4 = 0\}$

المجموعات هي

1- مجموعة الأعداد الطبيعية: $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

2- " " الصحيحة: $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$

3- " " النسبية: $Q = \{x : x = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0\}$

4- " " الحقيقية: هي تتكون من مجموعة الاعداد النسبية ومجموعة الاعداد غير النسبية وتمثل مجموعة الاعداد الحقيقية بخط الأعداد ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$

5- " الاعداد العقدية: يعرف العدد العقدي (x, y) بالزوج المرتب حيث x, y عددين حقيقيين ونرمز لها بالرمز C

6- المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحتوي على اي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ

7- المجموعة الجزئية: يقال أن المجموعة X محتواة في المجموعة Y أو X مجموعة جزئية من Y اذا كان كل عنصر في X هو عنصر في Y ونرمز له

$X \subseteq Y$

٨- المجموعة المنتهية : هي المجموعة التي تحتوي على عدد محدود من العناصر مثلاً $Y=\{-2,0,2\}$

٩- المجموعة الغير منتهية : هي المجموعة التي عناصرها غير محدد مثل
$Y=\{-2,-1,0,2,\dots\}$

١٠- مجموعة الأعداد الغير نسبية : وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل بسط ومقام

مثال

$\pi, \sqrt{5}, \sqrt{7}$

١١- مجموعة الأعداد المركبة مثل $C=\{a+bi, a,b\in\mathbb{R}, \sqrt{i}=-1\}$

مثال : $6-2i$, $-9+5i$, $2-5i$

المجموعة الجزئية

يقال أن A هي مجموعة جزئية من المجموعة B اذا كان كل عنصر في A ينتمي الى B .

ويرمز لها $A\subseteq B$

مثال :- اذا كانت $A=\{1,4,5\}$ ، $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$\therefore$ $A\subseteq B$ لأن كل عنصر في A ينتمي الى B

في حالة اذا وجد عنصر واحد في A لا ينتمي الى B فان $A\nsubseteq B$

مثال :- اذا كانت $A=\{4,5,6\}$ ، $B=\{1,4,5,7,8\}$

$\therefore A\nsubseteq B$

لأن $6\notin B$

المجموعة المتساوية

اذا كانت كل عناصر A تساوي B .
وأن كل عنصر في B هو عنصر في A

$\therefore$ $A\subseteq B$, $B\subseteq A$,

$\therefore$ $A=B$

مثال :- اذا كانت $A=\{4,5,6\}$ ، $B=\{x: x=n+1, n=3,4,5\}$

$\therefore$ $A=B$

① التساوي

يقال لكل من المجموعات A, B متساويتان اذا وفقط احتوت على نفس العناصر

أي أن $A = B$ تكافئ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

مثال :- $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$، $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x \leq 2\}$

فان $A = B$

② المجموعات غير المتساوية

اذا وجد على الاقل عنصر واحد في A أو B لا ينتمي الى المجموعة الاخرى

③ الاتحاد

لتكن A, B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في أي منها تسمى اتحاد المجموعتين A, B ويرمز لها $A \cup B$

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

مثال :- اذا كانت $A = \{1, 2, a\}$

$B = \{a, 3, b\}$

$$\therefore A \cup B = \{0, 1, 2, 3, a, b\}$$

④ التقاطع

اذا A, B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في كل من A, B معاً تسمى تقاطع المجموعتين A, B ويرمز لها $A \cap B$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

مثال :- لتكن $A = \{1, 2, 4\}$

$B = \{1, 5, 6\}$

فان $A \cap B = \{1\}$

٥ الفرق بين المجموعات

لتكن كل من A, B مجموعتين تسمى المجموعة التي عناصرها هي جميع العناصر التي تنتمي الى مجموعة المجموعتين ولا تنتمي بالفرق بين المجموعتين ويرمز لها

$A - B$ $\cancel{A/B}$

$A-B=\{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

والمجموعة $B-A$ تعرف كالاتي

$B-A=\{x : x \notin A \wedge x \in B\}$

٦ متممة المجموعة

A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U فالمجموعة التي عناصرها من المجموعة الشاملة والتي لا تنتمي الى A ويرمز لها بالرمز A^c

$A^c = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$

مثال

$B=\{1,3,5\}$

$A=\{2,4,6\}$

$U=\{1,2,3,\dots,10\}$

$\therefore B^c=\{2,4,6,7,8,9,10\}$

$A^c=\{1,3,5,7,8,9,10\}$

$\therefore (A^c)^c=\{1,3,5\}=A$

(٧) قانون التوزيع

لتكن C , B , A ثلاث مجموعات فإنه

① $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

② $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

مثال: حقق قانون التوزيع اذا كانت

$A = \{1, 2\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$C = \{3, 4\}$

الحل:-

① $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\{1,2\} \cap \{2,3,4\} = \{2\}$ الطرف الأيسر

الطرف الأيمن

$\{2\} \cup \{\ \} = \{2\}$ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

② $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\}$ الطرف الأيسر

الطرف الأيمن

$\cancel{\{1,2,3,4\} \cap \{3,4\} = \{}$

$\{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

المجموعات المتساوية :- يقال ان A ، B متساويه اذا احتوت على نفس العناصر

أي أن

$A \subseteq B$ أي A هي مجموعة جزئية من B

$B \subseteq A$ أي B هي مجموعة جزئية من A

مثال :-

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \le x \le 2\}$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

هل أن $A = B$

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\therefore A = B$$

الاتحاد :- اذا كانت A ، B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر في المجموعتين تسمى اتحاد A ، B ويرمز $A \cup B$

$$A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$$

مثال :-

$$A = \{10, 5, 8\}$$

$$B = \{-2, -10, 1, 2\}$$

$$\therefore A \cup B = \{-2, -10, 1, 2, 10, 5, 8\}$$

التقاطع :- اذا كانت A ، B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في كل من A, B تسمى تقاطع A ، B ويرمز لها $A \cap B$

مثال :-

$$A = \{4, 5, 8\}$$

$$B = \{2, 4, 5, 10\}$$

$$\therefore A \cap B = \{4, 5\}$$

تمارين

(١) اذا كانت $A = \{2, 4, 6\}$ ، $B = \{1, 3, 6\}$

السؤال : هل المجموعة A هي جزئية من B ... وضح ذلك

(٢) اذا كانت $A = \{5, 6\}$ ، $B = \{x : x = n+1, n = 3, 4, 5\}$

السؤال : هل المجموعة A هي جزئية من B ... وضح ذلك

(٣) اذا كانت $A = \{4, 8, 12\}$ ، $B = \{x : x = 2n, n = 2, 4, 6\}$

السؤال: هل المجموعة A تساوي المجموعة B

(٤) اذا كانت المجموعة C

$C = \{a+bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ \ldots\ \sqrt{i},\ i = 5\}$

السؤال: هل المجموعة C هي ... من مجموعة الاعداد الغير نسبية

(٥) اذا كانت $A = \{1, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 1, 4, 5, 6, 8, 9\}$

أوجد

$A \cup B$

$A \cap B$

$A \cap (B \cup A)$

$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$A \cap B = \{1, 4, 5, 6\}$

الغاية ① limit

أوجد الغاية لكل مما يأتي

① $\lim_{x \to 2} (3x^2 + 6x + 8)$

$= \lim_{x \to 2} 3x^2 + \lim_{x \to 2} 6x + \lim_{x \to 2} 8$

$= 3(2)^2 + 6(2) + 8$

$= 12 + 12 + 8 = 32$

② $\lim_{x \to 2} (x+1)(x^2-1)$

$= \lim_{x \to 2} (x+1) * \lim_{x \to 2} (x^2-1)$

$= (2+1) * (2^2-1)$

$= 3 * (4-1) = 3 * 3 = \underline{9}$

③ $\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3}$

$= \frac{\lim_{x \to 2} (x+2)}{\lim_{x \to 2} (x-3)} = \frac{(2+2)}{(2-1)} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4}}$

④ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}$

$= \lim_{x \to 2} (x+2)$

$= (2+2) = \underline{\underline{4}}$

⑤ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-2)}{(x^2+x+1)} = \frac{1-2}{1^2+1+1} = \frac{1}{3}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 8-2x & x > 2 \end{cases}$$

مثال :

هل $\lim_{x \to 2} F(x)$ موجودة

الحل : تكون الدالة موجودة اذا كانت

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = \lim_{x \to a^+} F(x)$$

$$\lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2^+} (8-2x) = 8-4 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} F(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2) = (2)^2 = 4$$

$$\therefore \lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2^-} F(x) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} F(x) = 4$$

ملاحظة: تكون $\lim_{x \to a} F(x)$ موجودة اذا تحقق الشرطان

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = \lim_{x \to a^+} F(x)$$

مثال: لتكن F دالة معرفة بالآتي

$$F(x) = \begin{cases} x^2+8 & x \leq 2 \\ 8-2x & x > 2 \end{cases}$$

هل $\lim_{x \to 2} F(x)$ موجودة

$$\lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2^+} (8-2x) = 8-2 \times 2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} F(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2+8 = 4+8 = 12$$

$\therefore \lim_{x \to 2} F(x)$ غير موجودة

الاستمرارية

تكون الدالة مستمرة عند $(x = b)$ اذا تحققت الشروط التالية

① $F(b)$ معرفة

② $\lim_{x \to b} F(x)$ موجودة

③ $\lim_{x \to b} F(x) = F(b)$

مثال :- ليكن

$$F(x) = \begin{cases} x^2+2 & x \geq 2 \\ 8-x & x < 2 \end{cases}$$

هل الدالة $F(x)$ مستمرة عند $x = 2$

الحل:

① $F(2) = x^2+2 = 4+2 = 6$

② $\lim_{x \to 2^+} (x^2+2) = 4+2 = 6 \quad L_1$

$\lim_{x \to 2^-} (8-x) = 8-2 = 6 \quad L_2$

$\therefore L_1 = L_2 \leftrightarrow \lim_{x \to 2} F(x) = x^2+2 = 2^2+2 = 6$

$\therefore \lim_{x \to 2} F(x) = F(2)$

$\therefore F$ مستمرة عند $x = 2$

①

تمارين

١) أكتب أ- مجموعة ذات الأعداد النسبية الصحيحة

ب- " " " "

جـ- " " " " أكبر من الصفر

د- " " " " أقل من الصفر

٢) اذا كانت المجموعة $A=\{a,b,c,d\}$ والمجموعة $B=\{a,b,1,2,4\}$

هل $A \subseteq B$

٣) اذا كانت المجموعة $A=\{x: x=n^2, n=1,2,3\}$

و " $B=\{x: x=n+2, n=1,2,3\}$

هل $A \subseteq B$

٤) اذا كانت المجموعة $A=\{4,9,16\}$

$B=\{x: x=n^2, n=2,3,4,6\}$

هل $A \subseteq B$

٥) اذا كانت المجموعة $A=\{x: x=3n, n=1,2,3\}$

$B=\{3,6,9\}$

هل المجموعة A = المجموعة B

٦) اذا كانت $A=\{1,4,5,6\}$

$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$C=\{2,6\}$

أوجد $A \cap B$

$A \cup B$

$B \cap C$

$B \cup C$

$(A \cap B) \cup C$

$(A \cup B) \cap C$

ع

1) احسب الغايات لكل مما يأتي

① $\lim_{x \to 0} (3x^6 + 4)$

② $\lim_{x \to 1} (4x^2 + x + 10)$

③ $\lim_{x \to 2^-} (6x^2 + 4X + 15)$

④ $\lim_{x \to 2^+} (6x^2 + 4x + 15)$

⑤ $\lim_{x \to 2} (2x^2 + 2)(x^3 - 3)$

⑥ $\lim_{x \to -1} (x^3 + 2x + 3)(x^2 + 4)$

⑦ $\lim_{x \to 0} \left(\frac{3 + \sqrt{x+1}}{2x^2 + 7}\right)$

⑧ $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2 - \sqrt{x+3}}{(x+2)\,4}\right)$

⑨ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

⑩ $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}$

(3)

(٨) لتكن F دالة معرفة

$$F(x) = \begin{cases} 4-x^2 & , x \leq 1 \\ x^2+1 & x > 1 \end{cases}$$

أ- أحسب

$$\lim_{x \to 1^+} F(x)$$

ب- أحسب

$$\lim_{x \to 1^-} F(X)$$

د- أحسب

$$\lim_{x \to 1} F(x)$$

د- هل الدالة موجودة عند

$$\lim_{x \to 1} F(x)$$

(٩) اذا كانت $F(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ ، $x \neq 1$

هل $\lim_{x \to 1} F(x)$ موجودة

(١٠) اذا كانت

$$F(x) = \begin{cases} 3x+1 & x > 1 \\ x^2+4 & x \leq 1 \end{cases}$$

هل الدالة موجودة $\lim_{x \to 1} F(x)$

(١١) اذا كانت $A = \{5,6\}$ ، $B = \{x : x = n+1, n = 3,4,5\}$

هل المجموعة A هي جزئية من B

(١٢) اذا كانت $A = \{4,8,12\}$ ، $B = \{x : x = 2n, n = 2,4,6\}$

هل المجموعة A تساوي المجموعة B

(١٣) اذا كانت المجموعة C $C = \{a+bi, a,b \in \mathbb{R}, \sqrt{i}, i = 5\}$

هل المجموعة C هي مجموعة الاعداد المركبة

(٤)

(١٤) لتمرين

$$F(x) = \begin{cases} x^2+2 & x \geq 3 \\ 8+x & x < 3 \end{cases}$$

هل الدالة مستمرة عند $x = 3$

① $F(3) = x^2 + 2 = (3)^2 + 2 = 11$

② $\lim\limits_{x \to 3^+} (x^2+2 = 9+2 = 11 \quad L_1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} (8+x) = 8+3 = 6 \quad L_2$

$\therefore L_1 = L_2$

$\therefore$ F مستمرة عند $x = 3$

(١٥) تمرين

$$F(x) = \begin{cases} x^2+x & x \geq 4 \\ 10+x & x < 4 \end{cases}$$

هل الدالة مستمرة عند $x = 4$

اذا كانت المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$ والمجموعة $B = \{a, b, 1, 2, 4\}$

هل $A \subseteq B$

اذا كانت المجموعة $A = \{1, 4, 6\}$ والمجموعة $B = \{x : x = n+1, n = 1, 2, 3\}$

هل $A \subseteq B$

③ اذا كانت المجموعة $A = \{x : x = n^2, n = 1, 2\}$

$B = \{x : x = n+2, n = 1, 2, 3\}$

هل $A \subseteq B$

④ اذا كانت المجموعة $A = \{4, \overset{16}{\cancel{8}}, 8\}$

$B = \{x : x = n^2, n = 2, 3, 4, 5\}$

الحل :-

$A = \{4, 9, 16\}$

$B = \{4, 9, 16, 25\}$

$\because$ كل عناصر A موجودة في B

$\therefore A \subseteq B$

⑤ اذا كانت المجموعة $A = \{x : x - 3n, n = 1, 2, 3\}$

$B = \{3, 6, 9\}$

هل المجموعة A = المجموعة B

① $A = \{a, b, d\}$

$B = \{a, b, 1, 2, 4\}$

$\because$ العنصر d في المجموعة A لا ينتمي الى B

$\therefore A \not\subseteq B$

② $A = \{1, 4, 6\}$

$B = \{x = 2, 3, 4\}$

$\because$ العنصر 1 في المجموعة A لا ينتمي الى B

$\therefore A \not\subseteq B$

③ $A = \{x = n^2, n = 1, 2\}$

$= \{1, 4\}$

$B = \{n+2, n = 1, 2, 3\}$

$= \{3, 4, 5\}$

$\because$ العنصر 1 لا ينتمي الى B

$\therefore A \not\subseteq B$

⑥ اكتب

① مجموعة ذات الاعداد النسبية

② " " الاعداد الصحيحة

③ " " الاعداد الصحيحة اكبر من صفر

④ " " " " اقل من صفر

إذا كانت

$A = \{1, 4, 5, 6\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{2, 6\}$

أوجد

$A \cap B$

$A \cup B$

$B \cap C$

$B \cup C$

$(A \cap B) \cup C$

$(A \cup B) \cap C$

احسب الغايات التالية :

1. $$\lim_{x \to 0} (3x^6 + 4)$$

2. $$\lim_{x \to 1} (4x^2 + x + 10)$$

3. $$\lim_{x \to -2} (6x^2 + 4x + 15)$$

4. $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+9}{x-3}$$

5. $$\lim_{x \to 2} (2x^2 + x)(x^3 - 3)$$

6. $$\lim_{x \to -1} (x^3 + 2x + x)(x^2 + 4)$$

7.

٨) لتكن F دالة معرفة

$$F(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , x \le 1 \\ x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

أحسب

$$\lim_{x \to 1^+} F(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} F(x)$$

٩) نفرض الدالة

$$F(X) = |4 - X|$$

أحسب

$$\lim_{x \to 4} F(X)$$

(1) نفرضنا داله معرفه

$$F(x) = \begin{cases} 2+x^2 & x \leq 2 \\ 8+2x & x > 2 \end{cases}$$

حل $\lim_{x \to 2} F(x)$ موجودة

$$\lim_{x \to 2^-} F(x) = \lim_{x \to 2^-} (2+x^2)$$

$$= 2+(-2)^2 = 2+4 = 6$$

$$\lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2^+} (8+2x) = 8+4 = 12$$

$$\because \lim_{x \to 2^-} F(x) \neq \lim_{x \to 2^+} F(x)$$

∴ الداله غير موجودة

① المعادلات الخطية

يمكن التعبير عن المعادلة الخطية بالصورة التالية

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

حيث $x_1, x_2, \dots x_n$ تمثل n من المتغيرات

" $a_1, a_2, \dots a_n$ " " الثوابت

يمكن كتابة m من المعادلات و n من المجاهيل بالشكل التالي

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث أن

$x_1, x_2, \dots x_n$ المتغيرات

a_{ij} و b_i تمثل الثوابت المعلومة

* يمكن التعبير عن مجموعة من المعادلات الخطية بالشكل التالي

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

أي

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$ مصفوفة المعاملات

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ عمود المتغيرات

عمود الثوابت $$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

مثال ٢ :- أكتب المعادلات الخطية التالية باستخدام صيغة المصفوفات

$$3x - y = 5$$
$$x + 2y = 0$$
$$-x - 5y = 6$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

مثال :- أكتب المعادلات الخطية التالية باستخدام صيغة المصفوفات

$$-3x + 5y - 6z = 15$$
$$3x + 6y + 12z = -2$$
$$x + y + z = 5$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & -6 \\ 3 & 6 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(٢)

حل المعادلات الخطية بطريقة كرامر

مثال :- حل المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر

$$3x - y = 2$$
$$x + y = 5$$

خطوات الحل :-

① نكتب المعادلات بصيغة المصفوفات

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

حيث أن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

② نجد الحل لكل من x ، y حيث

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} , \quad j = 1, 2$$

③ $|A_j|$ هي محدد للمصفوفة A الناتجة من ابدال عناصر عمود j للمصفوفة A بعناصر العمود b

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

④ نجد قيم $|A_1|$ ، $|A_2|$

$$|A_1| = (2*1) - (-1*5) = 2 - (-5) = 2 + 5 = \underline{\underline{7}}$$
$$|A_2| = (3*5) - (2*1) = 15 - 2 = \underline{\underline{13}}$$

(ح)

نجد قيمة $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3*1) - (-1*1)$$
$$= 3 + 1 = \underline{\underline{4}}$$

$$\therefore x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{13}{4}$$

مثال :- حل المعادلات الخطية التالية باستخدام قاعدة كرامر

$$6x + y = 2$$
$$2x + 2y = 8$$

الحل :-

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (2*2) - (8*1) = 4 - 8 = -4$$
$$|A_2| = (6*8) - (2*2) = 48 - 4 = 44$$
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (6*2 - 2*1) = 12 - 2 = 10$$

$$\therefore x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4}{10}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{44}{10}$$

مثال :- حل المعادلات الخطية التالية باستخدام قاعدة كرامر

$$4x - y = 8$$
$$2x + 3y = 5$$

الحل :-

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} , \quad A_1 = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} , \quad A2 = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (4 * 2) - (2 * -1) = (8) - (-2) = 8 + 2 = \underline{\underline{10}}$$

$$|A_1| = (8 * 3) - (-1 * 5) = 24 - (-5) = 24 + 5 = \underline{\underline{29}}$$

$$|A_2| = (4 * 5) - (8 * 2) = 20 - 16 = \underline{\underline{4}}$$

$$\therefore x = \frac{|A1|}{|A|} = \frac{29}{10}$$

$$x = \frac{|A2|}{|A|} = \frac{4}{10}$$

(7)

مثال :- حل المعادلات الخطية التالية باستخدام قاعدة كرامر

$$x + 2y = 10$$
$$4x + 6y = 16$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1 * 6) - (2 * 4) = 6 - 8 = -2$$

$$|A_1| = (10 * 6) - (2 * 16) = 60 - 32 = 28$$

$$|A_2| = (1 * 16) - (10 * 4) = 16 - 40 = -24$$

$$\therefore x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{28}{-2} = -14$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-24}{-2} = \frac{24}{2} = 12$$

حل المعادلات الخطية التالية وتحقق من نتيجة الحل

①
$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 10 \\ 6x - y &= 5 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} x - 3y &= 8 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} -x + 3y &= 10 \\ -2x - 6y &= 20 \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} 10x + 4y &= 25 \\ -2x + 8y &= 40 \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} 3x + 6y &= 30 \\ 2x + 5y &= 60 \end{aligned}$$

(1)

المصفوفات

المصفوفة هي مجموعة اعداد أو كميات مرتبة في صفوف واعمدة
ويرمز لها بالحروف الكبيرة مثل A, B

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ مصفوفة $3*3$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$ مصفوفة $2*2$

انواع المصفوفات

١- المصفوفة المربعة
وهي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها مساوي الى عدد اعمدتها

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

٢- المصفوفة القطرية
وهي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها اصفاراً عدا عناصر القطر الرئيسي ويرمز لها بالرمز D

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

٣- المصفوفة الاحادية
وهي المصفوفة التي كل عناصرها تساوي صفر ماعدا القطر يساوي ١
ويرمز لها بالرمز I

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٢

٤- المصفوفة المتناظرة

وهي المصفوفة التي لعناصر فوق وتحت القطر متساوية

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات

١- طرح وجمع المصفوفات

مثال:

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد

① $A + B$

② $A - B$

③ $B - A$

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 7 \\ 9 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B-A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

٢ جزئية
٤ تمتحي

ضرب K عدد حقيقي في مصفوفة

مثال :- اذا كانت

٣

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad K = 4$$

أوجد KA ~~$A*$~~

$$KA = 4\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 24 & 6 \end{bmatrix}$$

٣- تدوير المصفوفة

مدورة المصفوفة تعني تبديل الصفوف بالأعمدة ويرمز لها A^T

مثال :- أوجد ~~محـ~~ A^T للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

٤- ضرب المصفوفات

لضرب المصفوفات يجب أن تكون عدد اعمدة المصفوفة الأولى مساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية

مثال :- ~~أ~~ اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

أوجد $A*B$

$$A*B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (5*2 + 3*3 + 1*5) & (5*4 + 3*1 + 1*6) \\ (6*2) + (2*3 - 1*5) & (6*4 + 2*1 - 1*6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (10+9+5) & (20+3+6) \\ (12+6-5) & (24+2-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 29 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|}$$

مثال ١:- أوجد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :-

$$\operatorname{adj}(A) = \left[(-1)^{i+j} A_{ij} \right]^T$$

حذف الاول والعمود الاول

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 * 4 = 4$$

حذف الاول والعمود الثاني

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 * 2 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 * 6 = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 * 4$$

$$\therefore \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (4 * 4) - (6 * 2) = 16 - 12 = \underline{\underline{4}}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}}{4} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}}}$$

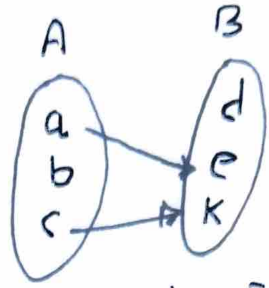
الدوال

(1)

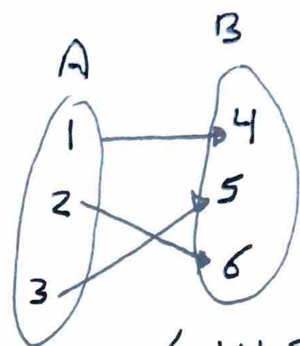
تعرف الدالة f للعلاقة من المجموعة A الى المجموعة B اذا اقترن كل عنصر في A عنصراً وحيداً في B ويعبر عنها

$f: A \to B$

مثال:



هذه ليست دالة لأن العنصر b ليس له صورة في B



هذه دالة لأن كل عنصر في A له صورة في B

ملاحظات:

1- اذا كانت f دالة من A الى B فيعبر عنها $f: A \to B$

2- تسمى المجموعة A بالمجال المنطلق

" B بالمجال المقابل (المستقر)

3- يسمى العنصر $x \in A$ بالمتغير المستقل بينما يسمى العنصر $y \in B$ بالمتغير المعتمد ويمثل صورة لـ x تحت تأثير الدالة f

أي أن $y = f(x)$

ويطلق على المجموعة التي تتكون من صورة كل عنصر من عناصر المجموعة A بفعل f (مدى) الدالة ويرمز لها بـ $f(A)$

$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ أو $R_f = \{f(a) : a \in A\}$

أي أن مدى الدالة هو مجموعة القيم الفعلية للدالة f

اما منطلق الدالة f فيعرف بالمجموعة $D_f = \{a : b = f(a), a \in A\}$

4- بيان الدالة هي مجموعة جميع الازواج المرتبة (x, y) للدالة f

ويرمز بيان الدالة f بالرمز G

د جزئية
ع تمنى

٢

مثال: اذا كانت

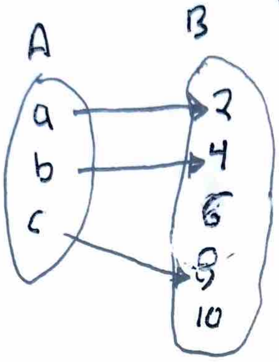
$A=\{a,b,c\}$

$B=\{2,4,6,8,10\}$

برهن فيما اذا كانت العلاقات التالية دالة او ليست دالة

١- $f_1=\{(a,2),(b,4),(c,8)\}$

الحل: f_1 هي دالة لأن كل عنصر في A (المنطلق) ارتبط بعنصر وحيد في B (المستقر)



٢- $f_2=\{(a,c),(b,6),(c,10)\}$

الحل: f_2 هي ليست دالة لأن العنصر a في A لم يرتبط بأي عنصر في B

٣- $f_3=\{(a,6),(b,10),(b,8),(c,2)\}$

الحل: f_3 ليست دالة لأن العنصر b في A ارتبط بأكثر من عنصر في B

مثال: اذا كانت $A=\{a,b,c\}$

$B=\{0,2,4,6,8,10\}$

① برهن أو وضح فيما اذا كانت f تمثل بيان لدالة من A الى B فأوجد مدى الدالة

$f_1=\{(a,0),(b,4),(c,8)\}$

الحل: f_1 هي دالة لأن كل عنصر في A ارتبط بعنصر واحد في B

مدى الدالة هي $f(A)=\{0,4,8\}$

(٢)

$f_2 = \{(a, 12), (b, 0), (c, 8)\}$

f_2 هي ليست دالة لأن العنصر a في A لم يرتبط بأي عنصر في B .

مثال :- اذا كانت

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{6, 10, 14\}$

$f : A \to B$

وأن الدالة معرفة

$f(a) = 2a + 2$ لكل $a \in A$

المطلوب :-

١- اكتب صورة كل عنصر

٢- اكتب مدى الدالة

٣- اكتب الدالة كأزواج مرتبة

الحل :-

١-

$f(a) = 2a + 2$

$f(2) = 2*2 + 2 = 4 + 2 = 6$

$f(4) = 2*4 + 2 = 8 + 2 = 10$

$f(6) = 2*6 + 2 = 12 + 2 = 14$

٢- مدى الدالة

$R_f = f(A) = \{6, 10, 14\}$

٣-

$\{(a, f(A)) : a \in A\} = \{(2, 6), (4, 10), (6, 14)\}$

٤

الدالة المتباينة

الداله هي متباينة اذا كان كل عنصر في مستقرها B هو صورة لعنصر واحد على الاكثر من منطلقها A . أي لا يوجد عنصران مختلفان في A يرتبطان بعنصر واحد في B

$$f : A \to B$$

هي متباينة اذا كان

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال :- اذا كانت $A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$f_1 = \{(a,1), (b,4), (c,5)\}$

$f_2 = \{(a,1), (b,1), (c,5)\}$

وضح اذا كانت f_1 ، f_2 متباينه أم لا ج السبب

الحل :- f_1 هي متباينه لأن كل عنصر في A له صورة واحدة في مستقرها B

f_2 هي ليست متباينه لأن العنصرين a ، b في A لهما نفس الصورة في مستقرها B

ج جزئية
ع تمهيدي

الدالة الشاملة

الدالة

٥

$f: A \to B$ هي دالة شاملة اذا كان

$f(A) = B$ أي أن مداها يساوي مستقرها أي أن

كل عنصر في B هو قيمة للدالة في عنصر

واحد على الأقل في A

مثال:

اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{-2, -4\}$

وكان

$f = \{(1, -2), (2, -2), (3, -4)\}$

هل الدالة شاملة ومتباينة مع بيان السبب

الحل:

$f: A \to B$ هي دالة شاملة لأن كل عناصر A

هي عناصر مستقرها B

$f: A \to B$ هي ليست متباينة لأن العنصرين

1, 2 في A لهما نفس المستقر (-2)

في B.

(1)

المشتقة Derivative

مشتقة الدالة $y = f(x)$ هي $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$

وتعرف

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

قواعد الاشتقاق :-

① $\frac{dc}{dx} = 0$ مشتقة الثابت = صفر

حيث c = كمية ثابتة

② $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

مثال :- أوجد مشتقة الدالة $f(x)$

① $f(x) = 6x^2$

الحل :-

$f'(x) = 6 * 2\, x^{2-1}$

$= \underline{\underline{12\, x}}$

② $f(x) = 2x^4 + 6$

$f'(x) = 2 * 4\, x^{4-1} + 0$

$= \underline{\underline{8\, x^3}}$

③ $\frac{d}{dx} [f(x) \mp g(x)] = f'(x) \mp g'(x)$

مثال :- أوجد مشتقة الدالة

$f(x) = 4x^2 + 8x^3$

$f'(x) = 4 * 2x^{2-1} + 8 * 3\, x^{3-1}$

$= \underline{8x + 24\, x^2}$

(ي

④ $\frac{d}{d(x)}(f(x) * g(x)) = f(x) * g'(x) + g(x) f'(x)$

مثال :- أوجد مشتقة الدالة

$(6x^2)(2x^3)$

$\frac{\partial}{\partial x} (6x^2)(2x^3)$

$= (6x^2) * (2 * 3x^{3-1}) + (2x^3) * (6 * 2x)$

$= 6x^2 * 6x^2 + 2x^3 * 12x$

$= 36x^4 + 24x^4 = \underline{\underline{60x^4}}$

⑤ $\frac{\partial}{\partial(x)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{(g(x))^2}$

مثال :- أوجد مشتقة الدالة

$\frac{2x^2}{3x^3}$

$\frac{\partial}{\partial(x)} \frac{2x^2}{3x^3} = \frac{(3x^3) * (2 * 2x^{2-1}) - (2x^2) * (3 * 3x^{3-1})}{(3x^3)^2}$

$= \frac{3x^3 * 4x - 2x^2 * 9x^2}{9x^9}$

$= \frac{12xx^3 - 18x^2}{9x^9}$

رياضيات
اول ادارة

التكامـــل

يعتبر التكامل واحد من أهم العمليات الرياضية التي استطاع الإنسان اختراعها وتطويرها فلولا اختراع التكامل لما وجدت حياتنا الحالية بصورتها ألان بما تملك من تطور تكنولوجي هائل .

<u>تعريف التكامل</u>: التكامل هو عكس المشتقة بمعنى هو عملية <u>إيجاد</u> الدالة الأساسية التي لو تم اشتقاقها لحصلنا على الدالة المطلوب تكاملها.

أمثلة:

$$\begin{tikzcd} \boxed{7x} \arrow[r, bend left, "\text{اشتقاق}"] & \boxed{7} \arrow[l, bend left, "\text{تكامل}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{\ln x} \arrow[r, bend left, "\text{اشتقاق}"] & \boxed{\frac{1}{x}} \arrow[l, bend left, "\text{تكامل}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{4x^3} \arrow[r, bend left, "\text{اشتقاق}"] & \boxed{12x^2} \arrow[l, bend left, "\text{تكامل}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{\tan x} \arrow[r, bend left, "\text{اشتقاق}"] & \boxed{\sec^2 x} \arrow[l, bend left, "\text{تكامل}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{\sin x} \arrow[r, bend left, "\text{اشتقاق}"] & \boxed{\cos x} \arrow[l, bend left, "\text{تكامل}"] \end{tikzcd}$$

نلاحظ في الأمثلة السابقة أن معرفة تكامل دالة ما يعتمد على حفظنا لمشتقات الدوال, وكلما زادت معرفتنا بنواتج اشتقاق الدوال زادت قابلتنا على إجراء عملية التكامل لأي دالة تواجهنا.

ز للتكامل بالرمز ($\int$) ويتبعه الدالة المطلوب تكاملها , ثم تفاضل المتغير المطلوب التكامل له.

ثال: سوف نكتب تكامل الدوال في المثال السابق باستخدام رمز التكامل:

$$\int 7dx = 7x + c \qquad \int \frac{1}{x}dx = lnx + c \qquad \int 12x^2\,dx = 4x^3 + c$$

$$\int Tanx\,dx = Sec^2 x + c \qquad \int Cosx = Sinx + c$$

خواص التكامل

$(1)\ \int (a \mp b \mp c \mp \cdots)dx = \int adx \mp \int b\,dx \mp \int cdx \mp \cdots$	خاصية توزيع التكامل في حالة الجمع أو الطرح
$(2)\ \int af(x)dx = a\int f(x)dx$	يمكن تحريك الأرقام إلى داخل أو خارج علامة التكامل
$(3)\ \int (a.b.c.\ldots)dx \neq \int adx + \int b\,dx + \int c\,dx + \cdots$	لا يمكن توزيع التكامل على الحدود المضروبة مع بعضها
$(4)\ \int \left(\frac{a}{b}\right)dx \neq \frac{\int adx}{\int bdx}$	لا يمكن توزيع التكامل على الحدود المقسومة

قوانين التكامل

فيما يلي بعض القوانين التي تساعدنا على إيجاد تكامل بعض الدوال:

1- تكامل الاعداد : إذا كان (N) عدد فأن تكامله هو ضرب العدد في المتغير (X) ,و إضافة ثابت التكامل (C).

$$\boxed{\int N\,dx = Nx + C}$$

$$(1)\int 10\,dx = 10x + C$$

$$(2)\int \sqrt{45}\,dx = \sqrt{45}x + C$$

$$(3)\int -\frac{23}{50}\,dx = -\frac{23}{50}x + C$$

2- <u>تكامل المتغير المرفوع لعدد:</u>

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$$

حيث (C) عدد يُسمى (ثابت التكامل) حيث أن مُشتقة الثابت تساوي (صفر) .

أمثلة:

$$(1)\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$$

$$(2)\int 4x^{-7} dx = \frac{4x^{-7+1}}{-7+1} + c = \frac{4}{-6}x^{-6} + c$$

نستخدم التحويل التالي لتغيير رمز الجذر لأي قيمة إلى عدد نستطيع التعامل معه في عمليات التكامل

$$\boxed{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$$

$$(3)\int -8\sqrt{x}dx = \int -8x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{-8x^{(\frac{1}{2}+1)}}{(\frac{1}{2}+1)} + c = \frac{-8x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{-16x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

$$(4)\int 20\sqrt[3]{x^7}dx = \int 20\,x^{\frac{7}{3}}\,dx = \frac{20\,x^{(\frac{7}{3}+1)}}{(\frac{7}{3}+1)} + c = \frac{20x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + c = \frac{60x^{\frac{10}{3}}}{10} + c$$

تكامل الدوال الجبرية متعددة الحدود المرفوعة إلى عدد :

يمكن تكامل الدوال الجبرية (متعددة الحدود) المرفوعة إلى عدد بشرط توفر مشتقة داخل القوس .القانون العام لتكامل الدوال المرفوعة إلى أس هو:

$$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

أمثلة: جد التكامل التالي:

$$\int x(1+x^2)^{-4} dx$$

الحل : نشتق داخل القوس :

$$\frac{d}{dx}(1+x^2) = 2x$$

بمقارنة مُشتقة داخل القوس بالحدود الموجودة في خارجة نلاحظ توفر المتغير(x) ولكن لا يوجد العدد (2) الذي هو جزء من مُشتقة داخل القوس .وحيث أن تكامل هذا النوع من الدوال يستلزم وجود جميع حدود مشتقة الدالة داخل القوس في خارج القوس , بالتالي يجب توفير العدد (2) .

يمكن توفير الإعداد بالضرب والقسمة على نفس العدد لكي لا نُغير من قيمة التكامل ,إذن:

$$\int \frac{2}{2} x(1+x^2)^{-4} dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{-4} = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{(-4+1)}}{(-4+1)} + c$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-3}}{-3} + c$$

لاحظ حذف الـ (2x) من نتيجة التكامل

مثال :جد التكامل التالي:

$$\int x^2 \sqrt[5]{1-6x^3} dx$$

: نتخلص أولا من رمز الجذر بتحويله إلى عدد كسري :

$$\int x^2 \sqrt[5]{1-6x^3}dx = \int x^2 \ (1-6x^3)^{\frac{1}{5}} \ dx$$

نشتق داخل القوس :

$$\frac{d}{dx}(1-6x^3) = -18x^2$$

بمقارنة مُشتقة داخل القوس بالحدود الموجودة في خارجة نلاحظ توفر المتغير(x^2) ولكن لا يوجد العدد (18-) بالتالي يجب توفير هذا العدد حتى نستطيع إجراء التكامل:

يمكن توفير الإعداد بالضرب والقسمة على نفس العدد لكي لا نغير من قيمة التكامل ,إذن

$$\int x^2(1-6x^3)^{\frac{1}{5}}\,dx = \int \frac{-18}{-18}x^2(1-6x^3)^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{1}{-18}\int -18x^2(1-6x^3)^{\frac{1}{5}}\,dx$$

$$= \frac{1}{-18}\frac{(1-6x^3)^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} = \frac{1}{-18}\frac{(1-6x^3)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{-108}(1-6x^3)^{\frac{6}{5}} + c$$

لاحظ حذف الـ ($-18\,x^2$) من نتيجة التكامل

أمثلة عامة على تكامل الدوال

مثال/ أوجد التكامل التالي:

$$\int (\frac{7}{x^4} + 3\sqrt[3]{x^4})\,dx$$

الحل:

نقوم بأجراء التحويلات الرياضية التالية لكي نستطيع استخدام قوانين التكامل السابقة:

$$\int (\frac{7}{x^4} + 3\sqrt[3]{x^4})\,dx = \int (7\,x^{-4} + 3x^{\frac{4}{3}})\,dx = 7\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 3\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + c$$

$$= 7\frac{x^{-3}}{-3} + 3\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + c$$

$$\therefore \int \left(\frac{7}{x^4} + 3\sqrt[3]{x^4}\right) dx = -\frac{7}{3}x^{-3} + \frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}} + c$$

مثال/ أوجد التكامل التالي:

$$\int \left(\frac{2x^4 - x^2}{9\sqrt{x}}\right) dx$$

الحل:

نقوم بأجراء التحويرات الرياضية التالية لكي نستطيع استخدام قوانين التكامل السابقة:

$$\int \left(\frac{2x^4 - x^2}{9\sqrt{x}}\right) dx = \frac{1}{9}\int \left(\frac{2x^4}{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{1}{9}\int \left(2x^{4-\frac{1}{2}} - x^{2-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{9}\int \left(2x^{\frac{7}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$\therefore \int \left(\frac{2x^4 - x^2}{9\sqrt{x}}\right) dx = \frac{1}{9}\left(2\frac{x^{4.5}}{4.5} - \frac{x^{2.5}}{2.5}\right)$$

مثال/ أوجد التكامل التالي:

$$\int (1 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) dx$$

الحل:

نقوم بفتح الأقواس

$$\int (1 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) dx = \int \left(1 + \frac{x^2}{4} - x^2 - \frac{x^4}{4}\right) dx = \int \left(1 - \frac{3x^2}{4} - \frac{x^4}{4}\right) dx$$

نقوم الآن بإجراء عملية التكامل:

$$\therefore \int (1 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) dx \quad = x + \frac{3x^3}{12} - \frac{x^5}{5} + c$$

أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{(1-3\ln x)^{-3}}{x}\,dx$$

الحل:

نشتق داخل القوس :

$$\frac{d}{dx}(1-3\ln x)=\frac{-3}{x}$$

بمقارنة مُشتقة داخل القوس بالحدود الموجودة خارجه نلاحظ أن الحد ($\frac{1}{x}$) موجود إلا انه العدد (3-) غير متوفر, لذلك يجب توفيره قبل إجراء عملية التكامل,نستطيع توفير الإعداد بالضرب والقسمة على نفس العدد لكي لا نغير من قيمة التكامل, إذن:

$$\int \frac{(1-3\ln x)^{-3}}{x}dx=\frac{-3}{-3}\int \frac{(1-3\ln x)^{-3}}{x}dx=\frac{1}{-3}\int \frac{-3}{x}(1-3\ln x)^{-3}dx$$

$$\int \frac{(1-3\ln x)^{-3}}{x}dx=\frac{1}{-3}\,\frac{(1-3\ln x)^{-3+1}}{-3+1}=\frac{1}{6}(1-3\ln x)^{-2}$$

$$\therefore \int \frac{(1-3\ln x)^{-3}}{x}dx=\frac{1}{6}(1-3\ln x)^{-2}$$

مثال: أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{Sinx}{(1+4Cosx)^{3}}\,dx$$

الحل: نقوم بإعادة ترتيب الحدود بما يطابق قانون تكامل دالة مرفوعة لعدد:

$$\int \frac{Sinx}{(1+4Cosx)^{3}}\,dx=\int Sinx(1+4Cosx)^{-3}\,dx$$

ق داخل القوس :

$$\frac{d}{dx}(1+4Cosx) = -4Sinx$$

بمقارنة مُشتقة داخل القوس بالحدود الموجودة خارجه نلاحظ أن الحد ($Sinx$) موجود إلا انه العدد (4-) غير متوفر, لذلك يجب توفيره قبل إجراء عملية التكامل,نستطيع توفير الإعداد بالضرب والقسمة على نفس العدد لكي لا نغير من قيمة التكامل:

$$\int \frac{Sinx}{(1+4Cosx)^3}\,dx = \frac{-4}{-4}\int Sinx(1+4Cosx)^{-3}\,dx$$

$$= \frac{-4}{-4}\int Sinx(1+4Cosx)^{-3}\,dx = \frac{1}{-4}\int -4Sinx(1+4Cosx)^{-3}\,dx$$

$$= \frac{1}{-4}\frac{(1+4Cosx)^{-2}}{-2}$$

$$= \frac{1}{8}(1+4Cosx)^{-2}$$

تمارين عامة: جد كل من التكاملات التالية:

(1) $\int x(1+\sqrt{x})^2dx$

(2) $\int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^5}} + 1\right)dx$

(3) $\int \frac{x^3}{(1-x^4)^3}dx$

(4) $\int \sqrt{\frac{3x^6}{1-2x^4}}\,dx$

(5) $\int \frac{1}{cos^2x\big(1-Tan(x)\big)^3}dx$

(6) $\int \frac{x^3-2x^2+10}{\sqrt{x}}$

(7) $\int (x^2-1)(x^3+1)dx$

(8) $\int (x^2+2x+4)^3(x+1)dx$

(9) $\int \frac{(1+x^2)(1-x)}{\sqrt{x}}dx$

(10) $\int \frac{x-1}{x(2x-2lnx)^3}dx$