المقدمة

تعريف علم الإحصاء

الإحصاء منهج علمي لحصر الأشياء وكلمة حصر هنا تعني عد الأشياء وترتيبها ليسهل فهمها ومن ثم عرضها وتحليلها واكتشاف نمط التغيرات فيها. يعرف بالاحصاء الوصفي.

الإحصاء عبارة عن مجموعة من أدوات التحليل التي تستخدم لاستنباط معالم الكل (المجتمع) من خلال معالم الجزء (العينة) أي دراسة المجتمع من خلال عينة ممثلة له. يعرف بالاحصاء الاستنباطي.

تصنيف البيانات الإحصائية

يمكن تصنيف البيانات الإحصائية الى ثلاث تصانيف فيمكن تصنيفها الى الصنف الأول :

1. بيانات خام (وهي التي يتم الحصول عليها مباشرة)
2. بيانات درجة خام وهي الدرجة التي يتم الحصول عليها من تصبيق الإحصاء .

التصنيف الثاني حسب المصادر هنالك مصدران :

1. مصادر تاريخية مثل الكتب والمجلات والمنشورات ويمكن تقسيمها الى (اصلية وهي التي تعدها الجهة التي قامت بالدراسة, وثانويه وهي كل ما عدا ذلك)
2. مصادر ميدانية وهي مصادر مباشرة.

التصنيف الثالث حسب النوع :

1. بيانات كمية وقد تكون منفصلة وهي التي يمكن قياسها بالعد مثل عدد الحجرات في المنزل, وقد تكون كمية متصلة ويتم الحصول عليها عن طريق القياس وتأخذ أي قيم داخل مدى معين سوا ان كانت صحيحة او كسرية.
2. بيانات غير كمية (نوعية او وصفية) مثل مستوى التعليم.

1.1نظرية مبائ الاحتمالات Principles of Probability Theory

تلعب الاحتمالات دور هاما في الحياه اليومية وفي كثير من العلوم, نستخدم الاحتمالات في قياس عدم التأكد لقرارت في ظل معلومات ناقصة مثلا:

1. الي رحلة خارجية بعد ان تم الترتيب لها بسبب احتمال رداءة الجو احتمال كبير.
2. اهمال طالب دراسة جزء صغير من المقرر لان احتمال ان يأتي فيه سؤال احتمال ضعيف.
3. احتمال ارتقاع درجة او احتمال فوز فريق معين.

أحيانا تجدنا نعبر عنها بتقدير رمي كأن نقول ان احتمال سقوط الامطار غدا 60% واحتمال فوز فريق 80% ما عدا فريق ريال مدريد فهو في الصعاب يحقق الإنجاز المذهل.

وعلى كل فأن القيم الرقمية للاحتمالات لا تستند على قاعدة أو أساس رياضي ولكن قد تعتمد على احداث وخبرات ماضية.

بدأت دراسة الاحتمالات في القرن السابع عشر على موائد القمار في العاب الحظ وبظهور العالم الفرنسي باسكال وأول من نشر كتاب عن الاحتمالات العالم السويسري برنولي عام 1713 م وفي عام 1813 نشر العالم لابلاس كتابا عن نظرية الاحتمالات.

التجربه العشوائية

هي كل اجراء نلعم مسبقا كل النتائج الممكنة منه وان كنا لا نستطيع ان نتنبأ بأي منه سيتحقق فعلا. التجارب نوعان:

1. تجارب محددة او مؤكدة: بمعنى اذا تكررت التجربة تحت نفس الظروف فمن المؤكد ملاحظة نفس النتائج.
2. تجارب عشوائية: وهي التي يتحكم عامل الصدفة في ظهور نتائجها وبالتالي اذا تكررت التجربة تحت نفس الظروف فربما تختلف النتائج وبالتالي لا يمكن التنبؤ بالنتائج مث رمي زهرة النرد ونوع المولد.

الاحتمالات هي ذلك الفرع من الرياضيات الذي يهتم بدراسة نتائج التجارب او المحاولات العشوائية.

فراغ العينة

هو كل النتائج الممكنة من التجربة العشوائية ويرمز له بالرمز C

مثال/ كون فراغ العينة لرمي قطعة نقود.

1. مرة واحد.
2. مرتين.
3. ثلاث مرات.

مثال/ رمي عملة معدنية يكون التسلسل اما رأس (Head) او ذيل (Tail) يمكن تعريف مساحة :

C= {Head, Tail}

C = {H, T}

مثال/ عند رمي قطعتين معدنيتين فيكون الستلسل للراس والذيل هو:

C= {HH, HT, TH, TT}

مثال/ عند رمي قطعه نرد, تكون المساحة البسيطه له :

C= {1,2,3,4,5,6}

سؤال واجب / ماهو فراغ العينة عند رمي قطعتين نرد؟

الحدث

في بعض الأحيان يكون الاهتمام بجزء من فراغ العينه وليس بكل فراغ العينة.

الحدث: هو مجموعة جزئية من فراغ العينة ويرمز له بالرمز E او أي حرف اخر على ان يكون من الاحرف الكبيرة.

العمليات على الاحداث

1. اذا كان E1 حدث في S فأن $\bar{E}$ الحدث المكون من عناصر S والتي لا تنتمي الى E1 وتسمى الحدث E1.
2. $(E_1 \cup E_2)$ حدث مكون من عناصر E1,E2 وترمز لوقوع E1 او E2 او كليهما.
3. $(E_1 \cap E_2)$ حدث مكون من العناصر المشتركة بين E1,E2 وترمز لوقوع الحدثين E1,E2 معا.

مثال / القيت زهرة نرد مرة واحدة فاذا كان لدينا الاحداث التاليه:

E1= {2,4,6} E2= {5,6} E3={3,6} E4= {1,3,5}

اوجد:

1. $\overline{E3}$
2. $E_1 \cap E_3$
3. $E_1 \cap E_2$
4. $E_1 \cup E_4$

التبادل Permutation:

يقصد بها عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها ويرمز له (nρr) أي تبادل r من n وقانونه هو:

$$n\rho r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: - إذا كان لدينا أربعة حروف A,B,C,D واختير منها حرفان فما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختبار هذين الحرفين؟

الحل: $n = 4 \quad r = 2$

$$n\rho r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12$$

أي ان الطرق = 12

التوافيق Combination:

وهي عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها ويرز له nCr أو $\binom{n}{r}$ وقانونه هو:

أي ان الترتيب في حالة التوافيق غير مهم $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: - ما عدد طرق الاختبار التي يمكن الحصول عليها لاختيار لجنة مؤلفة من (5) اشخاص من مجموع (9) اشخاص؟

الحل: - لاحظ بأن ترتيب الأشخاص هنا غير ضروري لان اختيار عمرو قبل زيد أو العكس هي نتيجة واحدة.

$$\therefore \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{(5!)(4!)} = 126$$

ملاحظة

- أداة الربط $\binom{and}{و}$ تعني عملية التقاطع وتعني الضرب.
- أداة الربط $\binom{أو}{or}$ تعني عملية الاتحاد وتعني الجميع .

هذا و هناك قاعدتان أساسيتان يعتمد عليها كل من التبادل و التوافيق و هما:

1- إذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 هو n وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_2 هو m وكان E_1 وE_2 حادثان متنافيان فإن عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 وE_2 هو (n+m) من الطرق.

2- إذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 هو n وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_2 هو m وكان E_1 وE_2 حادثان مستقلان فإن عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 وE_2 هو (nm) من الطرق.

مثال: - صندوق به 6 كرات حمراء و4 سوداء و2 بيضاء فكم طريقة يكن اختيار (5) كرات بحيث تكون 3 منها حمراء و2 سوداء؟

الحل:

عدد طرق اختيار 3 كرات حمراء $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\ \times3\times2\times1} = 20$

عدد طرق اختيار 2 كرة سوداء $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\ \times2\times1} = 6$

∴ عدد الطرق لاختيار (3) كرات حمراء و (2) سوداء هو $\binom{6}{3}\binom{4}{2} = (20)(6) = 120$ طريقة

قوانين الاحتمال Laws of Probability:

لقد وضعت القوانين التالية لتسهيل حساب درجة الاحتمال عند وقوع حادثين أو أكثر بدلاً من ايجادها عن طريق تعريف الاحتمال.

وقبل شرح قوانين الاحتمالات نفرض ان هناك حادثان E_1 وE_2 فالتعابير التالية يقصد بها ما يلي:

$\rho(E_1 + E_2)$: - احتمال وقوع الحدث E_1 أو الحدث E_2 (أي احتمال وقوع أياً منهما فقط).

$\rho(E_1\ E_2)$: - احتمال وقوع الحادث E_1 و الحادث E_2 معاً.

$\rho(E_2 / E_1)$: - احتمال وقوع أو حدوث E_2 علماً بأن الحادث E_1 قد وقع ويسمى بالاحتمال الشرطي.

مثال/ مجموعه تحتوي على 7 اشخاص, تم اختيار ثلاث اشخاص منهم كم طريقه يمكن عمل ذلك؟

الحل/

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35\, ways$$

مثال/ صندوق يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و 4 حمراء و 2 زرقاء وتم اختيار ثلاث كرات من الصندوق, جد عدد الطرق التي يمكن الاختيار بيها مع العلم ان الكرات الثلاث مختلفه الألوان.

الحل/

الاحتمالية Probability

هو مفهوم النتائج المتكافئة للفرص أي ان الاحداث لها نفس الفرص في الظهور.

او هو مبني على أساس اجراء التجربة, عدد كبير جدا من المرات (مثلا لا يمكن تساوي الفرص لثلاثة أوجه عند علبة الكبريت فأذا اعطينا الوجه الأصغر فرصة يكون للوجه الأوسط ضعفها وللوجه الأكبر ثلاث اضعافها).

$$\frac{h}{n} = \frac{\text{عدد الطرق المواتية للحدث}}{\text{عدد جميع الطرق الممكنة}}$$

يعرف احتمال عدم حدوث الحدث (يسمى الفشل) ويرمز له بالرمز $P\,(\overline{E})$

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

مثال / حقيبه تحتوي على 6 كرات حمراء و 5 كرات صفراء و 3 خضراء اخذت كره منها فما هي احتمال ان تكون الكره:

1. خضراء.
2. ليست صفراء.
3. حمراء او صفراء.

1. P(G)= $\frac{3}{14}$
2. P($\bar{y}$) =1-P(Y) ➔ 1- $\frac{5}{14}$ = $\frac{9}{14}$
3. P(R OR Y) = $\frac{6}{14}$ + $\frac{5}{14}$ = $\frac{11}{14}$

مثال/ معمل به *10* اجهزه (*IBM*) و 5 اجهزه (*LG*) و7 اجهزه (*FLAT*) سحب منه جهاز واحد اوجد احتمال انه :

1. (IBM).   2. (LG)   3. (FLAT)

1. P(IBM) = $\frac{10}{22} = 0.455$
2. P(LG) = $\frac{5}{22}$=0.227
3. P(FLAT) = $\frac{7}{22}$=0.318

مثال / صندوق به 5 كرات حمراء 7 كرات زرقاء 3 كرات بيضاء, 8 كرات سوداء سحبت منه كره ماهو احتمال ان تكون زرقاء, سوداء, بيضاء.

P(W)=$\frac{3}{23} = 0.1304$

P(B)=$\frac{8}{23} = 0.3478$

P(BLUE)=$\frac{7}{23} = 0.3043$

الاحتمال المشروط *Conditional Probability*

اذا كانت E1,E2 حادثين في فراغ عينه S لتجربه عشوائيه ما, فأن:

$$p\left(\frac{E_2}{E^1}\right)=p\,\frac{(E_1\cap E_2)}{p(E_1)}=\frac{(E_1.E_2)}{p(E_1)}$$

بشرط ان لا يكون المقام يساوي صفر.

مثال/ القيه حجر نرد مرة واحدة, ما احتمال ظهور العدد 3 علما بأن العدد الظاهر فردي.

C={1,2,3,4,5,6}

A=3

B= {1,3,5}

$$p\left(\frac{E_2}{E^1}\right)=p\,\frac{(E_1\cap E_2)}{p(E_1)}$$

P$(A\cap B)$=1/6

P(B)=3/6

$$p\left(\frac{E_2}{E^1}\right)=p\,\frac{1/\cancel{6}}{3/\cancel{6}}=1/3$$

OR/

C1= {1,3,5}

P(A/B) =1/3

مثال/ القيت زهرة نرد مره واحده, ما احتمال ظهور العدد 6 علما بان العدد الظاهر زوجي.

مثال/ تقدم 3 خريجي جامعه الباحة و5 من خريجي جامعة ام القرى لوظيفتين فما هو احتمال ان تكون الوظيفة الثانية من نصيب خريجي الباحة اذا كانت الوظيفة الأولى من نصيب خريجي الباحة؟

الحل احتمال الثاني من الباحة 2/7

مثال/ يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء, 6 كرات حمراء, 5 كرات خضراء, سحبت كرة واحدة في كل مرة, اوجد احتمال:

1. سحب الثانية خضراء علما بأن الأولى زرقاء.

$P(A/B)= 5/18$

2. الثانية حمراء علما بان الأولى خضراء مع الارجاع

$P(A/B)= 6/19$

3. الثالثة حمراء علما بأن الأولى حمراء والثانية زرقاء دون ارجاع.

4. الثالثه خضراء علما بأن الأولى والثانية حمراء مع الارجاع.

مثال/ اذا كان A+B حدثين غير مستقلين في فضاء العينة لتجربه ما, بحيث P(B)=0.5
P(A/B)= 0.4,,فما هي قيمه $P(A \cap B)$

الاحتمال الكلي Total Probability

هو قاعدة أساسية تربط الاحتمالات الهامشية بالاحتمالات الشرطية. إنه يعبر عن الاحتمال الكلي لنتيجة يمكن تحقيقها من خلال عدة أحداث متميزة ، ومن هنا جاء الاسم.

$$p\left(\frac{A}{B}\right) = p\,\frac{(A \cap B)}{p(B)}$$

الاحتمال المشروط

$$P(A \cap B) = p\left(\frac{A}{B}\right) .\ P(B)$$

P(A)= $p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap Bn)$

P(A) $= \sum_{i=1}^{n} A \cap B_i$

P(A)= $\sum_{i=1}^{n} p\left(\frac{A}{B}\right).\mathrm{P(B)}$

مثال/ يوجد 3 صناديق متماثله كل صندوق يحتوي على مجموعه كرات حيث يحتوي الصندوق الأول على 2 كرات سوداء و 4 بيضاء والصندوق الثاني كذلك نفس العدد امام الصدوق الثالث فيحتوي على 3 كرات بيضاء و3 كرات سوداء ما احتمال ان يتم اختيار الكرات سوداء من الصناديق الثلاث.

P(A)= $p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap Bn)$

P(A) $= \sum_{i=1}^{n} A \cap B_i$

P(A)= $\sum_{i=1}^{n} p\left(\frac{A}{B}\right).\mathrm{P(B)}$

$p\left(\frac{A}{B}\right)$ تمثل احتماليه عدد الصناديق وتكون واحده لكل صندوق

P(B) احتماليه عدد الكرات في الصندوق

P(A)= $\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{3}{6}\right)$

نظرية بييز Baye's Theorem

ترجع نظرية بيز للعالم توماس بيز والذي عاش في الفترة 1702 الى 1761 م, تقوم النظرية على معرفة احتمال ان يكون عامل معين من ضمن مجموعة العوامل هو السبب في الحصول على حدث معين مثلا اين يكون الإنتاج التالف لمصنع معين سببه الماكينة الأولى اذا كان لدينا اكثر من ماكينة وقد توصل بيز لعلالاقة مهمة بين الاحتمالات الشرطية.

$$p(E / B) = \frac{p(E_n)^p\left(\frac{B}{En}\right)}{\sum_{i=1}^{n} p(E_j) \cdot p_{\left(\frac{B}{E_j}\right)}}$$

مثال/ يوجد ثلاث صناديق الصندوق الأول يحتوي على 3 كرات حمراء و 5 بيضاء والاصندوق الثاني يحتوي على 2 كرات حمراء و 1 بيضاء والصندوق الثالث يحتوي على 2 كرات حمراء و 3 بيضاء ما احتمال الكره المسحوبة حمراء ومن الصندوق الأول.

P(A)= 1/3

P(B)= 1/3

P(C)= 1/3

$$p\left(\frac{A}{R}\right)=\frac{P\left(\frac{R}{A}\right)\cdot p(A)}{p\left(\frac{R}{A}\right).p(A)+P\left(\frac{R}{B}\right).(B)+P\left(\frac{R}{C}\right).p(C)}$$

P(R/A) = 3/8

P(R/B) = 2/3

P(R/C) = 2/5

$$p\left(\frac{A}{R}\right)=\frac{\frac{3}{5}.\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}.\frac{1}{3}+\frac{2}{3}.\frac{1}{3}+\frac{2}{5}.\frac{1}{3}}=0.26$$

مثال/ يوجد ثلاث صناديق الصندوق الأول يحتوي على 3 كرات حمراء و 5 بيضاء والاصندوق الثاني يحتوي على 2 كرات حمراء و 1 بيضاء والصندوق الثالث يحتوي على 2 كرات حمراء و 3 بيضاء ما احتمال الكره المسحوبة حمراء ومن الصندوق الأول أو حمراء ومن الصندوق الثاني.

المتغير العشوائي Random Variables

بشكل غير رسمي، المتغير العشوائي هو متغير عشوائي، أي أن قيمته غير معروفة، أو غير مؤكدة، أو لم يتم ملاحظتها بعد، أو شيء من هذا القبيل. يتم وصف الاحتمالات التي يتخذ بها المتغير العشوائي قيمه المختلفة بواسطة نموذج الاحتمالات. من أجل التمييز بين المتغيرات العشوائية والمتغيرات العادية غير العشوائية، فإننا نتبع اتفاقية واسعة الاستخدام للإشارة إلى المتغيرات العشوائية بأحرف كبيرة، وعادةً ما تكون الأحرف الموجودة في نهاية الأبجدية مثل X وY وZ. هناك علاقة وثيقة بين المتغيرات العشوائية وبعض المتغيرات العادية. إذا كان X متغيرًا عشوائيًا، فغالبًا ما نستخدم الحرف الصغير المقابل x كمتغير عادي يأخذ نفس القيم. ما إذا كان المتغير المقابل لظاهرة في العالم الحقيقي يعتبر عشوائيًا قد يعتمد على السياق. في التطبيقات، غالبًا ما نقول إن المتغير عشوائي قبل ملاحظته وغير عشوائي بعد ملاحظته ومعرفة قيمته الفعلية. وبالتالي، يمكن تجسيد نفس الظاهرة في العالم الحقيقي بواسطة X قبل ملاحظة قيمتها وبواسطة x بعد ملاحظة قيمتها.

مثال/ رميت قطعة نرد مره واحده ماهو فضاء العينة, واذا كان X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الصورة.

C= {H, T}

H➔1

T➔0

X=0, 1

X	0	1
P(x)	1/2	1/2

مثال/ رميت قطعتين نرد ماهو فضاء العينة, واذا كان X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الصورة.

C= {HH, TH, HT, TT}

X={2, 1 , 1, 0}

X	0	1	2	SUM
P(x)	1/4	2/4	1/4	=1

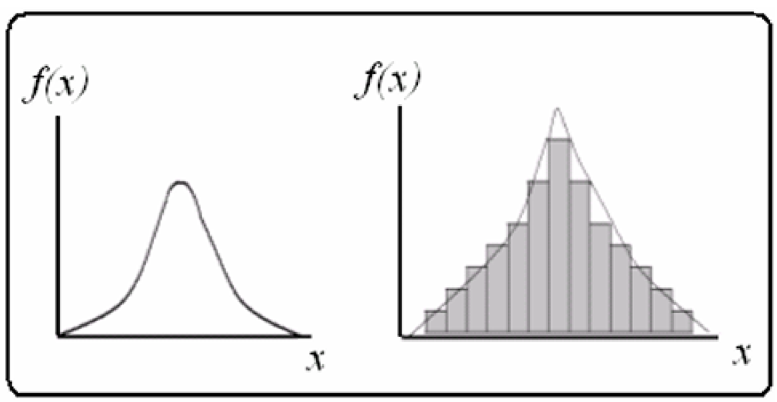
المتغير العشوائي المتصل Connected Random Variables

هو الذي يأخذ قيما متصلة, ويأخذ عدد لا نهائي من القيم الممكنه له داخل مجاله, فأذا كان X متغير عشوائي مستمر, ويقع ففي المدى (a, b), أي ان {X=x:a<x<b}, فأن للمتغير X عدد لا نهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والاعلى (a, b) ومن الأمثلة على المتيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية الالبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر : {X= x : 10 < x < 40}
- المساحة المنزرعة بالاعلاف في المملكة بالالف هكتار {X = x : 1000 < x < 15000}
- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالايام, {X = x : 1000 < x < 15000}

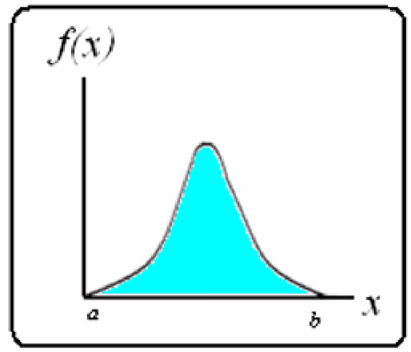
التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر Continuous Probability

عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري النسبي نجد ان شكل هذا المدرج هو اقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر, وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات, يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتير المستمر, كما هو في الشكل الاتي:



والمساحة اسفل المنحنى تعبر عن مجموعه الاحتمالات الكلية, ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح, وتسمى الدالة f(x) بدالة كثافة الاحتمال Probability Distributuion

Function(p.d.f), وبفرض المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى {X= { x: a π x π b,
وان منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:



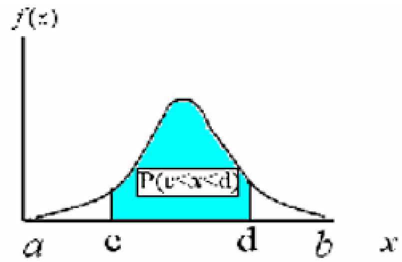
فأن من خصائص دالة كثافة الاحتمال f(x) ماي يلي:

1. الدلة f(x) موجبه داخل المدى (a, b) أي ان xϵ (a, b), f(x) <> 0
2. التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى a حتى الحد الأعلى b يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية, لذا يساوي الواحد الصحيح أي ان:

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1}$$

حيث أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل المحدد من $x=a$ حتى $x=b$ ، وهذا يعني إيجاد المساحة أسفل المنحني بين (a,b) .

3- لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى (d,c) أي حساب الاحتمال $p(c<x<d)$ ، يجب حساب المساحة أسفل المنحني من $x=c$ حتى $x=d$ كما هي مبينة في الشكل البياني التالي:



ويتم ذلك بإيجاد التكامل المحدد في هذا المدى، كما يلي:

$$\boxed{p(c < x < d) = \int_{x=c}^{x=d} f(x)\ dx = [g(x)]_c^d = g(d) - g(c)}$$

Probability Density Function (PDF)

For a continuous random variable X, a **probability density function** is a function such that

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

(3) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx =$ area under $f(x)$ from a to b for any a and b

Example: Let

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{15} & x=1,2,3,4,5\\ \\ 0 & elsewhere\end{cases}$$ **show that** ***p(x)*** **is** ***p.d.f***

(1) $P(x)>0 \quad \forall\, x=1,2,3,4,5$

(2) $\sum_{all\ x} p(x)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{15}{15}=1$

Example: Let

$$p(x)=\begin{cases}k\,(x+1) & x=1,2,3,4\\ \\ 0 & elsewhere\end{cases},$$

be the p.d.f of the random variable X. Find the constant k.

Since p(x) is a *p.d.f.* of X, then

$$\sum_{all\ x} p(x)=1 \Rightarrow k(1+1)+k(2+1)+k(3+1)+k(4+1)=1 \Rightarrow 14k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{14}$$

Ex/

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

Prove that f(x) is a PDF.

Sol:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{2} (2-x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(4 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 1$$

$\therefore$ $f(x)$ is a PDF

ex\ show that $P(x) = \frac{3x+1}{2}$,

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

① $P(x=0) = \frac{1}{2} > 0$

② $P(x=1) = 2 > 0$

③ $P(x=2) = \frac{7}{2} > 0$

④ $P(x=3) = 5 > 0$

⑤ $P(x=4) = \frac{13}{2} > 0$

$\sum P(x) = \frac{1}{2} + 2 + \frac{7}{2} + 5 + \frac{13}{2} = 17.5$

$\therefore$ not P.D.F

ex\ show that $f(x) = \frac{3}{x!(3-x)!}$

$x = 0, 1, 2, 3$ is PDF

$P(x=0) = \frac{3}{0!\,3!} = \frac{1}{2} > 0$

$P(x=1) = \frac{3}{1!\,4!} = \frac{3}{2} > 0$

$P(x=2) = \frac{3}{2!\,1!} = \frac{3}{2} > 0$

$P(x=3) = \frac{3}{3!\,0!} = \frac{1}{2} > 0$

$\sum P(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 4$

$\therefore$ not PDF

Mathematical Expectation and Some related Concepts

التوقع الرياضي (Mathematical Expectation)

يعتبر التوقع الرياضي من المقاييس المهمة الذي يستخدم في وصف بعض المقاييس المتعلقة بالتوزيعات وخاصةً مقاييس النزعة المركزية ومنها مثلا المتوسط وبعض ومقاييس التشتت ومنها

التباين , حيث أن التوقع للمتغير العشوائي هو عبارة عن أخذ جميع النتائج الممكنة لذلك المتغير والوزن المقابل لها والمتمثل باحتمال وقوع كل من هذه النتائج.

ففي حالة المتغيرات المنفصلة , فإن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي ودالة الكتلة الاحتمالية له P(x) كالآتي:

$$E(x) = \sum XP(X)$$

وتمثل القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X متوسط المجتمع $E(X) = \mu$

اما اذا كان المتغير العشوائي متصل وداله الكثافة الاحتمالية له f(x), فان القيمة المتوقعة كالاتي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(x)dx$$

ومن خواص التوقع الرياضي كالآتي :

1) إذا كانت لديك c كمية ثابتة فأن $E(c) = c$

2) توقع مجموع متغيرين عشوائيين = مجموع توقع المتغيرين :
$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

3) إذا كانت لديك $X_1 \le X_2$ فأن $E(X_1) \le E(X_2)$

4) إذا كانت لديك المتغيرين العشوائيين X_1, X_2 مستقلان فإن :

$$E(X_1 * X_2) = E(X_1) * E(X_2)$$

أفرض لديك احتمال إنتاج راديو صالح للعمل هو 0.7 وتكلفة الراديو هي 50 دينارا وتكلفة إنتاج راديو غير صالح للعمل هي 20 دنانير . ما القيمة المتوقعة لتكاليف إنتاج الراديو الواحد.

الحل :

أن احتمال إنتاج راديو غير صالح للعمل(0.3). لذلك فأن القيمة المتوقعة لتكلفة إنتاج الراديو الواحد

كالآتي:

$$\mu = E(X) = \sum XP(X) = 50(0.7) + 20(0.3) = 41$$

مثال/ رميت قطعتين معدنيتين مرة واحدة ما هو المتغير العشوائي لها واحتماليتها والتوقع لها.

X	0	1	2	
P(x)	1/4	2/4	1/4	
$E(X)=\sum X.P(X)$	0	2/4	2/4	=1

مثال/ يوجد ثلاث متغيرات عشوائيه احتمالية المتغير الأول هي 0.5 و E(x)=1.7 جد :

1. $P(X<3)$
2. $P(X=1|X>=1)$

X	1	2	3
$P(x)$	0.5	a	b

$, E(x) = 1.7$

$0.5 + a + b = 1$

$a + b = 0.5$

$a = 0.5 - b \quad \cdots (1)$

$E(x) = \sum x \cdot P(x)$

$1.7 = 0.5 + 2a + 3b$

$2a + 3b = 1.2 \quad \cdots (2)$

نعوض (1) في (2)

$2(0.5 - b) + 3b = 1.2$

$1 - 2b + 3b = 1.2$

$1 + b = 1.2$

$b = 0.2 \quad \cdots (3)$

نعوض (3) في (1)

$a = 0.5 - 0.2$

$a = 0.3$

(1) $P(x < 3)$

$0.5 , 0.3$

(2) $P(x = 1 \mid x \geq 1)$

$$P(x = 1 \mid x \geq 1) = \frac{P(x = 1 \cap x \geq 1)}{P(x \geq 1)}$$

$$= \frac{1}{0.5 + 0.3 + 0.2}$$

$$= 1$$

مثال / اذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x & , 2 < x < 4 \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

جد / $E(9x)$

الحل /

$$\mu = E(x) = \int x \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_2^4 x \cdot \frac{1}{6} x \, dx = \int_2^4 \frac{1}{6} x^3 dx$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4$$

$$= \frac{1}{8} \left[x^3 \right]_2^4 \Rightarrow \frac{1}{8} [64 - 8]$$

$$E(x) = \frac{56}{18} = \frac{28}{9}$$

$$E(9x) = 9 * \frac{28}{9}$$

$$= 28$$

التبايـن The Variance

ان اهمية التباين كاحد مقاييس التشتت نظراً في التخلص من الاشارات السالبة لانحرافات القيم عن الوسط الحسابي .لان الاشارة اذا كانت سالبة او موجبة تحدد فقط زيادة القيمة او نقصها عن الوسط الحسابي .لذا فان استخدام مقياس التباين يمثل طريقة اخرى للتخلص من الاشارات السالبة والموجبة وذلك بتربيع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي .(يعتبر التباين من اهم مقاييس التشتت فهو يقيس بعد او قرب القيم عن نقطة معينة وهي الوسط الحسابي ويعرف التباين لمجموعة من المشاهدات على انه (متوسط مربعات انحرافات هذه المشاهدات)القيم(عن وسطها الحسابي (وقد تطور التباين عن مفهوم االنحراف المتوسط والحكمة فيه ازالة التعامل مع اقتران القيمة المطلقة وذلك بتربيع المسافات بين المشاهدات والوسط الحسابي.

ملاحظة:

$$f\langle x^2\rangle = \frac{1}{x^2}$$

$$f(\chi)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

قانون التباين:

$$\sigma^2 x = var[x\ ] = E[x^2] - \big(E(x)\big)^2$$

خواص التباين:

1. $var[x\ ] > 0$
2. $var[c\ ]= 0$ لاي ثابت
3. $c^2\ var[c] = var[cx\ ]$
4. لا يتأثر التباين بعمليات الجمع او الطرح

مثال/

Var[5x]=25 var[x]

مثال/ رميت قطعتين معدنيتين جد المتباين لها.

X	0	1	2	
P(x)	1/4	2/4	1/4	=1
X.P(x)	0	2/4	1/2	➔E(x)= $\sum X.P(x) = 1$
x^2	0	1	4	
$x^2.P(x)$	0	2/4	4/4	➔6/4

$$\sigma^2 x = var[x\ ] = E[x^2] - \big(E(x)\big)^2$$

= 6/4 - 1 = 2/4

مثال/

$$f(x) = 3x^2 \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$E(x) = \int x \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot 3x^2\, dx$$

$$= 3\int_0^1 x^3\, dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4}(1)^4 - \frac{3}{4}(0)^4 = \frac{3}{4}$$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^4\, dx = \frac{3}{5} x^5 \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{5}(1)^5 - \frac{3}{5}(0)^5 = \frac{3}{5}$$

$$\sigma^2 x = Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{80}$$

الدالة المولدة للعزم Moment – generating function

وهو طريقة أخرى لايجاد التوقع

$M_x(t) = \sum e^{tx} \cdot p(x)$ في حال كان متقطع

$M_x(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)_{dx}$ في حال كان مستمر

$M_x(0) = 1$

$M'_x(0)$= E(x)

$M''_x(0) = E[x^2]$

مثال/ رميت ثلاث قطعات معدنية احسب التوقع والتباين لها.

X	0	1	2	3
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$M_x(t) = \sum e^{tx} \cdot p(x)$

$M_x(t) = e^{t(0)} \cdot \frac{1}{8} + e^{t(1)} \cdot \frac{3}{8} + e^{t(2)} \cdot \frac{3}{8} + e^{t(3)} \cdot \frac{1}{8}$

$M_x(t)=\frac{1}{8} + \frac{3}{8}e^{t} + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}\ e^{3t}$

$M'_x(t)=\frac{3}{8}e^{t} + \frac{6}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}\ e^{3t}$

$M'_x(0)$= 3/8 + 6/8 + 3/8 =12/8 ➔ E(x)

$M''_x(t)=\frac{3}{8}e^{t} + \frac{12}{8}e^{2t} + \frac{9}{8}\ e^{3t}$

$M''_x(0)$ = 3/8 + 12/8 + 9/8

= 28/8 ➔ $E[x^2]$

$\sigma^2 x = var[x\ ] = E[x^2] - \left(E(x)\right)^2$

$\sigma^2 x = var[x\ ]$ = 28/8 – $(12/8)^2$ = 6/8

Q $\longrightarrow$ $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \qquad 0 < x < \infty$

5 $\longrightarrow$ $M_x(t) = E(e^{xt}) = \int_0^\infty e^{xt} \cdot f(x)\, dx$

$$= \int_0^\infty e^{xt} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{xt - \frac{1}{2}x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{2} - t)}\, dx$$ ← عامل مشترك

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{(\frac{1}{2} - t)} e^{-x(\frac{1}{2} - t)} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{-1}{1-2t} \left(e^{-\infty} - e^{0}\right)$$

$$= \frac{-1}{1-2t} \cdot (0 - 1)$$

$$M_x(t) = \frac{1}{1-2t} \Rightarrow M_x(0) = 1 \checkmark$$

$$M'_x(t) = \frac{-1 \cdot -2}{(1-2t)^2} = \frac{2}{(1-2t)^2}$$

$$M'_x(0) = 2 \Rightarrow E(x)$$

$$M''_x(t) = \frac{-2 \cdot 2(1-2t) \cdot -2}{(1-2t)^4}$$

$$= \frac{8}{(1-2t)^3}$$

$$M''_x(0) = 8 \Rightarrow E(x^2)$$

$$var(x) = 8 - (2)^2 = 4$$