مقدمة في

بحوث العمليات

عبد الحسن رحيم حمادي

كلية شط العرب الجامعة

الطبعة الأولى

2023

المحتويات

الفصل الثالث : **مشكلة النقل**

الفصل الرابع : **مشكلة التخصيص**

الفصل الخامس : **المخططات الشبكية**

الفصل السادس : **نظرية المباراة**

الفصل السابع : **أتخــاذ القرار**

الفصل الاول

نشأة و تطور بحوث العمليات

1-1 مقدمة عن بحوث عمليات

2-1 خطوات تطبيق اساليب بحوث العمليات

3-1 خصائص بحوث عمليات

4-1 اهم أساليب بحوث عمليات

1-1 المقدمة

بحوث العمليات اسلوب علمي نشأ وتطورا بفضل مساهمات عديدة من العلماء في فترات زمنية مختلفة و تعتبر الدراسة التي قدمها المهندس الدنماركي A.K.Erlang عام 1917 بدايه نظرية صفوف الانتظار احد اساليب بحوث العمليات و في عام 1921 بدا E.Borel اول محاوله صياغه نظرية المباريات Game theory أعقبه جونسون فون نيومان و في الحرب العالميه الثانيه شكل في بريطانيا اول فريق لبحوث العمليات بهدف مساعده الاداره الحربيه في استخدام الرادارات الحديثة لرصد الطائرات الالمانية ثم شكلت مجموعة برئاسة عالم الطبيعة البريطاني M.S.Blackett لدراسة استخدام المعدات الحربيه ضد القوات الالمانية وقد حفزت نتائج فريق بحوث العمليات البريطانية السلطات العسكريه الامريكية فقامت هي الاخرى في تكوين فريق مماثل أوكلت اليه مهام عديدة ومن بينها معالجه المشكلات المتعلقة بنقل المعدات والمؤن والذخائر الحربيه وتخطيط عملية زرع الالغام في البحار والمحيطات كما ان السلطات الكنديه قامت بتكوين فريق بحوث العمليات اثناء الحرب العالمية الثانية للقيام بأبحاث في مجالات الاستخدام الامثل للموارد المتاحة وتوظيفها في خدمة العمليات الحربية وما ان وضعت الحرب العالمية الثانيه اوزارها حتى بدات الاساليب العلمية لبحوث العمليات بالانتشار في اوساط المؤسسات المدنيه وتعددت اساليبها توسعت تطبيقاتها و سوف نتناول في هذا الكتاب شرح لاهم تلك الاساليب مع الاستعانة بالامثلة لهذا الغرض.

2-1 خطوات تطبيق اساليب بحوث العمليات

1. تحديـــد وصياغة المشكلة Formulation the problem :

يقوم فريق بحوث العمليات في هذه المرحله بالتشخيص الدقيق للمشكله قيد الدراسه لتحديد كافة المتغيرات وتصنيفها الى متغيرات مسيطر عليها ومتغيرات لا يمكن السيطره عليها و قبل ذلك يجب ان يكون الفريق على بينه من الهدف ففي منشاه صناعيه على سبيل المثال قد يكون الهدف الحصول على اكبر ربح مادي وقد يكون الهدف الحصول على ربح اجتماعي حتى لو ادى ذلك إلى خسائر ماديه و على اساس الهدف تحدد المتغيرات ذات العلاقه في بلوغ الهدف المتوخى وفي هذه المرحله يتم تحديد كافه القيود الماديه والقانونيه والتي تحد من تصرف متخذ القرار في مرحله المفاضله بين البدائل المتاحه ان التحديد الدقيق للمشكله يعتبر اساسا لكل الخطوات اللاحقه وان الخطا في تحديد المشكله يؤدي الى بعثره الجهود والوصول الى حلول لمشاكل لا وجود لها وبالتالي فان تلك الحلول لاتنفع.

2. بناء نموذج رياضي للمشكلة Constructing the model :

يتم في هذه الخطوات تجسيد المشكلة او النظام قيد الدراسه بشكل رياضي لتسهيل العرض و التحليل الرياضي وايجاد العلاقات التي تربط المتغيرات و ابراز اهميه المتغيرات والبيانات الخاصه بالمشكله اضافه الى ان النموذج يمكن من دراسه النظام القائم وتحليله دون اي تغيير في النظام ويتكون من:

أ- المتغيرات الاساسيه والمعاملات الفنية Decision variables : المتغيرات الاساسيه هي المتغيرات المجهوله التي يتم ايجاد قيمها بواسطه حل النموذج الرياضي، اما المعاملات الفنيه فهي معدلات الاستخدام وهي تمثل متغيرات معلومه و مسيطر عليها والمعاملات الفنيه قد تكون محدده او احتماليه فمعدلات الانتاج والاستهلاك تعتبر معاملات فنيه وكذلك تكلفه الوحده الواحده او الوقت اللازم لانتاج وحده واحده قد تمثل هي الاخرى معاملات فنيه في النموذج الرياضي.

ب- القيود Constraints : التي تمثل حدود او قيود استخدام الموارد المتوفره في نموذج.

ج- داله الهدف Objective Function : وهي تمثل الصيغة الرياضية للهدف وهي مقياس لكفاءة النظام.

3. اشتقاق الحل من النموذج Deriving a solution from the model:

في هذه الخطوة يستخرج الحل المقترح للمشكله عن طريق حل النموذج الذي يمثلها و هناك طريقتين لحل النموذج هما :

أ- الطريقه الرقمية

ب- الطريقه الوصفية

4. اختبار النموذج والحلول Testing the model and the solution:

الحل الذي تم التوصل اليه في الخطوات السابقه لا بد من تقييمة لبيان جدواه ولتقييمة يمكن اتباع احدى طريقتين اولهما مقارنه نتائج النظام الحالي كما هو عليه بالنتائج التي تم التوصل اليها من حل النموذج و الطريقه الاخرى هي استخدام البيانات الماضيه في مقارنه الاداء الحالي للنظام والاداء الذي تم التوصل باستخدام النموذج اذا اثبتت المقارنه باستخدام اي من الطريقتين أن الحلول التي تم التوصل اليها من خلال النموذج يمكن ان ترقى بالاداء الى مستوى افضل فأن تلك الحلول جديرة بالاهتمام والتطبيق.

5. الرقابة على الحل Establishing control over solution :

من اجل ان يكون الحل الذي تم اختباره في الخطوه السابقه عمليا يجب ان يعكس النموذج كافه الظروف والمتغيرات والعلاقات في المشكله او النظام وضع الدراسه إذ ان الافتراضات التي يبنى عليها النموذج يجب ان تكون قائمه فعلا ولكن من المعروف ان الظروف والافتراضات التي جسدها النموذج قابلة للتغيير في اي لحظه لذا كان من الضروري مراعاه هذا الجانب وذلك بمراقبه كافه المتغيرات والعلاقات والظروف التي اخذت بنظر الاعتبار عند صياغه النموذج واجراء تغييرات المناسبه في النموذج عند حدوث اي تغيير في العلاقات او الظروف او الاهداف و بالشكل الذي يؤدي الى الابقاء على واقعيه النموذج اي تمثيله للواقع بكل مكونات.

6. التنفيذ Implementation:

وهذه تعتبر الخطوه الاخيره اذ مجرد الاقتناع بجدوى الحل الذي تم التوصل اليه من النموذج والتاكد من انه اخذ بالاعتبار كافه المتغيرات والعلاقات والظروف والامكانيات في المشكله موضع الدراسه عندئذ تبدا هذه المرحله وفيها يتم ترجمه الحل في صيغه اجراءات عمليه يراقب تطبيقها من قبل فريق بحوث

العمليات الذي يشكل لهذا الغرض للتاكد من مدى استجابة النظام للاجراءات الجديده واجراء التغييرات عند الحاجه ولضمان التنفيذ الكفؤ لكافة الاجراءات التي تم تضمنها حل النموذج يجب تحقيق مشاركه فعاله للقيادة او الاداره في كافه خطوات التطبيق انفة الذكر بدا من تحديد المشكلة.

3-1 خصائص بحوث العمليات

1- اعتمادها مدخل النظام في دراستها للمشاكل System orientation اي ان أي نشاط في المشكله موضع الدراسه يؤثر ويتاثر بغيره من الانشطه الاخرى.

2- اعتمادها الفريق المتعدد الاختصاصات Use of interdisciplinary teams.

3- اعتماد الطريقه العلمية.

4- استخدام النماذج الرياضيه Models.

5- التنبؤ : بحوث العمليات لا تعني بسلوك الظاهره في الوقت الحاضر بل تمتد لتشمل التنبؤ بسلوك الظاهره في المستقبل.

6- انها تساعد في تطوير نوعيه القرارات Improve the quality of decisions.

4-1 اهم أساليب بحوث العمليات

1- البرمجة الخطية

2- نموذج النقل

3- نموذج التخصص

4- المخططات الشبكية

5- البرمجة الديناميكية

6- نظرية صفوف الانتظار

7- المحاكاة

8- الرقابة على المخزون

9- نظرية المباريات

10- نظرية القرار

11- برمجة الاهداف

5-1 استخدامات اساليب بحوث العمليات

فيما يلي أهم استخدمات بحوث العمليات

1- تخصيص الموارد

2- النقل

3- التوزيع

4- تخطيط الانتاج

5- الرقابة على المخزون

6- التسويق

7- أدارة المشاريع
8- الاستخدامات العسكرية
9- في المحاسبة و الادارة المالية
10- أدارة الموارد البشرية
11- الخدمات الصحية
12- الشراء
13- الرقابة على الانتاج

الفصل الثاني

البرمجة الخطية

2 - 1 المقدمة
2 - 2 مفهوم البرمجة الخطية
2 - 3 فرضيات البرمجة الخطية
2 - 4 الصياغة العامة لنماذج البرمجة الخطية
2 - 5 الصياغة القانونية
2 - 6 اساليب حل نماذج البرمجة الخطية
2-6-1 الطريقة البيانية
2-6-2 الطريقة المبسطة
2 - 7 الحالات الخاصة لنموذج البرمجة الخطية
2 - 8 الثنائية في البرمجة الخطية
2 - 9 أسئلة الفصل الثاني

البرمجة الخطية Linear Programming

1-2 المقدمة

ترجـــع بدايه فكرة البرمجه الى تطبيق طريقه المدخلات والمخرجات التي قدمها الاقتصادي المعروف , lenotief WW، في عام 1920 وقد شـــــاع استخدام هذا الاسلوب بعد انتهاء الحرب العالميه الثانيه وفي عـــام 1947 قدم العالم الرياضي George. B. Datzing ، اسلوبا رياضياً متكاملا في معالجه مشكلات معقده في مجالات مختلفه باستخدام البرمجه الخطيه وقد اطلق على هذا الاسلوب طريقة السمبلكس (الطريقه المبسطة) وكان اول استخدام لهذا الاسلوب في القوات الجويه الامريكيــــــه لتحديد افضل البرامج في التدريب والصيانه والتجديد وتحليل ارخص الطرق الجويه ثم امتد استخدامها الى حقول كثيره كالتسويق والانتاج وغيرها حتى اصبحت اكثر اساليــــــب بحوث العمليات شيوعا ويرجـــع سر هذا الشيوع الى النتائج الجيـــــده التي اظهرها استخدامها كما ان التطورات في حقل الانتاج وما تظمنته من اقامه المشاريع الضخمه والتي تقوم بانتاج كميات هائله من المواد و بانواع متعدده باستخدام الالات المختلفـــــــه الانواع والطاقـــــات كل ذلك ادى الى تعقيد عمليه اتخاذ القرار اذا كان لابد من الركون الــى اساليب رياضيه متقدمـــــه ويمثل اسلوب البرمجـــــه الخطيه احد اهم الاساليب المستخدمه وقد كان لاستخدام الحاسب الالكتروني في حل نماذج البرمجه الخطيـــــه اثر كبير في تسهيل مهمه اتخاذ القرارات باستخدام هذا الاسلوب وبالتالي شيوع استخدامه .

2-2 مفهوم البرمجة الخطية

عند تعريفه للبرمجه الخطيه يذكر Robert. J.Thierauf ، ان افضل طريقه لتعريف البرمجه الخطيه هي التمعن بكلماتها فالصفه خطيه تستخدم لوصف العلاقه بين اثنين او اكثر من المتغيرات حيث يترتب على اي تغيير في احداهما بنسبه معينه تغير المتغيرات الاخرى بنفس النسبه اما كلمه البرمجه فهي تعني استخدام اساليب رياضيه معينه للوصول الى افضل استخدام للموارد المحدده للمنشات وكلمة البرمجة تعني الحساب وهي تعني هنا. ايجاد بعض المجاهيل من مجموعه معادلات او متباينات بوجود شروط معينه يعبر عنها بعلاقات رياضيه.

اما Giuseppe .M. Ferrerodi Roccaferrera فيشير الى اختلاف تعريف البرمجه الخطيه باختلاف مهنه صاحب التعريف فرجال الاعمال ينظروا الى البرمجه الخطيه باعتبارها وسيله فنيه تستخدم في البحث بين الحلول العديده عن تلك الحلول التي تنسجم مع اهدافهم المحدده اما الاقتصاديون فيعرفوا البرمجه بانها طريقه توزيع الموارد المحدده يؤدي الى اشباع مجموعه من الطلبات بوجود مجموعه من القيود اما علماء الرياضيات فهم يعرفوا البرمجه الخطيه بأنها عمليات حل مشاكل خاصه تكون فيها داله الهدف تعظيم او

تدنيه وبوجود مجموعه من القيود او الموارد اما Lawrence Lapin فيرى ان البرمجة تعني هنا شكل من اشكال التخطيط و تستلزم التوزيع الاقتصادي للموارد النادره من اجل مواجهه الاحتياجات الاساسية لذا فان البرمجة تساهم في رسم الخطه التي تنطوي على التوزيع الكفوء لعوامل الانتاج بذلك الشكل الذي يحقق الاهداف المطلوبه بدرجه عاليه من الكفاءه ويشير اصطلاح البرمجة الخطية الى ان تلك الخطط يتم توصل اليها عن طريق اسلوب رياضي يستلزم العلاقه الخطيه اي ان المساله النهائية يمكن تصويرها بشكل خطوط مستقيمة، مستويات او ارقام هندسية مماثلة في الشكل البياني لها لا يمكن ان يتضمن اي منحنى النموذج الرياضي يظهر المسألة وما يتعلق بها من حاجات واهداف الاداره بواسطه تعبيرات جبريه تمثل بخطوط مستقيمة.

3-2 فرضيات البرمجة الخطية Linear Programming Hypothesis

1- الخطيـــة Linearity

اي ان هناك علاقات ثابته بين المتغيرات التي تنطوي عليها المساله وتعني العلاقه الخطيه في داله الهدف ان كل فعالية تسهم في تحقيق داله الهدف بنسبه ثابته مرتبطه بمستوى تلك الفعاليه اما العلاقه الخطيه في القيود فهي تعني ان هناك تناسب بين الموارد وبين مستوى الفعاليات التي تستخدم تلك الموارد.

2- الاضافـــة Additivity

هذه الفرضيه تعني ان مجموع كميه الموارد المستخدمه لكل الفعاليات يجب ان يساوي مجموع المواد المستخدمه في كل فعاليه مفرده وهي تعني في داله الهدف ان الربح الكلي يساوي مجموعه ارباح الانشطه التي تتكون منها داله الهدف اما في حالة كون داله الهدف تدنية تكاليف فان التكلفه الاجماليه عباره عن مجموعه تكاليف الانشطه التي تتكون منها داله الهدف.

3- القابليه للتجزئـــة Divisibility

هذه الفرضيه تعتبر الزاميه في البرامج المثلى ذوات القيم الكسريه وهى تعني امكانية تجزئه الموارد المستخدمه و الوحدات المنتجه اي ان اي متغير في المساله يمكن ان ياخذ قيم كسرية.

4- التحديــــد او التاكـــد Certainty

والمقصود بالتحديد ان جميع العلاقات الرياضيه والمعاملات الفنيه والقيم المطلقة معرفه ومؤكده وثابته اي غياب صفه الاحتمال فنسب الاستخدام للموارد على سبيل المثال يجب ان تكون ثابته للفتره موضع البحث لذا يجب التعبير عنها بقيم محدده مفردة.

5- اللاسلبية Non – negativity

وتعني هذه الفرضيه ان كل المتغيرات التي تدخل في المسأله يجب ان تكون مساويه او اكبر من الصفر و يعبر عن هذه الفرضيه بقيود تدعى القيود غير السالبه .

4-2 الصياغة العامة لنماذج البرمجة الخطية

تاخذ نماذج البرمجة الخطية الصياغة الاتية :-

دالة الهدف objective function

Maximize or Minimize $X_0 = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$

Subject to :

$$\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1nxn}(\leq, =, \geq)\ b_1}$$

$$\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2\,nxn}(\leq, =, \geq)\ b_2}$$

$$\mathbf{a\ m_1x_1 + a\ m_2x_2 + \dots + a_{mnxn}(\leq, =, \geq)\ b_m}$$

$$\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0}$$

حيث ان : $\mathbf{a_{ij}, b_i, c_j}$

ثوابت تحدد منسياق المسألة

$\mathbf{i = 1,2,\dots, m} \qquad \mathbf{j = 1,2,\dots, n}$

المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بشأنها $\mathbf{x_j}$.

و نلاحظ من الصياغة ان اشارة المتغيرات $\mathbf{x_j}$ مقيدة بشرط عدم السالبية non – negative وهذا الشرط ضروري لتطوير طريقة حل نموذج L.P.

وبصورة عامة اذا كانت (bi) تمثل كمية الموارد المحدودة و المطلوب برمجتها لتحقيق هدف معين , فأن (a_{ij}) تمثل كمية الموارد المحدودة من نوع (i) و المطلوب تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط او الفعالية (j) , و ان قيمة هذا التخصيص لكل وحدة يعبر عنها (c_j) الربح او الكلفة .

يمكن وضع الصيغة العامة بالشكل المختصر التالي باستخدام اشارة المجموع اولا , و بأستخدام المصفوفات و المتجهات ثانيآ .

دالة الهدف

$$\mathbf{Max\ or\ Min\ x_0} = \sum_{j=1}^{n} cjxj$$

Subject to :

$$\sum_{j=1}^{n} cjxj\ (\leq, =, \geq)\ \mathbf{bi\ (\ i = 1,2, \dots, m\ )}$$

$\mathbf{X_j \geq 0 \qquad j = 1,2, \dots, n}$

و يمكن التعبير عنها بلغة المصفوفات :

Max or Min x_0 = CX

Subject to :

$$AX\ (\leq, =, \geq)\ B$$

$$X_j \geq 0$$

حيث ان :

C : تمثل متجه صفي عدد عناصره X_1

X: تمثل متجه عمودي عدد عناصره $n \; X_1$

A: مصفوفة من مرتبة $n \; X \; m$

B: تمثل متجه عمودي عدد عناصره $m \; X_1$

5-2 الصيغة القانونية Canonical Form

بالامكان وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية اعلاه في الشكل التالي و الذي نعبر عنه بالشكل القانوني :

$$\text{Max } x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Subject to :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1,2, \dots , m)$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1,2, \dots , n$$

و خصائص هذه الصيغة هي :

1- جميع المتغيرات (x_j) تكون مقيدة بالاشارة
2- جميع القيود و التي عددها (m) تكون من نوع اقل او يساوي (≤).
3- دالة الهدف من نوع Maximum .

و بالامكان وضع اي صيغة للبرمجة الخطية بالشكل القانوني او العام بأستخدام عمليات التحويل الاولية (Elementary Trans Formation) والتي سنستعرضها بشكل مبسط و كما يأتي :

Maximize x_0 = Max (- x_0)

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b \rightarrow -a_1x_1 - a_2x_2 \leq -b$$

يتم تحويل قيد المساواة الى متباينتين متعاكستين بالاتجاه اي احدهما ($\geq$) والاخرى ($\leq$) ثم تحول الـــــ ($\geq$) الى ($\leq$) و ذلك بعد ضربها ب (-1) كما موضح في المثال التالي :

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b \rightarrow -a_1x_1 - a_2x_2 \leq -b$$

بالنسبة للقيد المتكون من قيمة مطلقة في الطرف الايسر منه يتحول الى متباينتين كما موضح في المثال التالي :

$$| a_1x_1 + a_2x_2 | \leq b \rightarrow$$

Either $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$

Or $-(a_1x_1 + a_2x_2) \leq b$

المتغير غير المقيد بالاشارة (اي ان اشارته غير محددة فيما لو كانت سالبة , موجبة او صفر) , فيمثل بالفرق بين متغيرين تكون اشارة كل منهما مقيدة بعبارة اخرى يكون كل منهما غير سالب , و كما موضح في المثال التالي :

اذا كانت (x_1) فير مقيدة (unrestricted in sign) فأنه يكافى :

X1 = $(x'_1 - x''_1) x'_1 \geq 0 , x''_1 > 0$

و فيما يلي مثال توضحي للصيغة القانونية .

6-2 أساليب حل نماذج البرمجة الخطية Forms of Linear Programming model

هنالك العديد من الأساليب لحل نماذج البرمجة الخطية منها:-

1. الطريقة البيانية **The Graphical Method**
2. الطريقة الجبرية **The Algebraic**
3. طريقة السمبلكس **Simplex Method**
4. طريقة السمبلكس ذات الوجهين **The Two - Phase Simplex Method**

سوف يقتصر شرحنا على الطريقتين البيانية والمبسطة لاهيتهما

1-6-2 اولا : الطريقة البيانية The Graphical Method

تستخدم هذه الطريقة في حل المسائل ذات المتغيرين عادةً لذا فإنها غير عملية لان المشاكل في الواقع تتكون من العديد من المتغيرات في (العائدة أكثر من اثنين) وبموجبها يتم تحويل النموذج الرياضي الى شكل بياني يسهل عملية التحليل وترجع اهمية هذه الطريقة كونها توضح المفاهيم الاساسية لكيفية استخدام البرمجة الخطية في حل المشاكل الكبيرة اضافة الى استخدامها في توضيح كيفية استخدام طريقة السمبلكس في حل نماذج البرمجة الخطية.

الخطـــــوات

1. الصياغة الرياضية للمشكلة Formulation the mathematical model .
2. تحويل المتباينات إلى المعادلات Convert inequalities to equation .
3. رسم القيود بيانيا وتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة Photo every equation on the diagram and determine the feasible region.
4. أيجاد احداثيات أركان منطقة الحدود المجهولة حيث ان الحل الامثل يقع عند أركان منطقة الحلول الممكنة (كقاعـــدة عامة) تدعى أركان منطقة الحلول الممكنة نقاط التطرف Extreme pointd .
5. تعويض أحداثيات نقاط أركان منطقة الحلول الممكنة (أحداثيات نقاط التطرف) في دالة الهدف فأذا كان الهدف تعظيم (Max) فأن اكبر قيمة لدالة الهدف الناتجة من التعويض تمثل الحل الامثل أما أذا كانت دالة الهدف (Min) فأن اقل قيمة لدالة الهدف الناتجة من التعويض تمثل الحل الامثل . وفق القواعد الاتية :

كيفية رسم القيود بيانآ و كما يلي :

أ- عندما يكون القيد اكبر من او يساوي (≥)

مثال :-

$$\mathbf{4X_1 + 5X_2 \geq 20}$$

يكون الرسم و المنطقة الملائمة كمايلي :

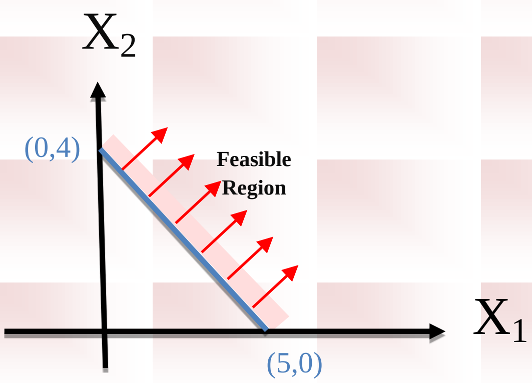
تحول المتباينة الى المعادلة

$$4x_1 + 5x_2 = 20$$

عند تقاطع القيد مع x_1 يكون قيمة x_2 = صفر

$$4x_1 + 5\,(0) = 20$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{20}{4} = 5$$



شكل (1)

∴ نقطة تقاطع القيد بالمحور x_1 هي (5 , 0) و بنفس الطريقة نستخرج نقطة تقاطع القيد مع المحور x_2 (0 , 4) , شكل (1) يوضح رسم القيد

ب- عنما يكون القيد اقل من اويساوي (≤)

مثال :-

$$4X_1 + 5X_2 \leq 20$$

يكون الرسم والمنطقة الملائمة كمايلي :

تحول المتباينة الى المعادلة

عند تقاطع القيد مع المحور x1 قيمة x2 مساوية للصفر

$$4x_1 + 5\,(\,0\,) = 20$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{20}{4} = 5$$

∴ نقطة تقاطع (5 , 0) عند تقاطع

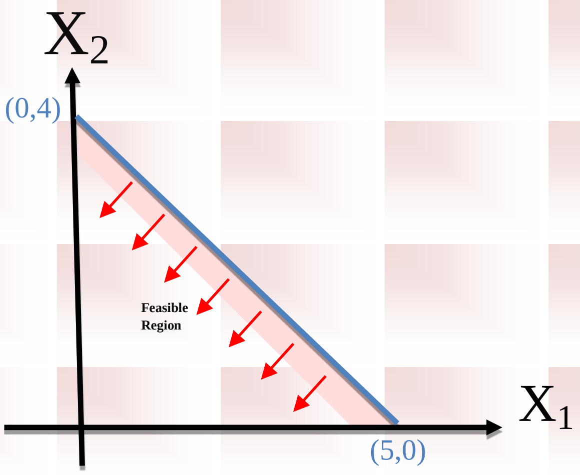
القيد مع المحور x_1, x_2 = صفر

$$4\,(\,0\,) + 5x_2 = 20$$

$$\therefore\ x_2 = \frac{20}{5} = 4$$

∴ نقطة تقاطع (0 , 4)

لاحظ شكل (2)



شكل (2)

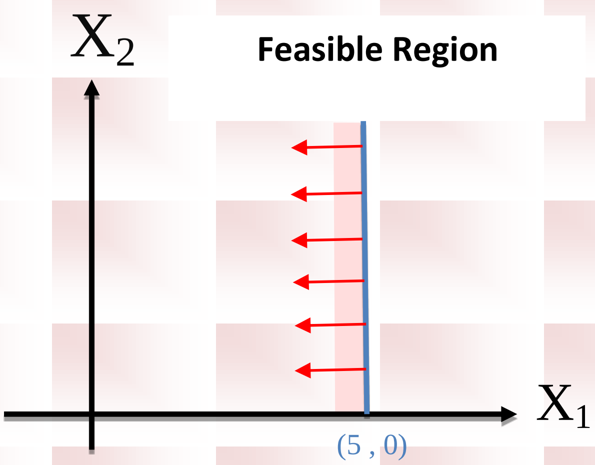
ج- عندما يحتوي القيد متغير واحد

مثال :-

$$X_1 \leq 5$$

يكون الرسم والمنطقة الملائمة كمايلي :

لاحظ شكل (3)



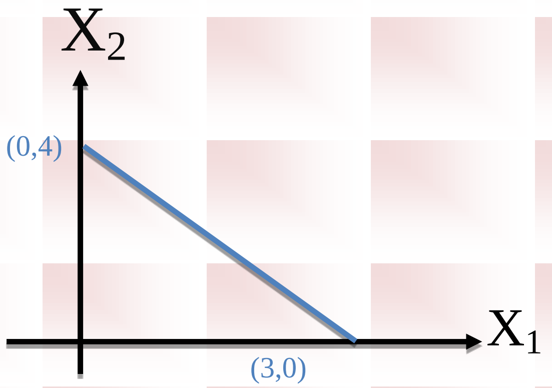
شكل (3)

د- عنما يكون القيد بهيئة مساواة فأن المنطقة الملائمة هي القيد نفسة

مثال :-

$$4X_1 + 3X_2 = 12$$

يكون الرسم و المنطقة الملائمة

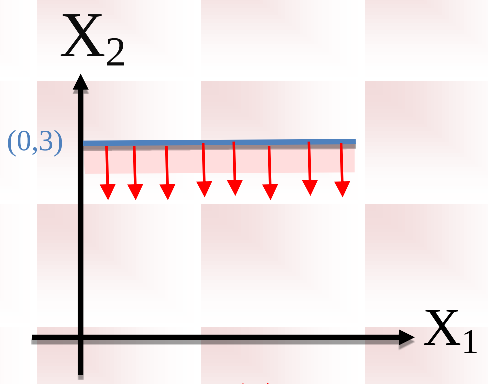


شكل (4)

مثال :-

$$X_2 \leq 3$$

يكون الرسم والمنطقة الملائمة في الشكل (5)



شكل (5)

هـ - عندما يكون القيد خارج الربع الاول و هنالك قيد عدم السلبية ضمن النموذج

مثال :

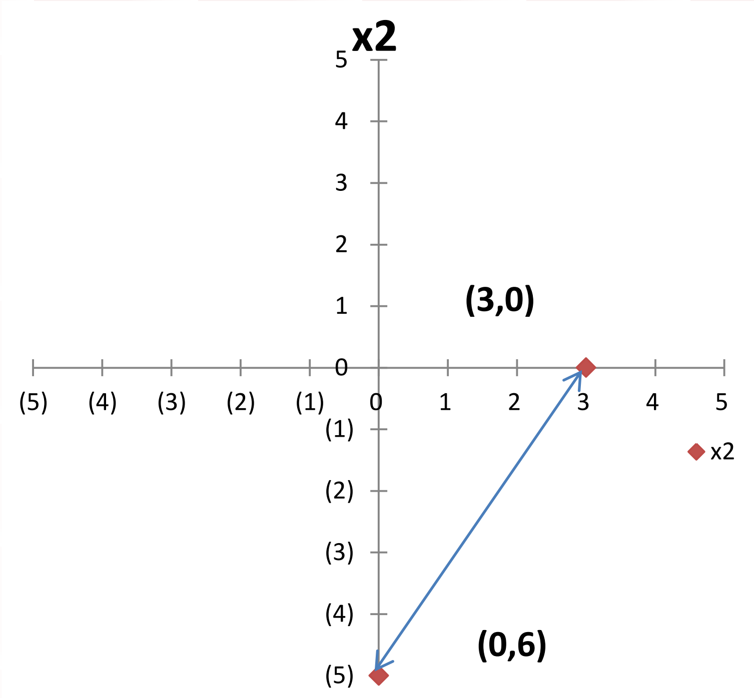
$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 3x_2 = 15$$

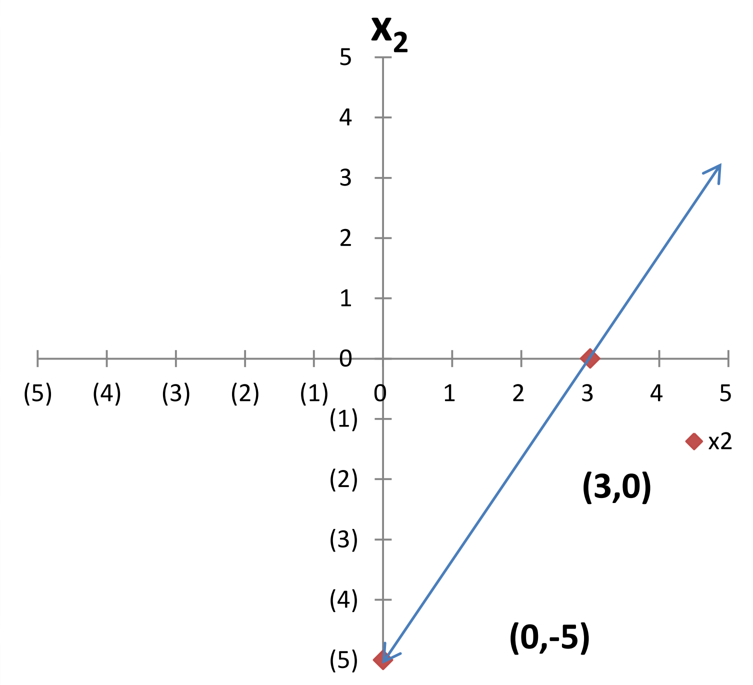
(0 , -5)

(3 , 0)

الرسم كما موضح في الشكل (6)



لتحقيق شرط قيد عدم السلبية نمدد الخط الى الربع الاول فيكون الرسم كالاتي :



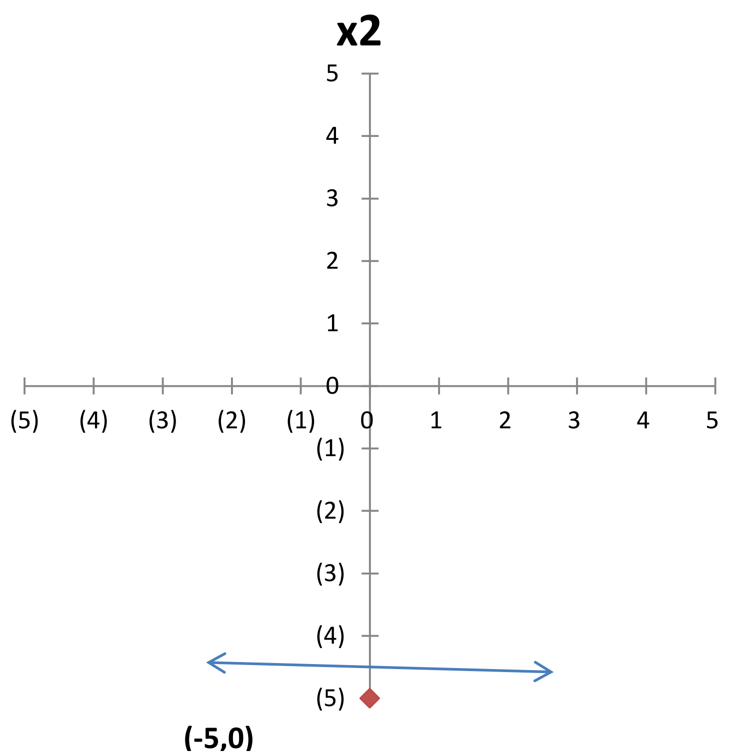
شكل (6)

و – عندما لا يوجد قيد عدم السلبية يبقى القيد كما في الشكل (7) :

$$X_2 \leq -5$$

$$X_2 = -5$$

$$(0, -5)$$



شكل (7)

أمثلـــة محلولة

1- **A Firm produced two products these products are processed on two different machines. The time required to manufacture one unit of each of two product and profit for each product and the daily capacity of the two machines are given in the table below:**

Product المنتوج	Machine الماكنة (1)	Machine الماكنة (2)	Profit الربح
A	3	2	28
B	1	4	27
Capacity	200	300	

Formulate this as a linear programming problem and determine the optimum solution that maximize the total profit?

مصنع يقوم بأنتاج نوعين من المنتجات بأستخدام ماكنتين الوقت اللازم لتصنيع وربح لكل منتوج و الطاقة اليومية للماكنتين كما معطاه في الجدول
المطلوب أيجاد الصياغة الرياضية للمشكلة وفق نموذج البرمجة الخطية و تحديد الحل الامثل و الذي يحقق أعظم ربح ؟

Solution: -

1. الصياغة الرياضية للمسأله:

Let No. of product A = X_1
Let No. of product B = X_2
Objective Function
Max (Z) = $28X_1 + 27X_2$
Subject to:

$3X_1 + X_2 \leq 200$ …………. (1)
$2X_1 + 4X_2 \leq 300$ ……….. (2)
$X_1, X_2 \geq 0$

2. تحويل المتباينات الى معادلات:

$3X_1 + X_2 = 200$ …………. (1)
$2X_1 + 4X_2 = 300$ ……….. (2)

3. رسم القيود بيانياً:

$3X_1 + X_2 = 200$ …………. (1)

نعوض X_1 = صفر

$3(0) + X_2 = 200$
$0 + X_2 = 200$
$\therefore X_2 = 200$

النقطة (0,200) تمثل تقاطع القيد بالمحور X_2

نعوض $X_2 = 0$

$3X_1 + 0 = 200$

$\therefore X_1 = \frac{200}{3} = 67$

النقطة (67,0) تمثل تقاطع القيد بالمحور X_1

$2X_1 + 4X_2 = 300$ ……….. (2)

نعوض ان X_1 = صفر

$2(0) + 4X_2 = 300$

$\therefore X_2 = \frac{300}{4} = 75$

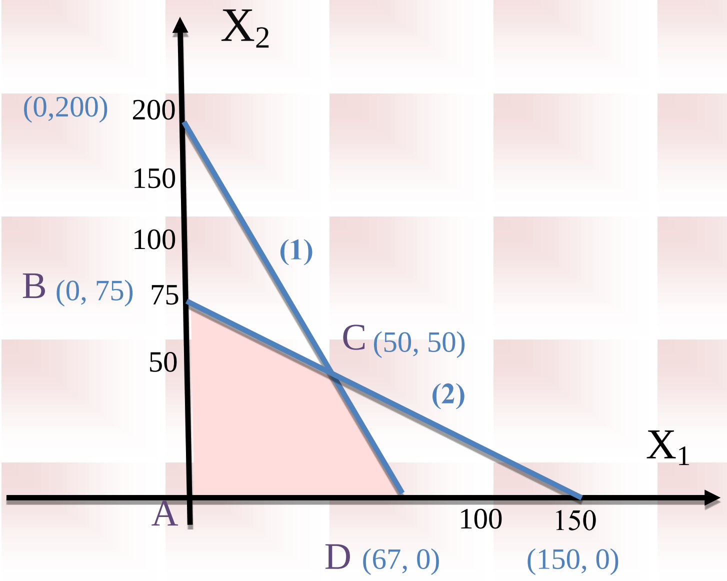
النقطة (0,75)

نعوض $X_2 = 0$

$$2X_1 + 4(0) = 300$$

$$\therefore X_1 = \frac{300}{2} = 150$$

النقطة (150,0)



شكل (2-1)

4. تحديد منطقة الحل او منطقة الامكانيات المتاحة Feasible space or Feasible Region

وهي المنطقة التي تحقق كل الشروط الواردة في المسألة (كل القيود الوارده في المخطط البياني) وهي هنا المنطقة المظللة A,B,C,D وكقاعدة عامة الحل يقع عند اركان المنطقة والتي تم تظليلها وبالنظر لكون احداثيات جميع الاركان معروفة بأستثناء C لذا نستخرج احداثيات C والتي تقع عند تقاطع القيدين (1) و (2)

$$3X_1 + X_2 = 200 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2X_1 + 4X_2 = 300 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

تضرب المعادلة (1) بـ (4) فينتج

$$12X_1 + 4X_2 = 800 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) الجديدة

$$12X_1 + 4X_2 = 800 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2X_1 + 4X_2 = 300 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$10X_1 = 500$$

$\therefore X_1 = \dfrac{500}{10} = 50$

بالتعويض في المعادلة (2)

$2(50) + 4X_2 = 300$
$100 + 4X_2 = 300$
$4X_2 = 200$
$\therefore X_2 = \dfrac{200}{4} = 50$

اي احداثيات C (50,50)

.5 تحديد الحل الامثل (الحل الذي يضمن اكبر قيمة لدالة الهدف) عن طريق تعويض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف وكما يلي :

Extreme Points نقاط التطرف	**Objective Function $Z = 28X_1 + 27X_2$**
A (0,0)	**$Z = 28(0) + 27(0) = 0$**
B (0,75)	**$Z = 28(0) + 27(75) = 202$**
C (50,50)	**$Z = 28(50) + 27(50) = 2750$**
D (67,0)	**$Z = 28(67) + 27(0) = 1876$**

The Optimum Total Profit = 2750
Optimum Solution = x1 = 50
X2 = 50

2- **Find the Maximum value of**

Max $Z = 7X_1 + 3X_2$

Subject to:

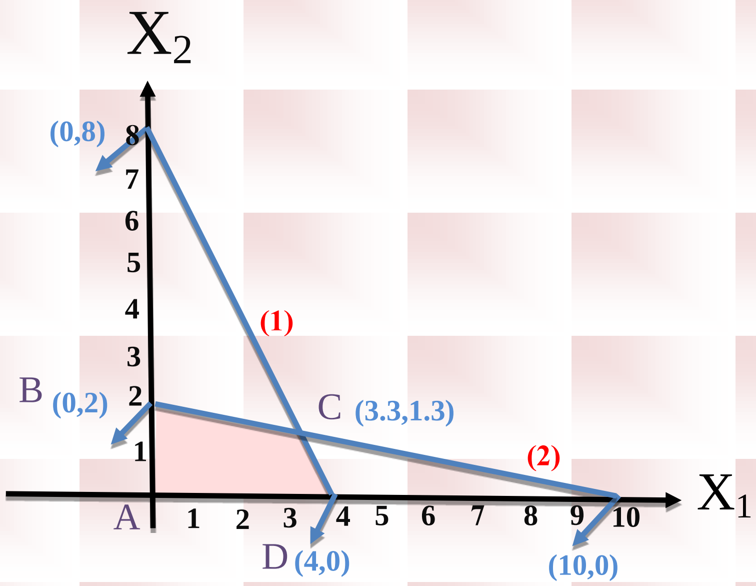
$2X_1 + X_2 \leq 8$ ………….. (1)
$2X_1 + 10X_2 \leq 20$ ……... (2)
$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

تحديد نقاط تقاطع القيدين في المحورين بعد تحويل المتباينتين إلى معادلتين

القيــــد	X_1	X_2
$2X_1+X_2 = 8$	0	8
	4	0
$2X_1+10X_2 = 20$	0	2
	10	0

رسم القيدين بيانياً :



شكل (2-7)

كما نشاهد اعلاه ان المنطقة (A B C D) تمثل منطقة تحقق القيدين لذا فإن الحل الأمثل يقع عند أركان هذه المنطقة , احداثيات الأركان معلومة باستثناء النقطة (C) والتي تقع عند تقاطع القيدين لذا تقاطع المعادلتين لاستخراج هذه النقطة:

$$2X_1 + 10X_2 = 20 \;\dots\dots\dots\; (2)$$

$$2X_1 + X_2 = 8 \;\dots\dots\dots\dots\; (1)$$

$$9X_2 = 12$$

$$\therefore \quad X_2 = \frac{12}{9} = 1.3$$

تعوض القيمة المستخرجة لـــ X_2 في المعادلة (1)

$$2X_1 + 1.3 = 8$$

$$2X_1 = 6.7$$

$$X_1 = 3.3$$

∴ احداثيات C هي (3.3 , 1.3)

Extreme Points نقاط التطرف	**Objective Function** $Z = 7X_1 + 3X_2$
A (0,0)	**Z = 7(0) + 3(0) = 0**
B (0,2)	**Z = 7(0) + 3(2) = 6**
C (3.3 , 1.3)	**Z = 7(3.3) + 3(1.3) = 23 + 3.9 ≃ 27**
D (4.0)	**Z = 7(4) + 3(0) = 28**

تحديد الحل الامثل عن طريق تعويض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف :

أي أن الحل يقع عند النقطة التي تمثل أعلى قيمة لـ (Z) أي النقطه (D) فالحل:

Optimum Solution :

Z = 28

$X_1 = 4$

$X_2 = 0$

3- **The company Manufactures table and chairs. following Table Shows the resources consumed and the until profits for each product. For Simplicity, we will assume that only two resources are consumed in manufacturing Furniture (300 board Feet in Inventory) and Laboure (110 hours Available) The owner wants to determine how many tables and chairs should be made to maximize the total profit for patio furniture**

Solution :

الموارد **Resource**	الاحتياجات لكل وحدة **Unite Requirements**		الكميات المتوفره **Amount Available**
	Table (x_1)	**chairs (x_2)**	
Wood (board feet)	**30**	**20**	**300**
Laboure (hours)	**5**	**10**	**110**
Unit profit ربح الوحدة	$6	$8	

Letting X_1 = Number of tables Made

X_2 = Number of chairs Made

Objective

Max (Z) = $6X_1 + 8X_2$

Subject to:

(Laboure) قيد ساعات العمل $30X_1 + 20X_2 \leq 300$ ………. (1)

(Wood) قيد المواد المتيسره $5X_1 + 10X_2 \leq 110$ ………..... (2)

$X_1, X_2 \geq 0$

اولاً : تحويل المتباينة الى معادلات

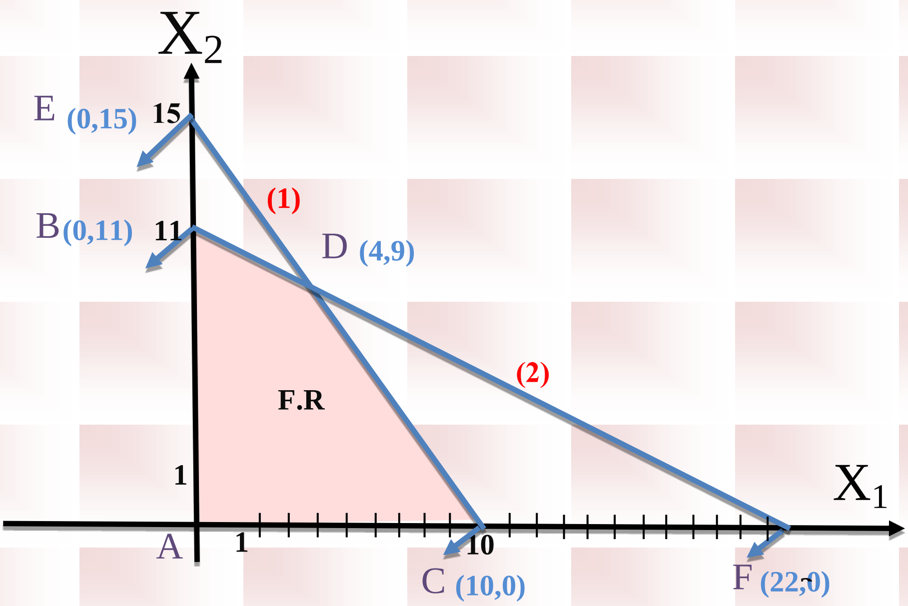
$30X_1 + 20X_2 = 300$ …………. (1)

$5X_1 + 10X_2 = 110$ …………... (2)

ثانياً : رسم القيود بيانياً

Constraints	Points
$30X_1 + 20X_2 = 300$	(0,15) (10,0)
$5X_1 + 10X_2 = 110$	(0,11) (22,0)

ثالثاً : نحدد المنطقة الملائمة وهي كما في الشكل (المنطقة المظللة) واركانها النقاط (A,B,D,C) كما في الشكل



شكل (2-8)

رابعاً : تحديد منطقة الحلول الممكنة Feasible Region وكما يظهر في الشكل البياني فأن المنطقة المضللة (A,B,D,C) هي المنطقة الملائمة

خامساً : أيجاد احداثيات اركان المنطقة الملائمة لجميع اركان المنطقة الملائمة معلومة بأستثناء النقطة (D) والتي تمثل تقاطع القيدين (1) و(2)

$30X_1 + 20X_2 = 300$ …………. (1)
$5X_1 + 10X_2 = 110$ …………... (2)

بضرب المعادلة (2) بالعدد (2) ينتج :

$10X_1 + 20X_2 = 220$ …………... (2)

ويطرحها من المعادلة (1) :

$20X_1 = 80$

$\therefore X_1 = \frac{80}{20} = 4$

وبالتعويض في (1) :

$30(4) + 20X_2 = 300$
$120 + 20X_2 = 300$

$20X_2 = 180 \rightarrow X_2 = \frac{180}{20} = 9$

∴ احداثيات النقطة (D) هي (4,9)

سادساً : بتعويض أركان منطقة لحلول الممكنة في الدالة الهدف ينتج :-

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 6X_1 + 8X_2$
B (0,11)	**Z = 6(0) + 8(11) = 88**
D (4,9)	**Z = 6(4) + 8(9) = 24 + 72 = 96**
C (10,0)	**Z = 6(10) + 8(0) = 60**

وبالنظر لكون الهدف هو تعظيم Maximization لذا فان الحل يقع في المنطقة D حيث :

$Z = 96$
$X_1 = 4$
$X_2 = 9$

4- **The AMIR Box company makes medium and large units. Medium boxes each require (9) square Feet of wood while large ones consume (15). All boxes require 0.5 hours of labor regardless of size wood is limited to (450) square feet. And only 20 hours of labor are available. due to space limitations, no more than 20 larg boxes can be mode each day Also, customers can absorb at most (30) medium boxes. subject to these constraints, any number of boxes can be made. medium boxes yield a profit of $6 large ones each only $2**

شركة امير لصنع الصناديق تصنع صناديق كبيرة ومتوسطة وكل صندوق متوسط يحتاج (9) فيت من الالواح والصندوق الكبير يحتاج الى (15). كل الصناديق تحتاج الى (0.5) ساعة لتصنيعها مهما كان حجم الصندوق. المتوفر من الخشب (450) فيت مربع والزمن المتوفر (20) ساعة وبسبب محدودية المكان لايمكن تصنيع اكثر من (20) صندوق كبير كما ان المستهلكين لايحتاجون الى اكثر من (30) صندوق متوسط ربح الصندوق المتوسط الحجم 6$ وربح الصندوق الكبيرالحجم 2$ والمطلوب صياغة المشكلة بشكل رياضي وحله بأستخدام الطريقة البيانية لايجاد اعظم ربح؟

Solution: -

اولاً : الصياغة الرياضية للنموذج

Letting:

X_1 = number of medium boxes to be made

X_2 = number of large boxes to be made

The objective is to:

$$Max\ (Z) = 6X_1 + 2X_2$$

Subject to:

$9X_1 + 15X_2 \leq 450$ …………. (1) (wood)

$0.5X_1 + 0.5X_2 \leq 20$ ………… (2) (labour)

$X_2 \leq 20$ .... (3) (Space)

$X_1 \leq 30$ .... (4) (Customer)

ثانياً : تحوول المتباينات الى معادلات

$9X_1 + 15X_2 = 450$ …………. (1) (wood)

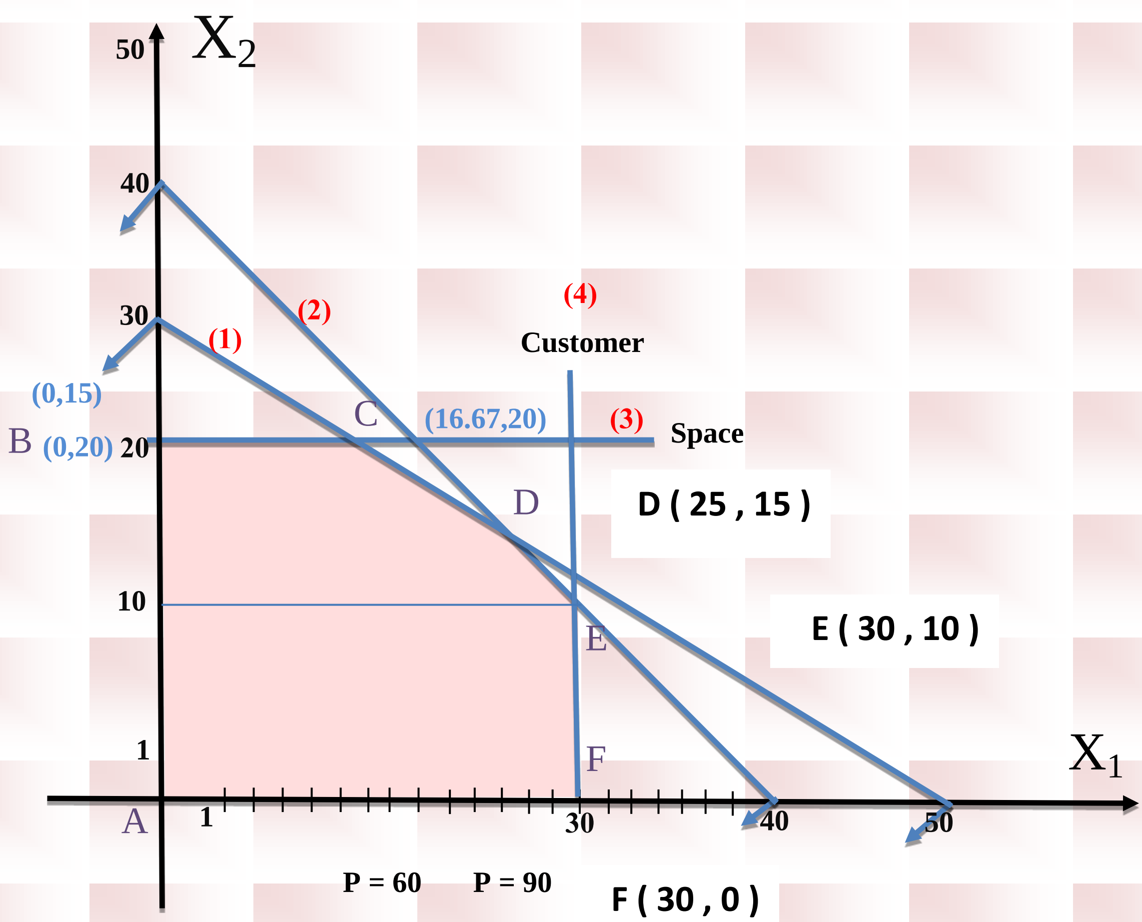
$0.5X_1 + 0.5X_2 = 20$ ………… (2) (labour)

$X_2 = 20$ .... (3) (Space)

$X_1 = 30$ .... (4) (Customer)

ثالثاً : رسم القيود بيانياً (لتحديد نقاط تقاطع القيود بالمحورين)

Constraints	Points
$9X_1 + 15X_2 = 450$	(0,30) (50,0)
$0.5X_1 + 0.5X_2 = 20$	(40,0) (0,40)
$X_2 = 20$	(0,20)
$X_1 = 30$	(30,0)



شكل (2-9)

رابعاً : منطقة الحلول الممكنة (Feasible Region)

يتضح من الشكل البياني (2-9) ان المنطقة المضلله (A,B,C,D,E,F) هي المنطقة الملائمة (منطقة الحلول الممكنة)

خامساً : أيجاد احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة

احداثيات النقطة B معلومة (0,20)

النقطة C تقع عند تقاطع القيدين (1) و (3)

$$9X_1 + 15X_2 = 450 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$X_2 = 20 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بالتعويض في (1)

$$9X_1 + 15(20) = 450 \;\rightarrow 9X_1 = 150$$
$$\therefore X_1 = \frac{150}{9} \simeq 16.67$$

∴ احداثيات C هي (16.67,20)

النقطة D تقع عند تقاطع القيدين (1) و(2)

$$9X_1 + 15X_2 = 450 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$0.5X_1 + 0.5X_2 = 20 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بضرب المعادلة (2) بالرقم 18 ينتج

$$9X_1 + 9X_2 = 360 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1)

$$6X_2 = 90$$
$$\therefore X_2 = \frac{90}{6} = 15$$

بالتعويض في (1)

$$9X_1 + 15(15) = 450$$
$$9X_1 + 225 = 450$$
$$9X_1 = 450 - 225$$
$$9X_1 = 225 \quad \rightarrow \quad \therefore X_1 = \frac{225}{9} = 25$$

∴ احداثيات D هي (25,15)

النقطة E تقع عند تقاطع القيدين (4) والقيد (2)

$$0.5X_1 + 0.5X_2 = 20 \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$X_1 = 30 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

بتعويض قيمة X_1 في المعادلة (4) في المعادلة (1) ينتج

$$0.5(30) + 0.5X_2 = 20$$
$$15 + 0.5X_2 = 20$$
$$0.5X_2 = 5 \rightarrow X_2 = \frac{5}{0.5} = 10$$

∴ احداثيات E هي (30,10)

Extreme Points نقاط التطرف	**Objective Function $Z = 6X_1 + 2X_2$**
A (0,0)	**$Z = 6(0) + 2(0) = 0$**
B (0,20)	**$Z = 6(0) + 2(20) = 40$**
C (16.67,20)	**$Z = 6(16.67) + 2(20) = 140$**
D (25,15)	**$Z = 6(25) + 2(15) = 180$**
E (30,10)	**$Z = 6(30) + 2(10) = 200$**
F (30,0)	**$Z = 6(30) + 2(0) = 180$**

.: الحل الامثل عند النقطة E

$Z = 200$ $X_1 = 30$ $X_2 = 10$

5- Ali Electric company produced two products H1 and H2. products are produced and sold on a weekly basis. The weekly production cannot exceed 25 for product H1 and 35 for product H2. Because of limited available facilities. The company employs total of 60 workers. Product H1 requires two man- weeks of labour while H2 requires one man – week of labour. Profit margin on H1 is $40 and H2 is $60. Formulate the problem as an Lp problem and solve for Maximum profit.

Solution: -

اولاً : الصياغة الرياضية للنموذج

Let define the following decision variables

X_1 = number of unit product H1

X_2 = number of unit product H2

Objective Function:

Max (Z) = $40X_1 + 60X_2$

Subject to the constraints:

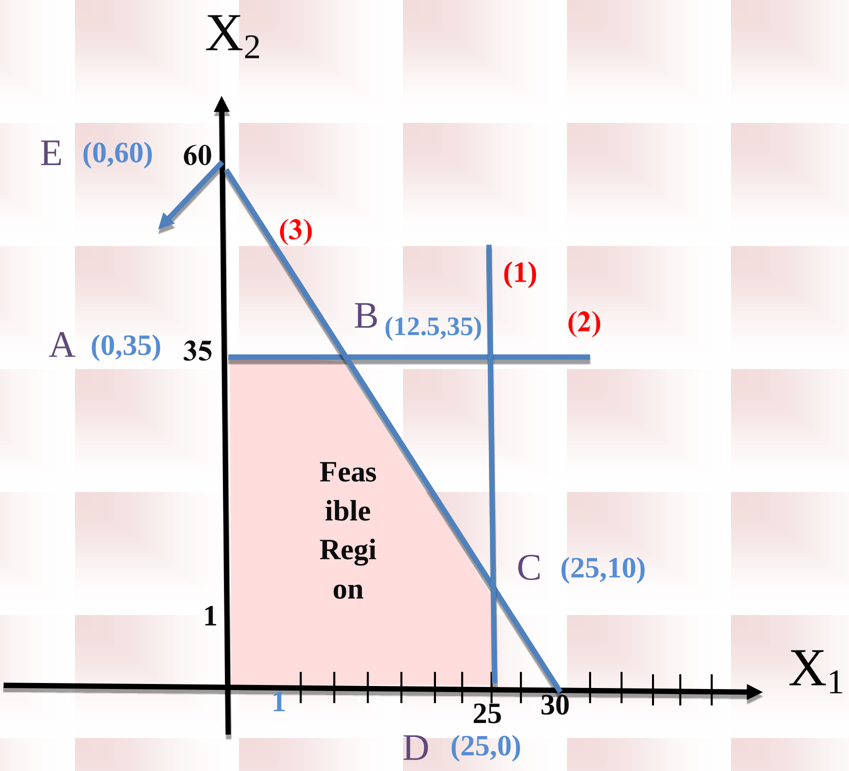
$X_1 \leq 25$ ………… (1)
$X_2 \leq 35$ ………….. (2)
$2X_1 + X_2 = 60$ …… (3)
$X_1, X_2 \geq 0$

ثانياً : تحويل المتباينات الى معادلات

$X_1 = 25$ ………… (1)
$X_2 = 35$ ………….. (2)
$2X_1 + X_2 = 60$ …… (3)

ثالثاً : رسم القيود بيانياً

Constraints	Points
$X_1 = 25$	(25,0)
$X_2 = 35$	(0,35)
$2X_1 + X_2 = 60$	(0,60) (30,0)



شكل (2-14)

رابعاً : تحديد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة الملائمة)

المنطقة الملائمة (Feasible Region) هي المنطقة التي تحقق كل القيود و هي المحددة بالنقاط A,B,C,D النقاط A و B معلومة.

نستخرج احداثيات النقطة B والتي تمثل تقاطع القيد الثالث مع القيد الثاني

$X_2 = 35$ ………….. (2)

$2X_1 + X_2 = 60$ …….. (3)

بتعويض قيمة X_2 في المعادلة (3)

$2X_1 + 35 = 60$

$\therefore\ X_1 = \dfrac{25}{2} = 12.5$

اي احداثيات B هي (12.5,35)

النقطة C هي تقاطع القيد (1) مع القيد (3)

$X_1 = 25$ ………….. (2)

$2X_1 + X_2 = 60$ …….. (3)

بتعويض قيمة X_1 في المعادلة (2)

$2(25) + X_2 = 60 \quad \rightarrow X_2 = 60 - 50 = 10$

∴ احداثيات C هي (25,10)

خامساً : تحديد الحل الامثل عن طريق تعويض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 60X_1 + 40X_2$
A (0,35)	**Z = 60(0) + 40(35) = 1400**
B (12.5,35)	**Z = 60(12.5) + 40(35) = 2150**
C (25,10)	**Z = 60(25) + 40(10) = 1900**
D (25,0)	**Z = 60(25) + 40(0) = 1500**

The optimum (Maximum) value is at the point B (12.5,35)

$X_1 = 12.5$ unit of product H1

$X_2 = 35$ unit of product H2

$Z = 2150$

6- **Ahmed Industry is making two products (P1) and (P2) the profit for (p1) (20) ID and (p2) (10) ID. each product pass through three machines is given below**

Product	Machine (1)	Machine (2)	Machine (3)
P1	1	3	4
P2	2	1	3
Total Time Available	40	30	60

The manager wants to know how many (p1) and (p2) would be made so that profit is max using graphical method.

Solution: -

اولاً : الصياغة الرياضية للنموذج

Let define the following decision variables

X_1 , X_2 = number of unit product p1 and p2 respectively

Objective Function:

$$Max\ (Z) = 20X_1 + 10X_2$$

Subject to:

$X_1 + 2X_2 \leq 40$ …………. (1)

$3X_1 + X_2 \leq 30$ ………... (2)

$4X_1 + 3X_2 \leq 60$……….. (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

ثانياً : تحويل المتباينات الى معادلات

Convert inequalities to equation

$X_1 + 2X_2 = 40$ …………. (1)

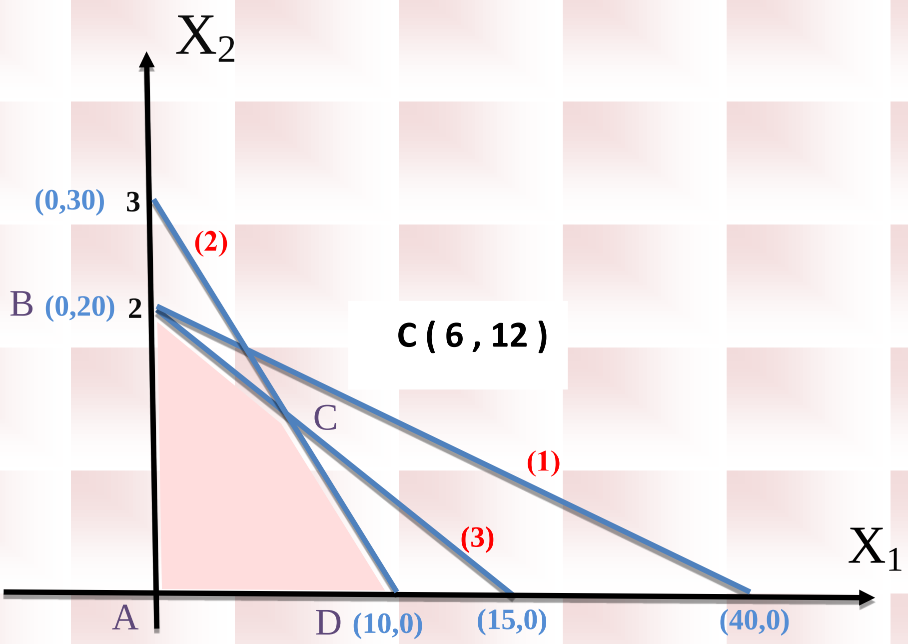
$3X_1 + X_2 = 30$ ………... (2)

$4X_1 + 3X_2 = 60$ ………. (3)

ثالثاً: Photo every equation an the diagram and determine the feasible region

Constraints القيــــد	Points نقاط التقاطع
$X_1 + 2X_2 = 40$	(0,20) (40,0)
$3X_1 + X_2 = 30$	(0,30) (10,0)
$4X_1 + 3X_2 = 60$	(0,20) (15,0)

رابعاً: تحديد منطقة الحل وهي المنطقة المظلله في الشكل (2-15)



شكل (2-15)

خامساً: تحديد الحل الامثل:

جميع نقاط التطرف معروفة باستثناء (C) والتي تمثل تقاطع القيد (3) مع القيد (2)

$3X_1 + X_2 = 30$ ………… (2)
$4X_1 + 3X_2 = 60$ ………… (3)

يضرب (2) بـ (3)

$9X_1 + 3X_2 = 90$ ………… (2)
$4X_1 + 3X_2 = 60$ ………… (3)

- بالطرح

$5X_1 = 30$

$\therefore X_1 = 6$

وبالتعويض في (3)

$4(6) + 3X_2 = 60 \quad \rightarrow X_2 = \frac{36}{3} = 12$

$\therefore$ النقطة C (6,12)

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 20X_1 + 10X_2$
A (0,0)	**Z = 20(0) + 10(0) = 0**
B (0,20)	**Z = 20(0) + 10(20) = 200**
C (6,12)	**Z = 20(10) + 10(12) = 240**
D (10,0)	**Z = 20(10) + 10(0) = 200**

The Maximum Value Z = 240 occurs at the point (C) (6,12)

7- **Use the graphical method to solve the following L.P. problem**

Maximize = $10X_1 + 15X_2$

Subject to the constraints:

$2X_1 + X_2 \leq 26$............. (1)

$2X_1 + 4X_2 \leq 56$ .... (2)

$-X_1 + X_2 \leq 5$ .... (3)

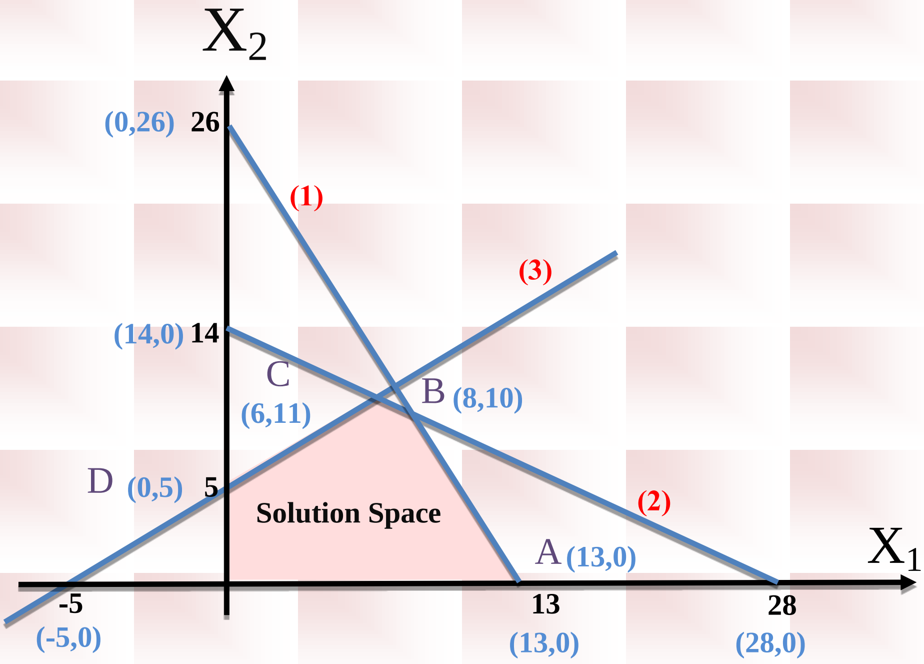
$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

اولاً: تحديد نقاط تقاطع القيود بالمحورين

Constraints	Points
$2X_1 + X_2 = 26$	**(0, 26)** **(13, 0)**
$2X_1 + 4X_2 = 56$	**(0, 14)** **(28, 0)**
$-X_1 + X_2 = 5$	**(0, 5)** **(-5, 0)**

ثانياً: رسم القيود بيانياً وتحديد منطقة الامكانيات المتاحة



ينتج من الشكل البياني ان منطقة الحلول الممكنة هي A,B,C,D وبالنظر لعدم تحديد احداثيات للنقاط C و B تستخرج هذه النقاط كما يلي:

النقطة C تمثل تقاطع القيدين (3) و (2)

$$2X_1 + 4X_2 = 56 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$
$$-X_1 + X_2 = 5 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

نضرب المعادلة (3) بـ (2) فينتج

$$-2X_1 + 2X_2 = 10$$

نجمع المعادلة الجديدة مع المعادلة (2) فينتج

$$2X_1 + 4X_2 = 56 \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$
$$-2X_1 + 2X_2 = 10$$

$$6X_2 = 66$$
$$X_2 = \frac{66}{6} = 11$$

بالتعويض في المعادلة (3)

$$-X_1 + 11 = 5$$
$$X_1 = 11 - 5$$
$$X_1 = 6$$

∴ احداثيات النقطة C هي (6,11)

استخراج احداثيات النقطة B رياضياً:

B تمثل تقاطع القيدين (1) و (2)

$2X_1 + X_2 = 26$ .... (1)
$2X_1 + 4X_2 = 56$............ (2)

يطرح (1) من (2)

$3X_2 = 30$

$\therefore X_2 = \frac{30}{3} = 10$

بالتعويض في المعادلة (1)

$2X_1 + 10 = 26$
$2X_1 = 16$
$X_1 = \frac{16}{2}$

∴ احداثيات النقطة B هي (8,10)

ثالثاً: نعوض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف فينتج مايلي :

Extreme Points نقاط التطرف	**Objective Function $Z = 10X_1 + 15X_2$**
A (13, 0)	**Z = 10(13) + 15(0) = 130**
B (8, 10)	**Z = 10(8) + 15(10) = 230**
C (6, 11)	**Z = 10(6) + 15(11) = 225**
D (0, 5)	**Z = 10(0) + 15(5) = 75**

اكبر قيمة لدالة الهدف عند النقطة (B) لذا فأن الحل الامثل للنموذج يقع في هذه النقطة و القيمة المثلى لـ Z هي (230) $X_1 = 8, X_2 = 10$

8- Use the graphical method to solve the following L.P. problem

Minimize $(Z) = -X_1 + 4X_2$

Subject to the constraints:

$-3X_1 + X_2 \leq 6$............ (1)
$X_1 + 2X_2 \leq 4$ .... (2)
$X_2 \leq -3$ ....(3)

Solution: -

اولاً : تحويل المتباينات الى معادلات

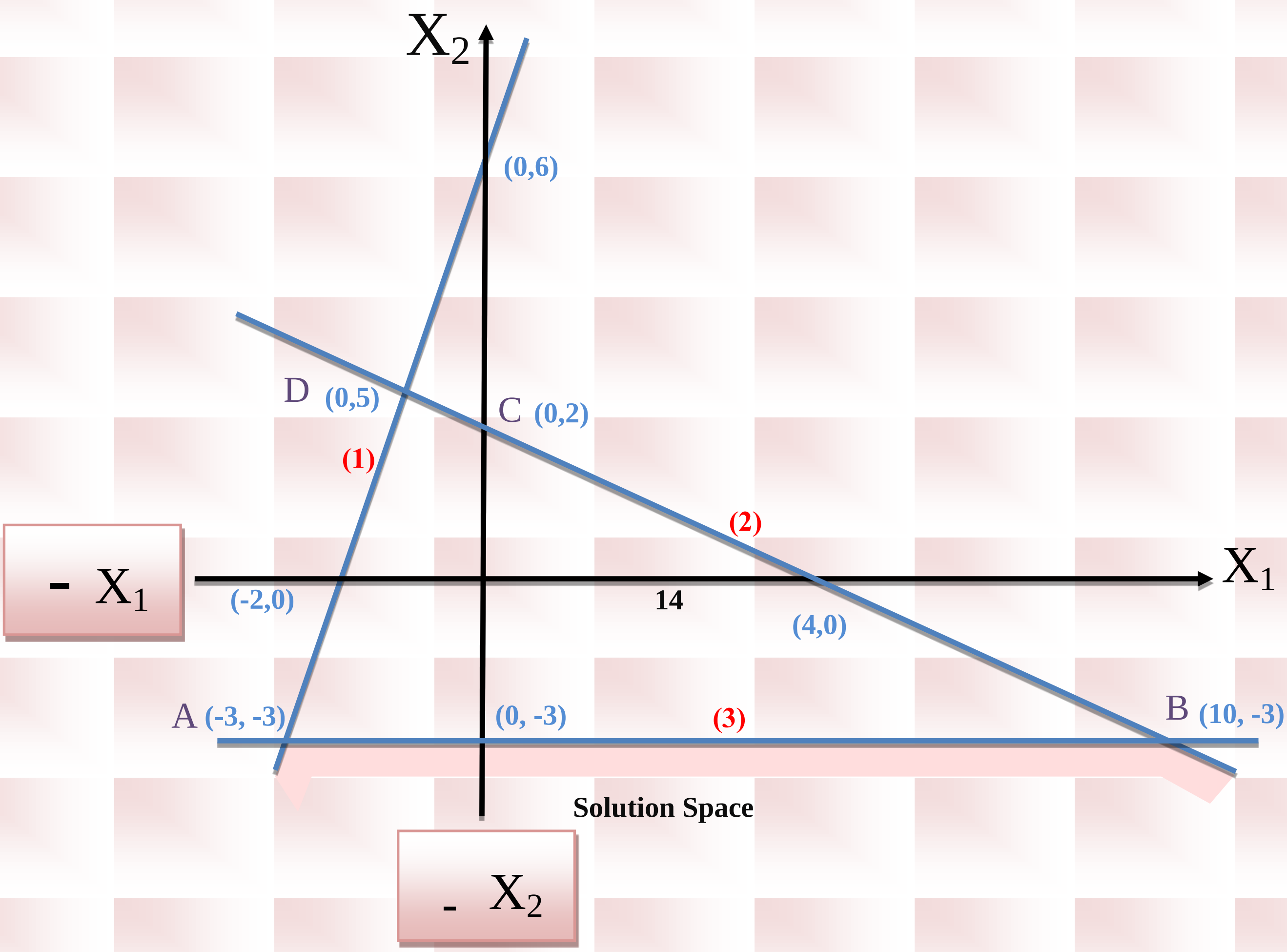
$-3X_1 + X_2 = 6$............. (1)

$X_1 + 2X_2 = 4$ .... (2)

$X_2 = -3$ ....(3)

ثانياً : رسم القيود بيانياً

Constraints	Points
$-3X_1 + X_2 = 6$	(0, 6) (-2, 0)
$X_1 + 2X_2 = 4$	(0, 2) (4, 0)
$X_2 = -3$	(0, -3)



نستخرج احداثيات النقاط المجهولة (A) و (B)

A هي تقاطع القيد (1) مع القيد (3)

من القيد (3) $X_2 = -3$

نعوض في (1)

$-3X_1 + (-3) = 6$ …. (1)

$-3X_1 = 9$

$\therefore X_1 = -3$

∴ احداثيات A هي (-3,-3)

ايجاد احداثيات النقطة B و هي تمثل تقاطع القيدين (2) و(3)

من القيد (3) $X_2 = -3$

بالتعويض في القيد (2)

$X_1 + 2(-3) = 4$

$X_1 = 10$

∴ احداثيات B هي (10,-3)

ثالثاً: تحديد منطقة الحلول

منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة في الشكل اعلاه

ثانياً: نعوض نقاط التطرف (اركان منطقة الحلول الممكنة) في دالة الهدف لنجد قيمتها عند كل نقطة

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = -X_1 + 4X_2$
A (-3, -3)	**$Z = -1(-3) + 4(-3) = -9$**
B (10, -3)	**$Z = -1(10) + 4(-3) = -22$**

اقل قيمة لدالة الهدف = (-22)

The minimum value of objective function = -22

9- **Solve the following L.P. problem graphical**

Minimize (Z) = $-X_1 + 2X_2$

Subject to the constraints:

$X_1 - X_2 \leq -1$ .... (1)

$-0.5X_1 + X_2 \leq 2$ .... (2)

$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

Since resource value (R.H.S) of the first constraint is negative, multiplying both side of this constraint by (-1)

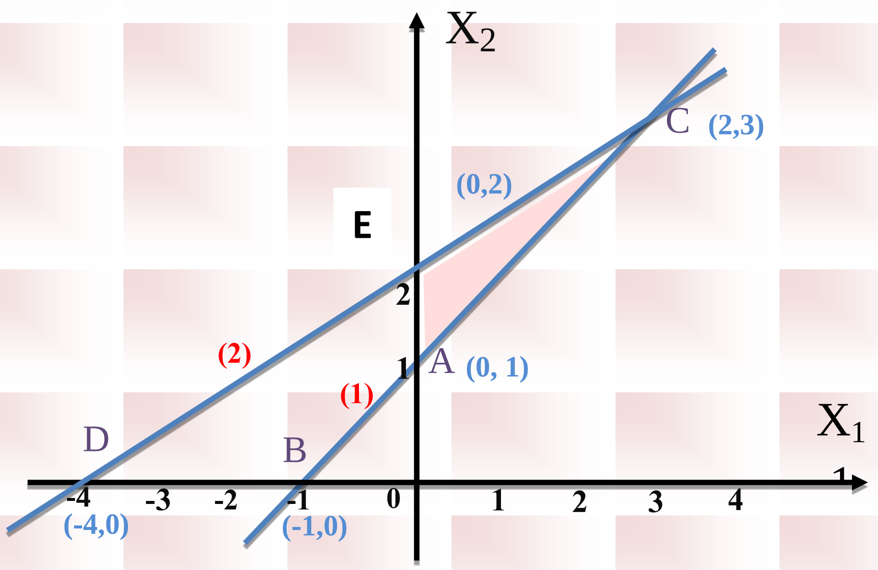
بالنظر لكون الجانب الايمن القيد الاول (الموارد سلبية) لذا تضرب الطرفين للقيد بـ (-1) فيصبح القيد الاول فيتحول القيد من اقل من او يساوي الى اكبر من او يساوي

$-X_1 + X_2 \geq 1$ .... (1)

اولاً: نجد تقاطع القيود في المحاور (X_2,X_1)

Constraints	Points
$-X_1 + X_2 = 1$	(0, 1) (-1, 0)
$-0.5X_1 + X_2 = 2$	(0, 2) (-4, 0)

ثانياً: نرسم القيود وكما يلي في الشكل



من الشكل يتضح ان منطقة الحلول الممكنة (Feasible Space) هي المنطقة المظللة A,C,E ولإيجاد احداثيات النقطة C رياضياً نتبع ما يلي :

النقطة C تقع عند تقاطع القيدين (1) و (2) لذا تقاطع المعادلتين كما يلي:

$$-X_1 + X_2 = 1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$
$$-0.5X_1 + X_2 = 2 \; \ldots\ldots\ldots \; (2)$$

من المعادلة (1)

$$X_2 = 1 + X_1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (3)$$

نعوض في المعادلة (2)

$$-0.5X_1 + (1 + X_1) = 2$$
$$-0.5X_1 + X_1 = 1$$
$$0.5X_1 = 1$$
$$\therefore X_1 = \frac{1}{0.5} = 2$$

نعوض في المعادلة (3)

$$X_2 = 1 + 2 = 3$$

∴ احداثيات النقطة C (2,3)

ثالثاً: نعوض احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف :

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = -1X_1 + 2X_2$
A (0, 1)	$Z = -1(0) + 2(1) = 2$
E (0, 2)	$Z = -1(0) + 2(2) = 4$
C (2, 3)	$Z = -1(2) + 2(3) = 4$

The Maximum value of objective function Z = 4 occurs at extreme point between E and C on the line C E also give the same value of Z hence problem has multiple optimal solutions and Max Z = 4

اعلى قيمة لدالة الهدف موجودة في الخط الواصل بين النقطتين C,E هذا يعني جميع نقاط هذا الخط تمثل حلول مثلى و هذه الحالة تمثل (تعدد الحلول المثلى)

10- **The ABC company has been producer of picture tubes for television sets and certain printed circuits for radios. The company has just expanded in to full scale production and marketing of Am and Am-FM radios. It has built a new plant that can operate 48 hours per week – production of an Am radio in the new plant will require 2 hours and production of all Am – FM radio will require 3 hours. Each Am radio will contribute $40 to profits while an Am - FM radio will contribute $80 to profit. The market department, after extensive research has determined that a Maximum of (15) Am radios and (10) Am -FM radios can be sold each week.**

A: Formulate a linear programming model to determine the optimum production Mix of Am radios that will maximize profits.

B: Solve the above problem using the graphical method.

شركة ABC تنتج picture tubes للتلفزيون و certain printed للراديوات الشركة ابدأت تواً في انتاج وتسويق راديوات Am و Am -FM وقد انشات مصنع جديد يمكن ان يعمل 48 ساعة كل اسبوع انتاج راديو Am في المصنع الجديد سوف يتطلب 2 ساعة اما FM – Am فيتطلب 3 ساعة كل راديو يساهم في الارباح فالنوع Am يساهم بـ 40 لكل وحده منتجة اما النوع FM – Am فيساهم بـ 80 لكل وحدة منتجة قسم الانتاج اجرى بحوث مستمرة بعدها تقرر ان اقصى ما يمكن تسويقه من انتاج نوع Am هو 15 وحدة والنوع – Am FM هو 10 وحدة اسبوعياً .

A: اوجد النموذج الرياضي لتحديد مزيج الانتاج الامثل لتحقيق اعظم الارباح.

B: استخدم الطريقة البيانية لإيجاد حل للمشكلة.

Solution: -

Let us define the following decision variable

X_1, X_2 = number of units of Am and Am – FM radio respectively

لنفترض X_1, X_2 عدد الوحدات المنتجة من Am و Am – FM على التوالي

Then LP model of the given problem is: نموذج البرمجة الخطية للمشكلة

Maximize (total profit) $Z = 40X_1 + 80X_2$

Subject to the constraints:

$2X_1 + 3X_2 \leq 48$ …………. (1)

$X_1 \leq 15$ …………………. (2)

$X_2 \leq 10$ ……………...……. (3)

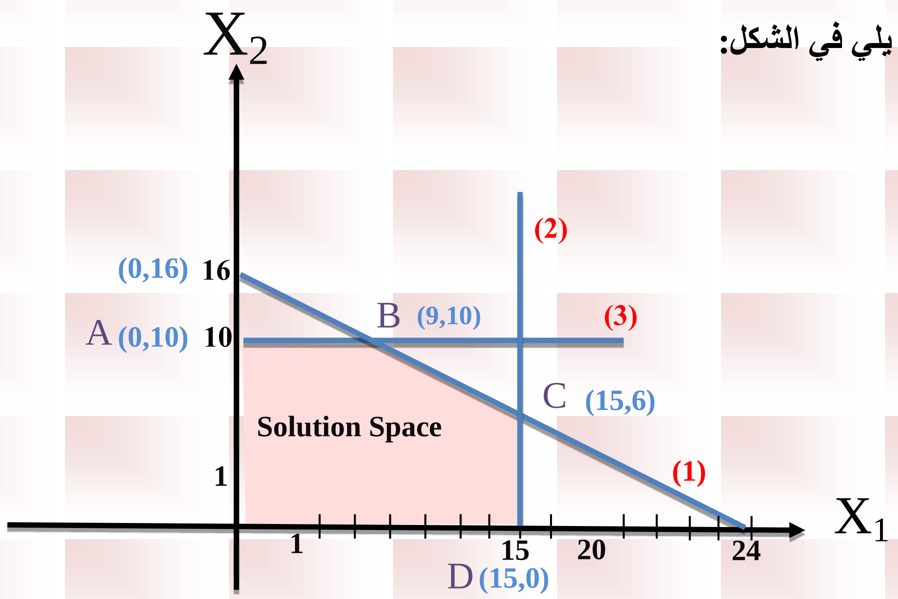
$X_1, X_2 \geq 0$

لرسم النموذج وتحديد الحل الامثل نتبع ما يلي:

اولاً: نحدد نقاط تقاطع القيدين بالمحورين وكما يلي:

Constraints	Points
$2X_1 + 3X_2 = 48$	(0, 16) (24,0)
$X_1 = 15$	(15,0)
$X_2 = 10$	(0,10)

ثانياً: نرسم القيود وكما يلي في الشكل:



ثالثاً: من خلال الرسم البياني يتضح ان منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة.

رابعاً: نجد احداثيات النقاط المجهولة وكما يلي:

B : تمثل تقاطع القيدين (3) والقيد (1)

من القيد (3)

$X_2 = 10$ ………………… (3)

نعوض في المعادلة (1)

$2X_1 + 3(10) = 48$

$2X_1 = 18$

$\therefore X_1 = \frac{18}{2} = 9$

$\therefore$ B (9, 10)

∴ احداثيات النقطة B (9,10)

C : تمثل تقاطع القيدين (2) والقيد (1) ولاستخراج احداثياتها تقاطع المعادلتين:

من المعادلة (2)

$X_1 = 15$………………… (2)

نعوض في المعادلة (1)

$2(15) + 3X_2 = 48$

$30 + 3X_2 = 48$

$3X_2 = 18$

$\therefore X_2 = 6$

∴ احداثيات النقطة C (15,6)

خامساً: تعوض جميع نقاط اركان منطقة الحلول الممكنة (نقاط التطرف) في معادلة دالة الهدف:

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 40X_1 + 80X_2$
A (0, 10)	**Z = 40(0) + 80(10) = 800**
B (9, 10)	**Z = 40(9) + 80(10) = 1160**
C (15, 6)	**Z = 40(15) + 80(6) = 1080**
D (15, 0)	**Z = 40(15) + 80(0) = 600**

بالنظر لكون دالة الهدف تكون قيمتها اكبر ما يمكن عند النقطة B لذا فأن الحل الامثل كما يلي:

Maximum Z = 1160

$X_1 = 9$

$X_2 = 10$

11- Solve the following L.P problem graphically:

Minimize (Z) = $3X_1 + 2X_2$

$5X_1 + X_2 \geq 10$ …………. (1)

$X_1 + X_2 \geq 6$ ……………. (2)

$X_1 + 4X_2 \geq 12$ …………. (3)

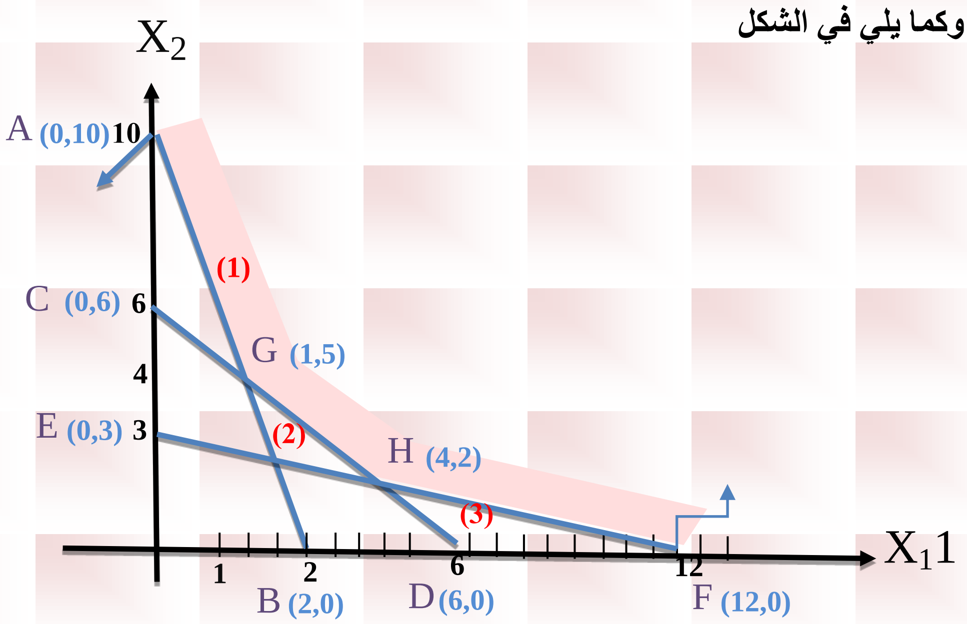
$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

اولاً: نحدد تقاطع القيود بالمحورين وكما يلي :

Constraints	Points
$5X_1 + X_2 = 10$	A (0,10) B (2,0)
$X_1 + X_2 = 6$	C (0,6) D (6,0)
$X_1 + 4X_2 = 12$	E (0,3) F (12,0)

ثانياً: نرسم القيود وكما يلي في الشكل



منطقة الحلول المثلى هي المنطقة المظللة كما في الشكل ولإيجاد احداثيات النقطة نجد احداثيات النقطة G تقاطع المعادلتين (1) و (2)

$5X_1 + X_2 = 10$ …………. (1)

$X_1 + X_2 = 6$ .... (2)

يطرح (2) من (1) ينتج

$4X_1 = 4$

$\therefore X_1 = 1$

نعوض في المعادلة (2)

$X_2 = 5$

∴ احداثيات النقطة G (1,5)

النقطة H تقاطع المعادلتين (2) و (3)

$X_1 + X_2 = 6$ .... (2)

$X_1 + 4X_2 = 12$ .... (3)

يطرح (2) من (3) ينتج

$3X_2 = 6$

$$X_2 = \frac{6}{3} = 2$$

نعوض في المعادلة (2)

$\therefore X_1 = 4$

∴ احداثيات النقطة H (4,2)

نعوض احداثيات نقاط اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف فينتج ما يلي:

Extreme Points نقاط التطرف	**Objective Function $Z = 3X_1 + 2X_2$**
A (0, 10)	**Z = 3(0) + 2(10) = 20**
G (1, 5)	**Z = 3(1) + 2(5) = 13**
H (4, 2)	**Z = 3(4) + 2(2) = 16**
F (12, 0)	**Z = 3(12) + 2(0) = 36**

اقل قيمة لدالة الهدف عند النقطة G

The optimum solution is $X_1 = 1$, $X_2 = 5$ and the Min Z = 13

12- **Use the graphical method to solve the following L.P problem:**

Minimize (Z) = $-X_1 + 2X_2$

Subject to the constraints:

$-X_1 + 3X_2 \leq 10$ .... **(1)**

$X_1 + X_2 \leq 6$ .... **(2)**

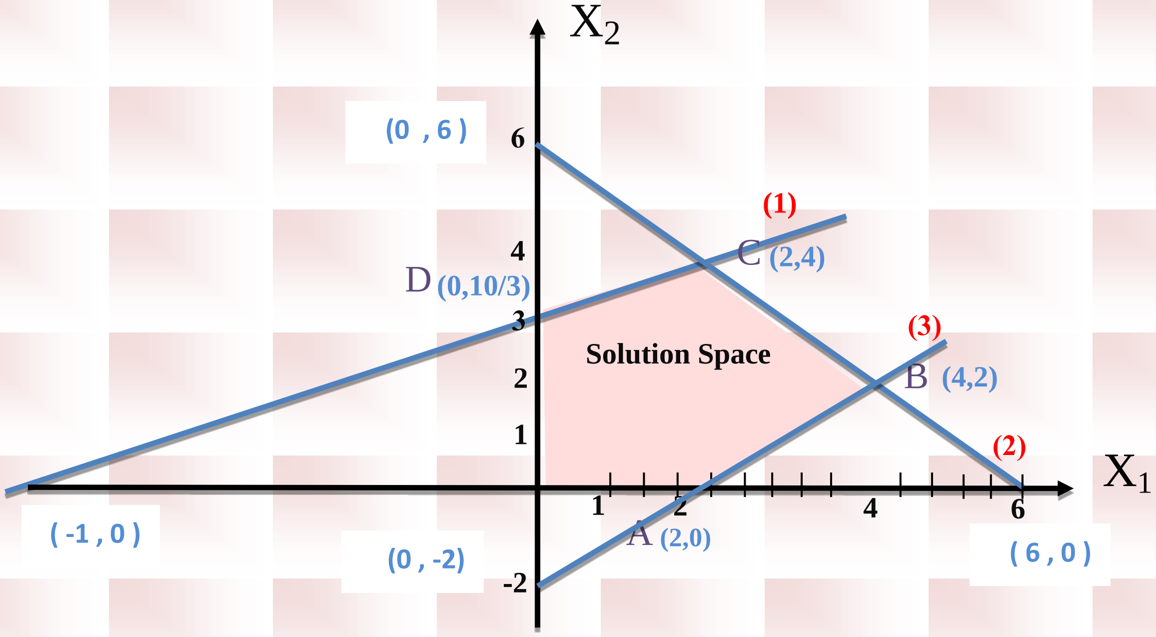
$X_1 - X_2 \geq 2$ .... **(3)**

$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

Constraints	Points
$-X_1 + 3X_2 = 10$	$(0, \frac{10}{3})$ $(-10, 0)$
$X_1 + X_2 = 6$	$(0, 6)$ $(6, 0)$
$X_1 - X_2 = 2$	$(0, -2)$ $(2, 0)$

لرسم القيود بيانياً نحدد نقاط تقاطعهما بالمحورين وكمايلي :



من خلال الرسم البياني يتضح ان المنطقة المظللة هي منطقة الحلول الممكنة نستخرج الاركان المجهولة وكما يلي :

C : يمثل تقاطع المعادلة (1) و(2)

$-X_1 + 3X_2 = 10$ .... (1)
$X_1 + X_2 = 6$ .... (2)

بالجمع

$0 + 4X_2 = 16$

$\therefore X_2 = 4$

نعوض في المعادلة (2)

$X_1 + X_2 = 6$ .... (2)

$X_1 + 4 = 6$

$\therefore X_1 = 2$

∴ احداثيات النقطة C (2,4)

B: تقاطع القيدين (3) و (2)

$X_1 + X_2 = 6$ .... (2)
$X_1 - X_2 = 2$ .... (3)

بالجمع

$2X_1 = 8$

$\therefore X_1 = 4$

نعوض في المعادلة (2)

$4 + X_2 = 6$ .... (2)

$X_2 = 6 - 4 = 2$

$\therefore X_2 = 2$

∴ احداثيات النقطة B (4,2)

$-X_1 + 3X_2 = 10$ .... (1)

$X_2 = \frac{10}{3}$

∴ احداثيات النقطة D $(0, \frac{10}{3})$

نعوض اركان منطقة الحلول الممكنة في معادلة دالة الهدف فينتج مايلي :

Extreme Points نقاط التطرف	**Objective Function $Z = -X_1 + 2X_2$**
A (2, 0)	$Z = -1(2) + 2(0) = -2$
B (4, 2)	$Z = -1(4) + 2(2) = 0$
C (2, 4)	$Z = -1(2) + 2(4) = 6$
D $(0, \frac{10}{3})$	$Z = -1(0) + 2(\frac{10}{3}) = \frac{20}{3}$

The Minimum value of the objective Function Z = -2 occur at the extreme point A (2, 0)

13- A diet Food for sick person must contain at last 4000 units of vitamins 50 units of minerals and 1400 calories two food A and B available at a cost $4 and $3 per unit, respectively. If one of A contain 200 unit of vitamin. 1 unit of mineral and 40 calories and one unit of food B contain 100 units of vitamin, 2 units of mineral and 40 calories find by graphic method what combination of foods be used to have least cost?

غداء (دايت) للمرضى يجب ان يتكون كحد ادنى 4000 من الفيتامينات و 50 وحدة من المعادن و 1400 من السعرات الحرارية . هناك نوعين من المواد الغذائية متوفرة بأقل التكاليف. ID (3) للنموذج A وID (4) للنموذج B. إذا كان الوحدة الواحدة من Aتتكون من 200 وحدة من الفيتامينات و (1) وحده من العناصر المعدنية و40 من السعرات الحرارية والمنتوج B يتكون من 100 وحده من الفيتامينات. (2) وحده من العناصر المعدنية , 40 وحده السعرات الحرارية اوجد التشكيلة المواد الغذائية التي تستخدم لتقليل التكاليف مستخدماً الطريق البيانية؟

Solution: -

The data of the given problem can be summarized as shown follows

البيانات للمشكلة يمكن تلخيصها كما يلي:

المادة الغذائية Food	الوحدة تتكون من Unite Content of			تكلفة الوحدة Cost per unit (R.S)
	Vitamin	**Mineral**	**Calories**	
A	**200**	**1**	**40**	**3**
B	**100**	**2**	**40**	**4**
اقل ما يمكن من الاحتياجات Minimum Requirement	**4000**	**50**	**1400**	

نفرض ان X_1 عدد الوحدات من المادة الغذائية A

نفرض ان X_2 عدد الوحدات من المادة الغذائية B

النموذج الرياضي للمشكلة

L.P model of the given problem

Minimize (total cost) $Z = 4X_1 + 3X_2$

Subject to constraints:

$200X_1 + 100X_2 \geq 4000$ .... (1)

$X_1 + 2X_2 \geq 50$ .... (2)

$40X_1 + 40X_2 \geq 1400$ .... (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

1. نحدد تقاطع القيود مع المحورين وكما يلي:

Constraints	Points
$200X_1 + 100X_2 = 4000$	(0, 40) (20, 0)
$X_1 + 2X_2 = 50$	(0, 25) (50, 0)
$40X_1 + 40X_2 = 1400$	(0, 35) (35, 0)

2. استخراج احداثيات اركان منطقة الحلول الممكنة

$200X_1 + 100X_2 = 4000$ .... (1)

$40X_1 + 40X_2 = 1400$ .... (3)

بقسمة المعادلة (1) على (5)

$40X_1 + 20X_2 = 800$ .... (1)

$40X_1 + 40X_2 = 1400$ .... (3)

بطرح (1) من (3)

$20X_2 = 600$

$\therefore X_2 = 30$

بالتعويض في (3)

$40X_1 + 20(30) = 800$

$40X_1 + 600 = 800$

$\therefore X_1 = \frac{200}{40} = 5$

∴ احداثيات النقطة B هي (5,30)

$X_1 + 2X_2 = 50$ ……………. (2)

$40X_1 + 40X_2 = 1400$ ……… (3)

بقسمة المعادلة (1) على 5

$2X_1 + 2X_2 = 70$ ……………. (3)

بطرح (1) من (3)

$\therefore X_1 = 20$

بالتعويض في (1)

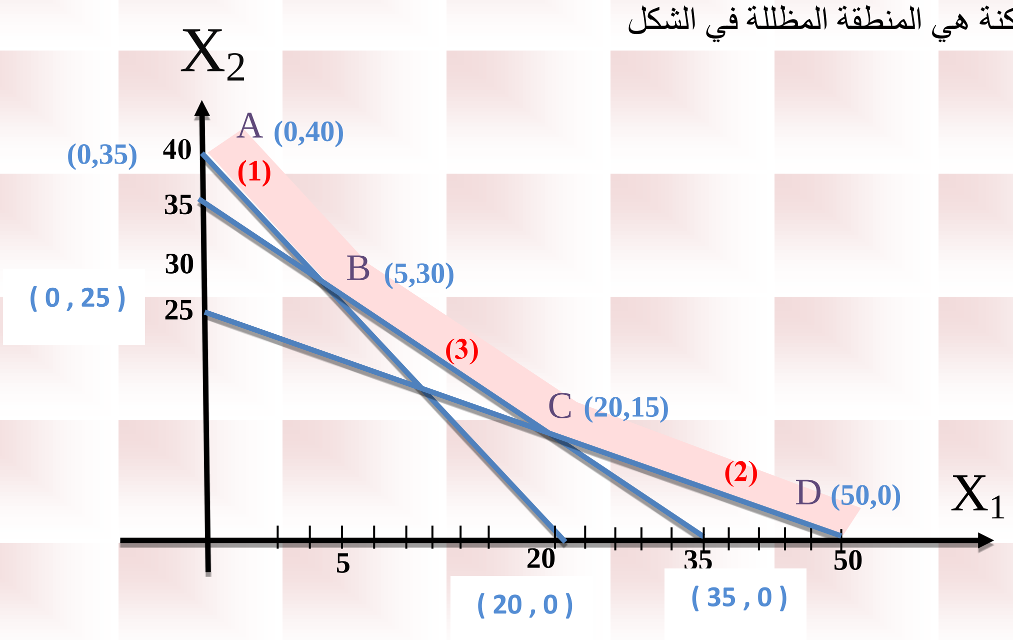
$20 + 2X_2 = 50$

$2X_2 = 30$

$\therefore X_2 = 15$

∴ احداثيات النقطة C (20,15)

منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة في الشكل



اركان منطقة الحلول الممكنة هي A,B,C,D

نعوض اركان منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف وكما يلي :

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 4X_1 + 3X_2$
A (0, 40)	Z = 4(0) + 3(40) = 120
B (5, 30)	Z = 4(5) + 3(30) = 110
C (20, 15)	Z = 4(20) + 3(15) = 125
D (50, 0)	Z = 4(50) + 30 = 230

The optimum cost At B (5 , 30)

Z= 110

14- A Firm is engaged in breeding sheep's. The sheep's are fed on various products grown on the farm. In view of the need to ensure certain nutrient constituents (call them X, Y and Z), it is necessary to buy two additional products, say, A and B. One unit of product B contain 6 units of X and 10 units of Y, the minimum requirement of X, Y and Z is 108 units, 36 unit and 100 units respectively. Product A costs, Rs. 20 per unit and product B, Rs. 40 per unit. Formulate this problem as a LP problem to minimize the total cost, and solve the problem by using graphical method.

شركة لتربية وتكاثر الاغنام. الغنم يغذى بمنتجات مختلفة ولضمان توافر عناصر طبيعية والتي تعتبر من المكونات الغذائية الضرورية . ويجب شراء نوعين اضافيين من المنتجات تدعى A و B الوحدة من المنتوج A تتكون من 36 وحدة من X و3 وحدة من Y و 3 وحدة من Z الوحدة من المنتوج B تتكون من 6 وحدات من X و 12 وحدة من Y و 10 وحدة من Z والحد الادنى من الاحتياجات من X و Y و Z هي 108 وحدة و 36 و100 على التوالي . تكلفة المنتوج A 20 لكل وحدة والمنتوج B 40 . المطلوب ايجاد الصياغة الرياضية للمشكلة بهيئة نموذج برمجة خطية لتقليل التكاليف وحله بالطريقة البيانية.

Solution: -

The data of the given problem can be summarized as shown follows

البيانات للمشكلة يمكن تلخيصها كما يلي:

المنتجات Product	Type of nutrient constituents			Cost product
	X	Y	Z	
A	36	3	20	20
B	6	12	10	40
اقل ما يمكن من الاحتياجات Minimum Requirement	108	36	100	

نفرض ان X_1 كمية الانتاج من A

نفرض ان X_2 كمية الانتاج من B

النموذج الرياضي للمشكلة

L.P model of the given problem

Minimize (total cost) $Z = 20X_1 + 40X_2$

Subject to constraints:

$36X_1 + 6X_2 \geq 108$ ……….. (1)

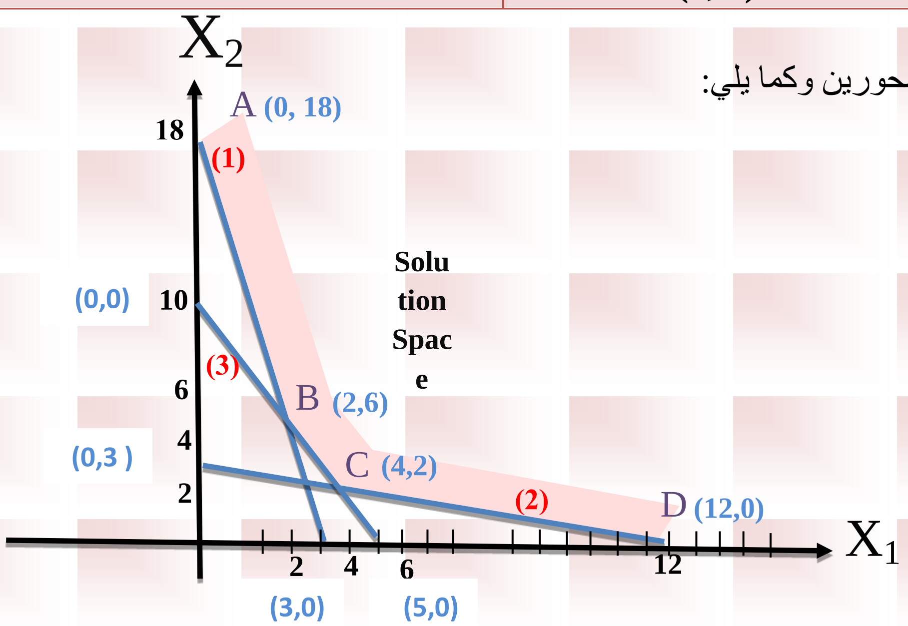
$3X_1 + 12X_2 \geq 36$…………. (2)

$20X_1 + 10X_2 \geq 100$ ……... (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

Constraints	Points
$36X_1 + 6X_2 = 108$	(0, 18) (3, 0)
$3X_1 + 12X_2 = 36$	(0, 3) (12, 0)
$20X_1 + 10X_2 = 100$	(0, 10) (5, 0)

نحدد تقاطع القيود مع المحورين وكما يلي:



نلاحظ ان المنطقة المظلله هي منطقة الحلول الممكنة واركانها A و D معلومة الاحداثيات اما B و C فهي مجهولة لذا نستخرج احداثياتها بتقاطع القيود وكما يلي :

استخراج احداثيات النقطة B والتي تمثل تقاطع القيدين (1) و (3)

$36X_1 + 6X_2 = 108$ .... (1)

$20X_1 + 10X_2 = 100$ .... (2)

من معادلة رقم (2)

$10X_2 = 100 - 20X_1$

$\therefore X_2 = \frac{100-20X_1}{10} = 10 - 2X_1$ .... (3)

نعوض في المعادلة (1)

$36X_1 + 6(10 - 2X_1) = 108$

$36X_1 + 60 - 12X_1 = 108$

$24X_1 = 48$

$\therefore X_1 = \frac{48}{24} = 2$

نعوض في المعادلة (3)

$X_2 = 10 - 2X_1$

$X_2 = 10 - 2(2)$

$\therefore X_2 = 6$

$\therefore$ احداثيات النقطة B (2,6)

استخراج احداثيات النقطة C والتي تمثل تقاطع القيدين (2) و (3)

$3X_1 + 12X_2 = 36$ .... (2)

$20X_1 + 10X_2 = 100$ .... (3)

من المعادلة (2)

$3X_1 = 36 - 12X_2$

$X_1 = \frac{36-12X_2}{3}$

$\therefore X_1 = 12 - 4X_2$

نعوض في المعادلة (3)

$20(12 - 4X_2) + 10X_2 = 100$

$240 - 80X_2 + 10X_2 = 100$

$240 - 70X_2 = 100$

$240 - 100 = 70X_2$

$140 = 70X_2$

$\therefore X_2 = 2$

نعوض في المعادلة (2)

$3X_1 + 12(2) = 36$

$3X_1 + 24 = 36$

$X_1 = \frac{12}{3} = 4$

$\therefore X_1 = 4$

∴ احداثيات النقطة C (4,2)

بعد ان اصبحت جميع النقاط معلومة نعوض احداثياتها في دالة الهدف:

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 20X_1 + 40X_2$
A (0, 18)	**Z = 20(0) + 40(18) = 720**
B (2, 6)	**Z = 20(2) + 40(6) = 280**
C (4, 2)	**Z = 20(4) + 40(2) = 160**
D (12, 0)	**Z = 20(12) + 40(0) = 240**

The Minimum objective Function occur at the extreme point C (4, 2) the optimum value =160

15- Use the graphical method to solve the following L.P. problem

Maximize (Z) = $10X_1 + 20X_2$

Subject to the constraints:

$X_1 + X_2 \leq 30$ ………… (1)

$X_2 \leq 3$ ……………….... (2)

$0 \leq X_2 \leq 12$ …………..... (3)

$0 \leq X_1 \leq 20$ …………..... (4)

$X_1 - X_2 \geq 0$ ……….....…. (5)

$X_1, X_2 \geq 0$

Solution: -

اولاً: تحويل المتباينات الى قيود

$X_1 + X_2 = 30$ ………… (1)

$X_2 = 3$ ……………….... (2)

$0 \leq X_2 = 12$ …………..... (3)

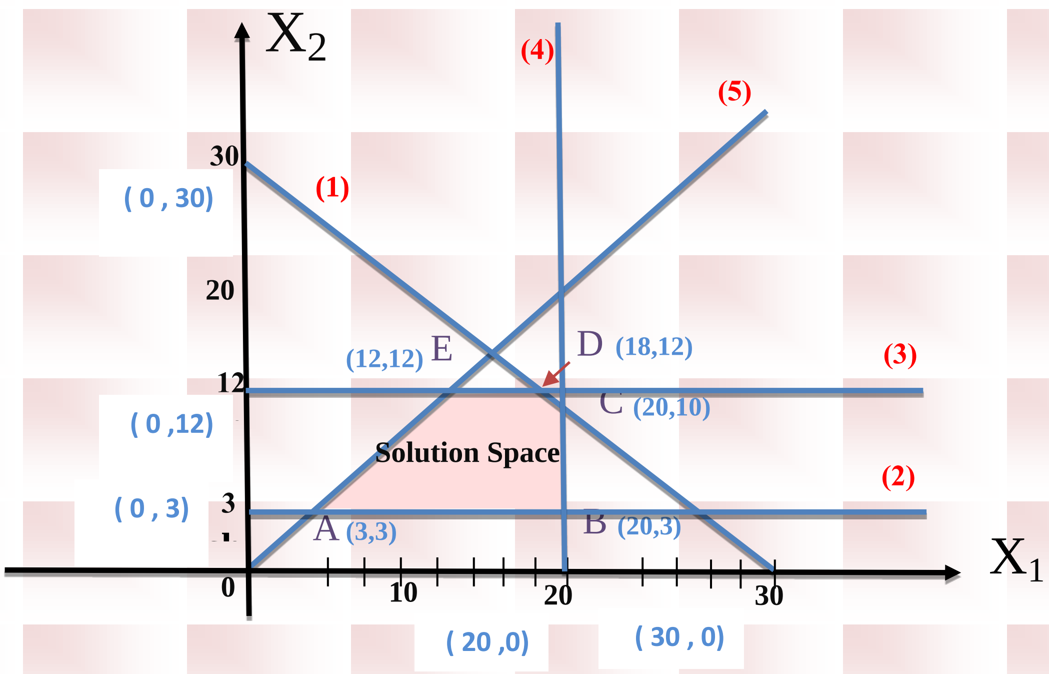
$0 \leq X_1 = 20$ …………..... (4)

$X_1 - X_2 = 0$ ……….....…. (5)

ثانياً: نحدد تقاطع القيود بالمحورين

Constraints	Points
$X_1 + X_2 = 30$	(0, 30) (30, 0)
$X_2 = 3$	(0, 3)
$X_2 = 12$	(0, 12)
$X_1 = 20$	(20, 0)
$X_1 - X_2 = 0$	(0, 0)

ثالثاً: نرسم القيود بيانياً



رابعاً : تحديد المنطقة الملائمة او منطقة الحلول الممكنة A,B,C,D,E المظللة

خامساً: ايجاد احداثيات نقاط التطرف Extreme points المجهولة

النقطة A تمثل تقاطع القيدين (2) و (5)

$X_2 = 3$ .... (2)

$X_1 - X_2 = 0$ .... (5)

نعوض قيمة X2 في المعادلة (5)

$X_1 - 3 = 0$

$\therefore X_1 = 3$

∴ احداثيات النقطة A (3 , 3)

النقطة B والتي تمثل تقاطع القيدين (2) و (3)

$X_2 = 3$

$X_1 = 20$

∴ احداثيات النقطة B (20 , 3)

النقطة C والتي تمثل تقاطع القيدين (1) و (4)

$X_1 + X_2 = 30$ .... (1)

$X_1 = 20$ .... (4)

نعوض في المعادلة (1)

$20 + X_2 = 30$

$\therefore X_2 = 10$

∴ احداثيات النقطة C (20,10)

النقطة D والتي تمثل تقاطع القيدين (3) و (1)

$X_1 + X_2 = 30$ .... (1)

$X_2 = 12$ .... (3)

نعوض في المعادلة (1)

$X_1 + 12 = 30$

$\therefore X_1 = 18$

∴ احداثيات النقطة D (18,12)

النقطة E والتي تمثل تقاطع القيدين (5) و (3)

$X_1 - X_2 = 0$ .... (5)

$X_2 = 12$ .... (3)

نعوض في المعادلة (5)

$X_1 - 12 = 0$

$\therefore X_1 = 12$

$\therefore$ احداثيات النقطة E (12,12)

سادساً: بتعويض نقاط التطرف في دالة الهدف فينتج:

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 10X_1 + 20X_2$
A (3, 3)	**Z = 10(3) + 20(3) = 90**
B (20, 3)	**Z = 10(20) + 20(3) = 260**
C (20, 10)	**Z = 10(20) + 20(10) = 400**
D (18, 12)	**Z = 10(18) + 20(12) = 420**
E (12, 12)	**Z = 10(12) + 20(12) = 360**

The Maximum value of the objective Function Z = 420 occur at the extreme point D (18, 12)

7-2 الحالات الخاصة لنموذج البرمجة الخطية

اولا : الحل غير المحدود (Unbounded Solution)

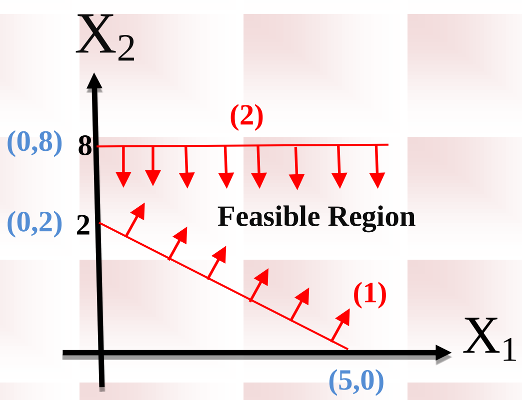
و هنا تكون منطقة الحلول الممكنة Feasible Region مفتوحة أي أن زيادة الموارد يؤدي الى زيادة قيمة دالة الهدف بدون حدود و كما يلي :

$\text{Max } (Z) = 3X_1 - 2X_2$

$2X_1 + 5X_2 \geq 10$ .... (1)

$X_2 \leq 8$ .... (2)

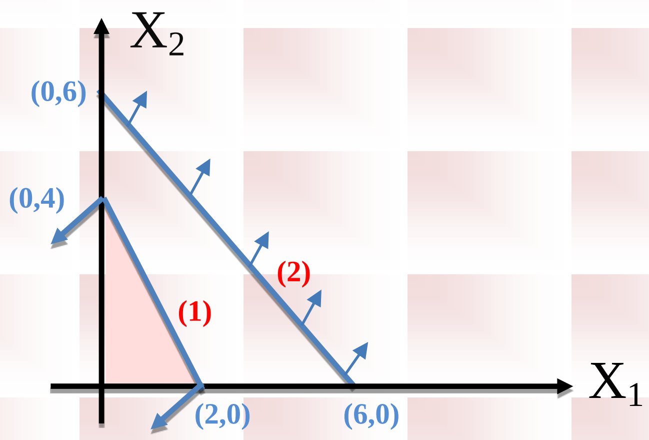
$X_1, X_2 \geq 0$



شكل (2-11)

ثانياً : عدم وجود حل Infeasible Solution

وهذه الحالة غالبا ما تنتج عند وجود خطأ في الصياغة الرياضية أو وج
ود قيود متعارضة كما في المثال الأتي حيث لا توجد منطقة حل مشتركة بين القيود



شكل (2-12)

Max (Z) = $4X_1 + 2X_2$

Subject to:

$4X_1 + 2X_2 \leq 8$ .... (1)

$5X_1 + 5X_2 \geq 30$ .... (2)

ثالثاً: حالة وجود اكثر من حل امثل Multiple Optimal Solution

و هنا يتكون اكثر من نقطة من اركان منطقة الحلول الممكنة تحقق نفس الحل الامثل

16- Use the graphical method to solve the following LP Problem

Maximize (Z) = $10X_1 - 6X_2$

Subject to the constraints

$5X_1 + 3X_2 \leq 30$ .... (1)

$X_1 + 2X_2 \leq 18$ .... (2)

$X_1, X_2 \geq 0$

Constraints	Points
$5X_1 + 3X_2 \leq 30$	(0,10) (6,0)
$X_1 + 2X_2 \leq 18$	(0,9) (18,0)

ايجاد احداثيات النقطة (B) والتي تمثل تقاطع القيدين

$$5X_1 + 3X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$X_1 + 2X_2 = 18 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بضرب المعادلة (2) بـ (5)

$$5X_1 + 10X_2 = 90 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

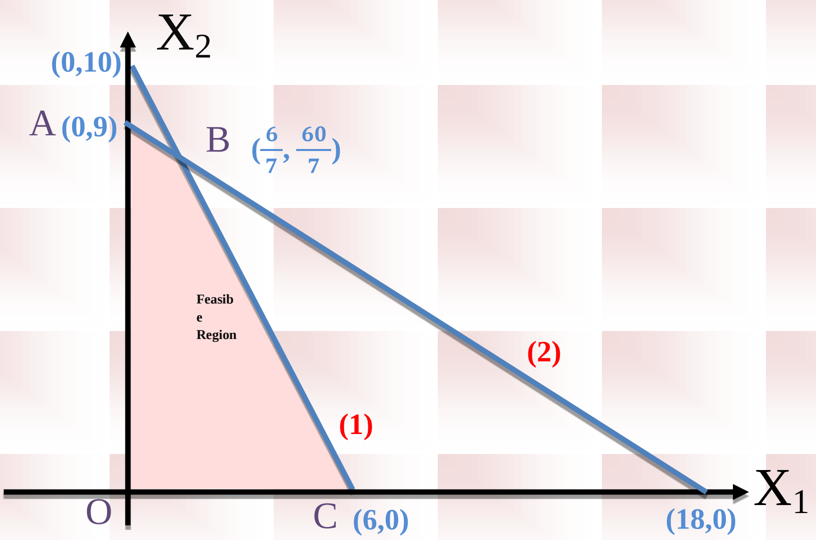
يطرح المعادلة (1) من (2)

$$5X_1 + 10X_2 = 90 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$5X_1 + 3X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$7X_2 = 60$$
$$X_2 = \frac{60}{7}$$

بالتعويض في المعادلة (1)

$$5X_1 + 3\left(\frac{60}{7}\right) = 30$$
$$5X_1 = 30 - \frac{180}{7}$$
$$5X_1 = \frac{210 - 180}{7}$$
$$5X_1 = \frac{30}{7}$$
$$X_1 = \frac{6}{7}$$



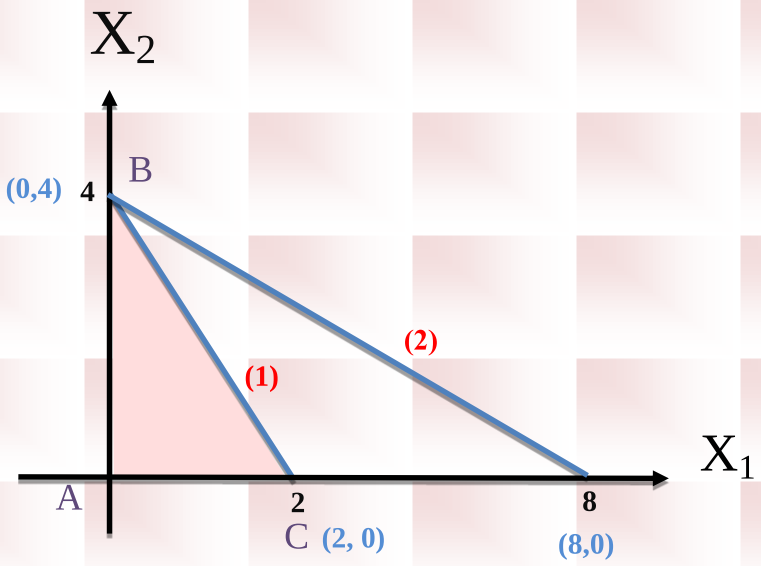
شكل (2-13)

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 10X_1 + 6X_2$
O (0,0)	$Z = 10(0) + 6(0) = 0$
A (0,9)	$Z = 10(0) + 6(9) = 54$
B $(\frac{6}{7}, \frac{60}{7})$	$Z = 10(\frac{6}{7}) + 6(\frac{60}{7}) = 60$
C (6,0)	$Z = 10(6) + 6(0) = 60$

لاحظ ان النقطتين B,C يحققان اعظم قيمة لدالة الهدف (الحل الامثل) هذا يعني تعدد الحلول

خامساً : الانحلالية Degeneracy

وهي حالة وجود قيد فائض عن الحل وليس له تأثير على الحل كما يلي :



شكل (2-14)

$$\text{Max }(Z) = 3X_1 + X_2$$
$$8X_1 + 4X_2 \leq 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Extreme Points نقاط التطرف	Objective Function $Z = 3X_1 + X_2$
A (0,0)	**Z = 3(0) + (0) = 0**
B (0,4)	**Z = 3(0) + 4 = 4**
C (2, 0)	**Z = 3(2) + (0) = 6**

لاحظ ان الحل الامثل عند النقطة C وان القيد الثاني هو قيد فائض

2-6-2 الطريقة المبسطة Simplex Method

تعتمد هذه الطريقة أسلوب رياضي فعال في حل مسائل البرمجة الخطية طوره العالم الرياضي الأمريكي G.B.Dantzing عام 1947 حيث أصبح بفضل هذا الأسلوب إمكانية حل المشاكل ذات المتغيرات المتعددة ومما ساعد على شيوع استخدامها استخدام الحاسب الالكتروني في حل النماذج الرياضية.

خطوات استخدام الطريقة المبسطة في حالة التعظيم Maximization

1. تحويل القيود و دالة الهدف الى الشكل القياسي Standard form.
2. تحويل الصيغة القياسية إلى هيئة جدول (الصيغة الجدولية) Table Form وتحديد الحل الابتدائي يتكون الجدول من :
   a. العمود الأول للجدول هو عمود المتغيرات الأساسية (Basic variables) وهي في الجدول الأول والعمود C_B يمثل معاملاتها في دالة الهدف.
   b. بقية الأعمدة تمثل معاملات المتغيرات الأساسية والراكدة وفق ما ورد في النموذج.
   c. العمود قبل الأخير (R.H.S) و يمثل الموارد.
   d. العمود الأخير يمثل النسبة الدنيا.
   e. الصف C_j يمثل معاملات جميع المتغيرات في دالة الهدف.
   f. الصف Z تمثل معاملاته معاملات دالة الهدف.
3. اختبار الحل الابتدائي اذا كانت احد قيم الصف Z موجبه والهدف تعظيم فان الحل غير امثل لذا ننتقل الى الخطوة (4) اما اذا كانت جميع القيم السالبة أو صفرية فإن الحل امثل.
4. تحسين الحل وفي هذه الخطوة نستخرج حل جديد وفق الخطوات الآتية:
   a. المتغير المقابل لأكبر قيمة موجبة في الصف Z تمثل المتغير الداخل Entering variable .
   b. تحديد المتغير الخارج Leaving variable عن طريق قسمة قيم معاملات العمود (R.H.S) على القيم المناظرة لها في عمود المتغير الداخل باستثناء القيم السالبة والقيم الصفريه والمتغير الخارج هو المتغير الذي يقابل اقل خارج قسمة وتدعى هذه القاعدة بقاعدة النسبه الدنيا (Min Ratio).

c. القيمة الواقعة في تقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل تدعى المحور pivot وصفها يدعى الصف المحوري وعمودها عمود المحور.

d. عناصر الجدول الجديد تستخرج كما يلي:

1) صف المحور يقسم على قيمة المحور وينقل الى الجدول الجديد بعد استبدال المتغير الخارج بالمتغير الداخل

2) بقية الصفوف يتم استخراجها عن طريق ضرب الصف المحوري الذي استخرج في (1) بقيمه مناسبه بحيث إذا أضيف بعد ضربه الى الصف (المراد استخراجه في الجدول القديم) تكون القيمة مقابله المحور مساوية للصفر لذا يضرب الصف المحوري دائما بنفس القيمه الموجوده في الصف المراد استخراجة (الصف القديم) والمناظرة للمحور وبعكس الإشارة والصف المحوري بعد ضربه بالقيمة المناسبة يضاف الى الصف المراد استخراجه في الجدول القديم ينتج الصف في الجدول الجديد

5. إذا كانت أحد القيم الموجودة في الصف $(C_j - Z)$ في الجدول الجديد قيمة موجبة تكرر الخطوات السابقة لحين التوصل إلى قيمة سالبة في الصف Z أو قيم صفرية

Example 1:

$$\text{Max } (Z) = 5X_1 + X_2$$

Subject to:

$$4X_1 + 6X_2 \leq 12 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$X_1 + X_2 \leq 20 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution: -

اولاً : تحويل المتباينات الى معادلات وذلك بأضافة متغيرات تدعى المتغيرات الراكدة (Slack variable) وتضاف هذه المتغيرات الى معادلة دالة الهدف بمعامل قدرة صفر

وبعد اجراء هذه التعديلات يصبح النموذج بالشكل الاتي :

$$\text{Max } (Z) = 5X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Subject to:

$$4X_1 + 6X_2 + S_1 = 12 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 20 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ثانياً : تنظيم الجدول المبسط (جدول الحل الابتدائي)

Table (1)

C_B	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	1 X_2	0 S_1	0 S_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
0	S_1	4	6	1	0	12	$\frac{12}{4} = 3$
0	S_2	1	1	0	1	20	$\frac{20}{1} = 20$
	Z	+5	+1	0	0	0	0

المتغير الخارج

المتغير الداخل

الحل اعلاه غير امثل لان معاملات (Z) المقابل للمتغيرات الاساسية والتي تمثل الربح المفقود موجبة لذا ننتقل الى الخطوة ثالثاً (تحسين الحل)

ثالثاً : تحسين الحل :

a. المتغير X_1 يمثل المتغير الداخل لانة يقابل اكبر قيمة موجبة في الصف Z (+5).

b. المتغير الخارج تحصل علية عن طريق قسمة معاملات العمود R.H.S على مايناظرها من معاملات عمود المتغير الداخل وتتم العملية في العمود (Min Ratio) ومنها نستنتج ان المتغير الخارج هو S_1 لانة يقابل اقل نسبة (3).

c. القيمة التي تقع عند تقاطع عمود المتغير الداخل X_1 مع صف المتغير الخارج S_1 تدعى المحور(Pivot) توضع داخل دائرة.

d. صفوف الجدول الثاني:

1. يستبدل المتغير الخارج S_1 بالمتغير الداخل X_1.

2. صف المحور في الجدول الثاني هو صف المحورفي الجدول السابق مقسوماً على المحور وكما يلي:

S_1	$\frac{4}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{12}{4}$
X_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	3

الصف المحوري في الجدول الجديد

3. لاستخراج الصف S_1 نضرب الصف المحوري في الجدول الجديد بقيمة مساوية لقيمة المتغير في الصف S_2 الواقع في عمود المحور وبعكس الاشارة ويضاف للصف S_2 في الجدول الاول فينتج صف S_2 في الجدول الجديد

	-1 (1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	3)
	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	-3
+old S_2	1	1	0	1	20
New S_2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	17

نستخرج صف Z في الجدول الجديد نحصل علية عن طريق ضرب أعمدة المتغيرات في القيم المناظرة لها في العمود C_B (في الجدول الجديد) وجمع حاصل الضرب وطرحة من معاملات المتغيرات في دالة الهدف وكما يلي :

$$Z_{X_1} = 5 - (1*5 + 0*0) = 0$$

$$Z_{X_2} = 1 - (\frac{3}{2} * 5) + (-\frac{1}{2}*0) = 1 - 7.5 = - 6.5$$

$$Z_{S_1} = 0 - (\frac{1}{4} * 5) + (-\frac{1}{4} * 0) = -\frac{5}{4}$$

$$Z = 3*5 + 17*0 = 15$$

وبعد هذة العمليات يمكن تنظيم جدول رقم (2) وكما يلي:

Table (2)

C_B	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	1 X_2	0 S_1	0 S_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
5	X_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	3	
0	S_2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	17	
	Z	0	- 6.5	$-\frac{5}{4}$	0	15	

بالنظر لعدم وجود قيمة سالبة في الصف Z والهدف تعظيم (Max) فأن الحل امثل

∴ قيمة الحل الامثل $Z = 15$

$X_1 = 5$

$X_2 = 0$

طريقة م الكبرى او طريقة الجزاء Penalty (Big M) Method

عندما تكون القيود بهيئه اكبر من او يساوي عندئذ تكون معاملات المتغيرات الراكدة Slack variable التي تطرح بتحويل المتباينات الى معادلات قيمة سالبة (-1) وكذلك عندما يكون القيد بهيئة مساواة عندئذ يكون المعامل صفر وفي كلا الحالتين يضاف الى المعادلة متغير يدعى المتغير الاصطناعي يرمز له A ومعامله في دالة الهدف M حيث M قريبه من مالانهاية.

وفيما يلي مثال يوضح هذه الحالة:

Min $(Z) = 5X_1 + 7X_2$

Subject to:

$X_1 + 2X_2 = 50$ …………. (1)

$X_1 \geq 20$ ………………..…. (2)

$X_2 \leq 20$ ………………..……. (3)

$X_1, X_2 \geq 0$

عندئذ يتم تحويل النموذج إلى الشكل القياسي عن طريق الخطوات الاتية:

1. القيد الأول يضاف له متغير يدعي متغير اصطناعي (Artificial variable) ويرمز له بـ (A_1).
2. القيد الثاني يطرح منه متغير راكد (S_1) ويضاف له متغير يدعي متغير اصطناعي (A_2).
3. القيد الثالث يضاف له متغير راكد (S_2) .
4. معاملات المتغيرات الراكدة في دالة الهدف صفر.
5. معاملات المتغيرات الاصطناعية (M) حيث ان قيمة (M) كبيرة جدا تقرب الى ما لانهاية وبذلك سوف تكون الصيغة القياسية للنموذج السابق ما يلي:

Min $(Z) = 5X_1 + 7X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$

Subject to:

$X_1 + 2X_2 + A_1 = 50$ …………. (1)

$X_1 - S_1 + A_2 = 20$ ……………... (2)

$X_2 + S_2 = 20$ ………………..……. (3)

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$

تحويل معادلة دالة الهدف الى معادلة صفرية

Table (1)

C_B	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	7 X_2	0 S_1	0 S_2	M A_1	M A_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
M	A_1	1	2	0	0	1	0	50	$\frac{50}{1} = 50$
M	A_2	1	0	-1	0	0	1	20	$\frac{20}{1} = 20$
0	S_2	0	1	0	1	0	0	20	يهمل
	Z	5-2M	7-2M	M	0	0	0	70M	

ملاحظة / صف (Z) في الجدول الاول حصلنا علية عن طريق ضرب معاملات الاعمدة في المعاملات الناظرة لها في عمود المتغيرات الاساسية (Basic) وطرحها من معاملات المتغيرات في دالة الهدف وكما يلي :

Z_{X_1} = 5 – (1*M + 1*M + 0*0) = 5 – 2M

Z_{X_1} = 7 – (2*M + 0*M + 1*0) = 7 – 2M

Z_{S_1} = 0 – (0*M + (–1*M) + 0*0) = +M

Z_{S_2} = 0 – (0*M + 0*M +1*0) = 0

$ZA_1 = M_1 – (1*M_1 + 0*M_2 + 0*0) = 0$

$ZA_2 = M_2 – (0*M_1 + 1*M_2 + 0*0) = 0$

Z = 50*M + 20*M + 20*0 = 70M

الحل غير امثل لوجود قيم سالبة في الصف Z والمتغير الداخل هو الذي يقابل اكبر قيمة سالبة X_1 والمتغير الخارج هو الذي يقابل اقل خارج قسمة في الصف Min Ratio (A_2)

العمليات الحسابية لاستخراج صفوف الجدول الثاني :

1. الصف المحوري ينتقل كما هو لكون قيمة المحور (1) مع استبدال المتغير الخارج A_2 بالمتغير الداخل X_1 وبذلك يكون الصف المحوري في الجدول الجديد كما يلي:

X_1	1	0	-1	0	0	1	20

2. استخراج صف المتغير A_1 : يضرب الصف المحوري الوارد في (1) بـــ (-1) ويضاف الى الصف نفس المتغير A_1 في الجدول القديم فينتج الصف الجديد

-1	(1	0	-1	0	0	1	20)	الصف المحوري
	-1	0	+1	0	0	-1	-20	
Old MA_1	1	2	0	0	1	0	50	**بالجمع**
New MA_1	0	2	1	0	1	-1	30	

3. الصف S_2 ينقل في الجدول الجديد كما هو لأن القيمة المقابلة للمحور يساوي صفر

Table (2)

CB	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	7 X_2	0 S_1	0 S_2	M A_1	M A_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
M	A_1	0	2	1	0	1	-1	30	$\frac{30}{2} = 15$
5	X_1	1	0	-1	0	0	1	20	يهمل
0	S_2	0	1	0	1	0	0	20	$\frac{20}{1} = 20$
	Z	0	7-2M	5-M	0	0	2M-5		

4. صف Z تتم استخراج قيمة كما يلي :

$Z_{X_1} = 5 - 0 * M + 1 * 5 + 0 * 0 = 0$

$Z_{X_2} = 7 - 2*M + 0*5 + 0*0 = 7 - 2M$

$Z_{S_1} = 0 - \{1*M + (-1)(5)\} + 0*0 = 0 - (M - 5) = 5 - M$

$Z_{S_2} = 0 - (0*M + 0*5 + 1*0) = 0$

Z_{A_1} = M – (1*M + 0*5 + 0*0) = 0

Z_{A_2} = M – (-1*M + 1*5) = M – (5-M) = 2M-5

الحل في (Table 2) غير أمثل لوجود قيمة سالبة في الصف Z (5 – M)

المتغير الخارج هو **A_1**

المتغير الداخل هو **X_2**

- الصف المحوري في الجدول رقم (3) ينتج من قسمة الصف المحوري على المحور (2) مع استبدال المتغير الخارج A_1 بالمتغير الداخل X_2 وكما يلي : -

$$\begin{array}{cccccccc} A1 & \frac{0}{2} & \frac{2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{30}{2} \\ X_2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 15 \end{array}$$

- الصف الثاني يرحل كما هو لان القيمة المقابلة للمحور صفر
- الصف الثالث ينتج من ضرب الصف المحوري في (-1) وجمعة مع الصف القديم

$$\begin{array}{cccccccc} -1 & (\,0 & 1 & +\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 15\,) \\ & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -15 \\ +\text{old } S_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ \hline \text{New } S_2 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 5 \end{array}$$

Table (3)

CB	المتغيرات الاساسية Basic variable	5 X_1	7 X_2	0 S_1	0 S_2	M A_1	M A_2	R.H. S	القيمة الدنيا Min Ratio
7	X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	15	
5	X_1	1	0	-1	0	0	1	20	
0	S_2	0	2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	
	Z	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$M-\frac{7}{2}$	$M-\frac{3}{2}$	205	

قيم الصف Z استخرجت كما يلي:

$ZX_1 = 5 - (0*7 + 1*5 + 0*0) = 0$

$ZX_2 = 7 - (1*7 + 0*5 + 2*0) = 0$

$ZS_1 = 0 - (\frac{1}{2} *7 + (-1*5) + (-\frac{1}{2}*0)) = -\frac{7}{2} + 5 = \frac{3}{2}$

$ZS_2 = 0 - (0*7 +0*5 + 1*0) = 0$

$ZA_1 = M - (\frac{1}{2}*7 + 0*5 + (-\frac{1}{2}*0)) = M - \frac{7}{2}$

$ZA_2 = M - (-\frac{1}{2}*7 + 1*5 + (\frac{1}{2}*0)) = M - (-3.5+5) = M - \frac{3}{2}$

$Z(R.H.S) = 15*7 + 20*5 + 5*0 = 205$

الحل في الجدول (3) حل أمثل لعدم وجود قيم سالبة في الصف Z

$Z = 205$
$X_1 = 7$
$X_2 = 5$

8-2 الثنائية في البرمجة الخطية Duality in Linear Programming

لكل نموذج في البرمجة الخطية نموذج مقابل او نموذج ثنائي و حل النموذج الثنائي يؤدي الى حل النموذج الاساسي و الحصول على النموذج الثنائي نتبع الخطوات التالية :

1- نعكس دالة الهدف من (Max) الى (Min)
2- استبدال المتغيرات من X الى Y
3- القيم التي تقع في الجانب الايمن من القيود تتحول الى معاملات لدالة الهدف في النموذج الثنائي
4- معاملات المتغيرات لدالة الهدف تتحول الى الطرف الايمن للقيود الجديدة
5- تتحول مصفوفة المعاملات للمتغيرات فتصبح الاعمدة صفوف و الصفوف اعمدة
6- تتغير اشارة من اكبر من او يساوي الى اقل من يساوي او العكس بالعكس
7- أضافة صفة شرط عدم السلبية

فوائد تحويل النموذج الاساسي (primal) لنموذج ثنائي (dual)

1- الحصول على نموذج يحتوي اقل عدد من القيود او المتغيرات و بالتالي تسهل اجراءات الحل
2- التخلص من القيم السالبة في الجانب الايمن من القيود
3- يساعد في التوصيل الى العديد من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على تفهم المشكلة

Ex 1:- write the dual to the following L.p problem

Mazimize $(Z_x) = x_1 - x_2 - 3x_2$

Subject to the constraints:

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ … Y_1

$2X_1 \quad + - X_3 \leq 2$ … Y_2

$2X_1 - 2X_2 \;- 3X_3 \leq 6$ … Y_3

Sol 1

Min (W) = $10Y_1 + 2Y_2 + 6Y_3$

$Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \geq 1$ …. (1)

$Y_1 - 2Y_3 \geq -1$ …. (2)

$Y_1 - Y_2 - 3Y_3 \geq 3$ …. (3)

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 6$

Ex 2:- write the dual to the following L.p problem

Minimize (Zx) = $3x_1 - 2x_2 - 4x_3$

Subject to the constraints:

$3X_1 + 5X_2 + 4X_3 \geq 7$ … (1) Y_1

$6X_1 + X_2 \; + 3X_3 \geq 4$ … (2) Y_2

$7X_1 + 2X_2 + X_3 \geq -10$ … (3) Y_3

$X_1 - 2X_2 + 5X_3 \geq 3$ … (4) Y_4

$4X_1 + 7X_2 - 2X_3 \geq 2$ … (5) Y_6

Sol 1

Max (W) = $7Y_1 + 4Y_2 - 10Y_3 + 3Y_4 + 2Y_5$

Subject to the constraints:

$3Y_1 + 6\ Y_2 - 7\ Y_3 + Y_4 + 4\ Y_5 \leq 3$ …. (1)

$5Y_1 + 2\ Y_2 + 2\ Y_3 - 2\ Y_4 + 7\ Y_5 \leq -2$ …. (2)

$4Y_1 + 3\ Y_2 + Y_3 + 5\ Y_4 - 2\ Y_5 \leq 4$ …. (3)

$Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 , Y_5 \geq 0$

Ex 3:- write the dual to the following L.p problem

Maximize (Zx) = $2x_1 + 5x_2 + 3x_3$

Subject to the constraints:

$2X_1 + 4\ X_2 - X_3 \leq 8$ … (1) Y_1

$- X_1 - 2\ X_2 + 3\ X_3 \geq -7$ … (2) Y_2

$X_1 + 3X_2 - 5\ X_3 \geq -2$ … (3) Y_3

$4X_1 + X_2 + 3\ X_3 \leq 3$ … (4) Y_4

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Sol :

توحيد اتجاهات القيود اذ يتم تحويل القيود من ≥ الى ≤ لكون دالة الهدف Max و ذلك لضرب طرفي المتباينة ب (1-) و كما يلي :

Max (W) = $2\ Y_1 + 5\ Y_2 + 3\ Y_3$

Subject to the constraints:

$2X_1 + 4\ X_2 - X_3 \leq 8$ …. (1)

$X_1 + 2\ X_2 - 3\ X_3 \leq 7$ …. (2)

$- X_1 - 3\ X_2 + 5\ X_3 \leq 2$ …. (3)

$4\ X_1 + X_2 + 3\ X_3 \leq 4$ …. (4)

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Min (W) = $8\ Y_1 + 7\ Y_2 + 2\ Y_3 + 4\ Y_4$

Subject to :

$2Y_1 + Y_2 - Y_3 + 4 Y_4 \geq 2$

$4Y_1 + 2 Y_2 - 3Y_3 + Y_4 \geq 5$

$-Y_1 - 3 Y_2 + 5 Y_3 + 3Y_4 \geq 3$ …. (3)

$Y_1 , Y_2 , Y_3, Y_4 \geq 0$

Ex 4:- write the dual to the following L.p problem

Minimize $(Zx) = 4x_1+ 5x_2 + 12 x_3$

Subject to the constraints:

$2X_1+ X_2 + X_3 \leq 4$

$3X_1- 2 X_2 + X_3 =3$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Sol :

Minimize $(W) = 4 Y_1 + 3 Y_2$

Subject to the constraints:

$2Y_1 + 3 Y_2 \geq 4$

$Y_1 - 2 Y_2 \geq 5$

$Y_1 + Y_2 \geq 12$

$Y_1 \geq 0$, Y_2 unrestricted in sign

Ex 5:- construct the dule of the Linear programming problem

Minimize $(Zx) = 10 x_1- 6 x_2 - 8 x_3$

Subject to the constraints:

$X_1 - 3X_2 + X_3 = 5$

$-2X_1 + X_2 + 3 X_3 = 8$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Sol :

Maximize (W) = $5 Y_1 + 8 Y_2$

Subject to the constraints:

$Y_1 - 2 Y_2 \leq 10$

$- 3 Y_1 + Y_2 \leq -6$

$Y_1 + 3 Y_2 \leq -8$

Y_1, Y_2 unrestricted in sign

Ex 5:- construct the dule of the Linear programming problem

Maximize (Zx) = $3 x_1 + x_2 + x_3 – X_4$

Subject to the constraints:

$X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 4X_4 \leq 5$

$X_1 + X_2 = -1$

$X_3 - X_4 \leq -5$

Sol :

Minimize (W) = $5 Y_1 - Y_2 – 5 Y_3$

Subject to the constraints:

$Y_1 + Y_2 \geq 3$

$5 Y_1 + Y_2 \geq 1$

$3 Y_1 + Y_2 \geq 1$

$4 Y_1 – Y_3 \geq -1$

$Y_1 , Y_2 \geq 0$

Ex 5:- construct the dule of the Linear programming problem

Maximize (Zx) = $x_1 + x_2 + 2 x_3$

$2X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 4$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 6$

$4X_1 - 3X_2 - 5X_3 = 1$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Sol :

Minimize (W) = $4Y_1 - 6Y_2 + Y_3$

Subject to the constraints:

$2Y_1 - Y_2 + 4Y_3 \geq 1$

$-3Y_1 + Y_2 - 3Y_3 \geq 1$

$2Y_1 - Y_2 - 5Y_3 \geq 2$

$Y_2 \geq 0$

Y_1 , Y_3 Unrestricted

Ex 9:- construct the dule of the Linear programming problem

Maximize (Zx) = $16x_1 + 14x_2 + 36x_3 + 6X_4$

Subject to the constraints:

$14X_1 + 4X_2 + 14X_3 + 8X_4 = 21$

$13X_1 + 17X_2 + 80X_3 + 2X_4 \leq 48$

$X_1, X_2 \geq 0$

X_3 , X_4 Unrestricted

Sol :

Minimize (W) = $12Y_1 + 48Y_2$

Subject to the constraints:

$14Y_1 + 13Y_2 \leq 10$

$4Y_1 + 17Y_2 \leq -6$

$14\ Y_1 + 80\ Y_2 \leq -8$

$8\ Y_1 + 2\ Y_2 = 6$

$Y_1 \geq 0$

Y_2 Unrestricted

أسئلة الفصل الثاني

1- Mr. Mohammed, a retired Govt. officer, has recently received his retirement benefits, viz, provident fund gratuity, etc. he is contemplating as to how much funds he should invest in various alternatives open to him so as to maximize return on investment. The investment alternatives are: government securities, fixed deposits of public limited company, equity shares, time deposits in banks, national saving certificates and real estate. He has made a subjective estimate of the risk involved. The data on the return on investment, the number of years for which the funds will be blocked to earn this return on investment and the subjective risk involved are as follows:

Investment alternatives	Return	No. of years	Risk
Govt. securities	6%	15	1
Company deposits	15%	3	3
Equity shares	20%	6	7
Time deposits	10%	3	1
Real estate	12%	6	1
	25%	10	2

He was wondering what percentage of funds he should invest in each alternative so as to maximize the return on investment. He decided that average risk should not be more than 4, and funds should not be locked up for more than 15 years. Formulate an L.P model for the problem if he does not want more than 30% of the investment to be put in the real estate.

السيد محمد ، موظف حكومي متقاعد ، تلقى مؤخرًا استحقاقات التقاعد ، أي صندوق الادخار ، المكافآت ، وما إلى ذلك. وهو يفكر في مقدار الأموال التي يجب أن يستثمرها في البدائل المختلفة المتاحة له لزيادة عائد الاستثمار إلى أقصى حد. بدائل الاستثمار هي: الأوراق المالية الحكومية والودائع الثابتة لشركة عامة محدودة وأسهم عادية والودائع لأجل في البنوك وشهادات التوفير الوطنية والعقارات. لقد قام بتقدير شخصي للمخاطر المحتملة. البيانات حول العائد على الاستثمار، وعدد من المتاجرة التي سيتم حظر الأموال من أجلها للحصول على هذا العائد على الاستثمار والمخاطر الشخصية المحتملة هي كما يلي:

بدائل الاستثمار	العائد	عدد السنيين	المخاطرة
الاوراق المالية الحكومية	%6	15	1
ودائع الشركة	%15	3	3
اسهم عادية	%20	6	7
ودائع لأجل	%10	3	1
شهادات التوفير الوطنية	%12	6	1
العقار	%25	10	2

كان يتساءل عن نسبة الأموال التي يجب أن يستثمرها في كل بديل لزيادة عائد الاستثمار إلى أقصى حد. وقرر أن متوسط المخاطر يجب ألا يزيد عن 4 ، ولا يجب إغلاق الأموال لأكثر من 15 عامًا. اوجد صياغة نموذج L.P. للمشكلة إذا لم يرغب في وضع أكثر من 30٪ من الاستثمار في العقار.

(Portfolio Selection Problem)

2 - The Agro Promotion Bank is trying to select investment portfolio for a cotton farmer. The bank has chosen a set of five investment alternatives, with subjective estimates of rates of return and risk, as follows:

Investment	Annual rate of return (%)	Risk
Tax-free municipal bonds	6.0	1.3
Corporate bonds	8.0	1.5
High grade common stock	5.0	1.9
Mutual fund	7.0	1.7
Real estate	15.0	2.7

The bank officer in charge of the portfolio would like to maximize the average annual rate of return on the portfolio. However, the wealthy investor has specified that the average risk of the portfolio should not exceed 2.0; and does not want more than 20% of the investment to be put into real estate. Formulate an L.P. model for the problem

(مشكلة اختيار المحفظة)

يحاول بنك الترويج الزراعي اختيار محفظة استثمارية لمزارع قطن. اختار البنك مجموعة من خمسة بدائل استثمارية، مع تقديرات ذاتية لمعدلات العائد والمخاطر، على النحو التالي:

الاستثمار	معدل العائد السنوي (%)	المخاطرة
سندات بلدية معفاة من الضرائب	6.0	1.3
سندات الشركات	8.0	1.5
الأسهم العادية عالية الجودة	5.0	1.9
الصندوق المشترك	7.0	1.7
العقارات	15.0	2.7

يود مسؤول البنك المسؤول عن المحفظة زيادة متوسط معدل العائد السنوي على المحفظة. ومع ذلك، حدد المستثمر الثري أن متوسط مخاطر المحفظة يجب ألا يتجاوز 2.0، ولا يريد أن يتم استثمار أكثر من 20٪ من الاستثمار في العقارات. صياغة نموذج L.P للمشكلة.

(Product Mix Problem)

4- The Delhi Florist Company is planning to make up floral arrangements for the upcoming festival. The company has available the following supply of flowers at the costs shown:

Type	Number available	Cost per flower $
Red roses	800	0.20
Gardenias	456	0.25
Carnations	4000	0.15
White roses	920	0.20
Yellow roses	422	0.22

These flowers can be used in any of the four popular arrangements whose make up and selling prices are as follows:

Arrangement	Requirements	Selling price
Economy	4 red roses 2 gardenias 8 carnations	$ 6
Maytime	8 white roses 5 gardenias 10 carnations 4 yellow roses	$ 8
Spring-color	9 red roses	$ 10

(مشكلة مزيج المنتج)

تخطط شركة دلهي للزهور لعمل ترتيبات زهور للمهرجان القادم. توفر الشركة الإمدادات التالية من الزهور بالتكلفة الموضحة:

النوع	الرقم المتاح	التكلفة لكل زهرة $
ورود حمراء	800	0.20
غاردينيا	456	0.25
قرنفل	4,000	0.15
ورود بيضاء	920	0.20
ورود صفراء	422	0.22

يمكن استخدام هذه الأزهار في أي من الترتيبات الأربعة الشائعة التي تكون أسعار تكوينها وبيعها كما يلي:

الترتيب	المتطلبات	سعر البيع
الاقتصاد	4 ورود حمراء 2 الغردينيا 8 قرنفل	$ 6
ايار	8 ورود بيضاء 5 غاردينيا 10 قرنفل 4 ورود صفراء	$ 8
لون الربيع	9 ورود حمراء	$ 10

(Product Mix Problem)

5- A plant manufactures washing machines and dryers. The major manufacturing departments are the stamping deptt., motor and transmission deptt. and assembly deptt. The first two departments produce parts for both the products while the assembly lines are different for the two products. The monthly deptt. capacities are

Stamping deptt.	: 1,000 washers or 1,000 dryers
Motor and transmission deptt.	: 1,600 washers or 7,000 dryers
Washer assembly line	: 9,000 washers only
Dryer assembly line	: 5,000 dryers only

Profits per piece of washers and dryers are $ 2,700 and $ 3,000 respectively. Formulate the L.P. model.

يقوم مصنع بتصنيع الغسالات والمجففات. أقسام التصنيع الرئيسية هي قسم الختم ، قسم المحرك وناقل الحركة. وقسم التجميع . ينتج القسمان الأولان أجزاء لكل من المنتجين بينما تختلف خطوط التجميع للمنتجين.

قدرات القسم الشهرية هي:

قسم الختم	:	1,000 غسالة او 1,000 مجفف
قسم المحرك وناقل الحركة	:	1,600 غسالة او 7,000 مجفف
خط تجميع الغسالة	:	9,000 غسالة فقط
خط تجميع المجفف	:	5,000 مجفف فقط

الأرباح لكل قطعة من الغسالات والمجففات $ 2,700 و $ 3,000 على التوالي . صغ نموذج L.P.

(Product Mix Problem)

5- Consider a company that must produce two products over a production period of three months of duration. The company can pay for materials and labour from two sources: company funds and borrowed funds. The firm faces three decisions:

1. How many units should it produce of product 1?
2. How many units should it produce of product 2?
3. How much money should it borrow to support the production of the two products?

In making these decisions the firm wishes to maximize the profit contribution subject to the conditions stated below:

(i) Since the company's products are enjoying a seller's market, it can sell as many units as it can produce. The company would, therefore, like to produce as many units as possible subject to production capacity and financial constraints. The capacity constraints, together with cost and price data, are given in the table below:

Product	Selling price ($/unit)	Cost of production ($/unit)	Required hours per unit in deptt		
			A	B	C
1	14	10	0.5	0.3	0.2
2	11	8	0.3	0.4	0.1
	Available hours funds per production period of three months		500	400	200

(ii) The available company funds during the production period will be $ 3 lakhs.

(iii) A bank will give loans upto $ 2 lakhs per production period at an interest rate of 20 per cent per annum provided the company's acid (quick) test ratio is at least 1 to 1 while the loan is outstanding.

Take a simplified acid test ratio given by

$$\frac{\text{Surplus cash on hand after production + Accounts receivable}}{\text{Bank borrowings + Interest accrued thereon}}$$

(iv) Also make sure that the needed funds are made available for meeting the production costs.

Formulate the above as linear programming problem.

افترض ان على شركة انتاج منتجين على مدى فترة إنتاج مدتها ثلاثة أشهر. يمكن للشركة أن تدفع مقابل المواد والعمالة من مصدرين: أموال الشركة والأموال المقترضة. تواجه الشركة ثلاثة قرارات:

1. كم عدد الوحدات التي يجب أن تنتجها للمنتج 1؟
2. كم عدد الوحدات التي يجب أن ينتجها للمنتج 2؟
3. كم من المال يجب ان تقترض لدعم إنتاج المنتجين؟

عند اتخاذ هذه القرارات ، ترغب الشركة في زيادة مساهمة الربح إلى الحد الأقصى وفقًا للشروط الواردة أدناه:

(1) نظرًا لأن منتجات الشركة تتمتع بسوق البائع ، يمكنها بيع أكبر عدد ممكن من الوحدات التي يمكن أن تنتجها. لذلك ، ترغب الشركة في إنتاج أكبر عدد ممكن من الوحدات وفقًا للقدرة الإنتاجية والقيود المالية. ترد قيود السعة ، إلى جانب بيانات التكلفة والأسعار ، في الجدول أدناه:

المنتج	سعر البيع (بوحدة $)	تكلفة الإنتاج (بوحدة $)	الساعات المطلوبة لكل وحدة في القسم A	B	C
1	14	10	0.5	0.3	0.2
2	11	8	0.3	0.4	0.1
	عدد الساعات المتاحة لكل فترة إنتاج ثلاثة أشهر		500	400	200

(2) هل ستكون أموال الشركة المتاحة خلال فترة الإنتاج 3 $ لكح.

(3) يمنح البنك قروضاً تصل إلى 2 $ لكح لكل فترة إنتاج بمعدل فائدة 20 في المائة سنويًا بشرط أن تكون نسبة اختبار الأحماض (السريعة) للشركة 1 إلى 1 على الأقل بينما يكون القرض مستحقًا.

خذ نسبة اختبار حمض مبسطة مقدمة من

الفائض النقدي في متناول اليد بعد الإنتاج + حسابات القبض

قروض مصرفية + الفوائد المستحقة عليها

(4) وتأكد أيضًا من توفر الأموال اللازمة لتغطية تكاليف الإنتاج.

اوجد صياغة ما سبق كمشكلة برمجة خطية.

: (Product Mix Problem)

6- **A company produces two parts P_1 and P_2 used in television sets. A unit of P_1 costs the company \$ 5 in wages and \$ 6 in material, while a unit of P_2 costs the company \$ 20 in wages and \$ 10 in material. The company sells both parts on one-period credit terms, but the company's labour and material expenses must be paid in cash. The selling price of P_1 is \$ 25/ unit and P_2 is \$ 60/ unit. The company's production capacity is limited by two considerations. First, at the beginning of period 1, the company has an initial balance of \$ 35,000 (cash + bank credit + collections from past credit sales). Second, the company has available in each period 1,600 hours of machine time and 1,400 hours of assembly time. The production of each P_1 requires 2 hours of machine time and 1.5 hours of assembly time, while production of each P_2 requires 2 hours of machine time and 3 hours of assembly time. Formulate the problem as L.P. model to maximize the total profit to the company.**

تنتج الشركة جزأين P_1 و P_2 يستخدمان في أجهزة التلفزيون. وحدة P، تكلف الشركة 5 $ في الأجور و 6 $ في المواد ، في حين أن وحدة P تكلف الشركة 20 $ في الأجور و 10 $ في المواد. تبيع الشركة كلا الجزئين بشروط ائتمانية لفترة واحدة، ولكن يجب دفع نفقات العمل والعمالة للشركة نقدًا. سعر بيع P1 25 $ / وحدة و P2 60 $ / وحدة. الطاقة الإنتاجية للشركة محدودة باعتبارين. أولاً، في بداية الفترة 1 ، كان لدى الشركة رصيد مبدئي قدره 35000 $ (نقد + ائتمان مصرفي + تحصيلات من مبيعات ائتمانية سابقة). ثانيًا ، يتوفر لدى الشركة في كل فترة 1600 ساعة من وقت الماكينة و 1400 ساعة من وقت

التجميع. يتطلب إنتاج كل P_1 ساعتين من وقت الماكينة و1.5 ساعة من وقت التجميع، بينما يتطلب إنتاج كل P_2 ساعتين من وقت الماكينة و 3 ساعات من وقت التجميع. صغ المشكلة كنموذج L.P. لزيادة إجمالي الربح للشركة الى اقصى حد.

(Product Mix Problem)

7- A manufacturing company has two plants, which produce and supply two products X and Y. Each plant can work up to 15 hours a day. In plant A, it takes 3 hours to prepare and pack 1,000 liters of X and 2 hours to prepare and pack 1 ton of Y. In plant B, it takes 2 hours to prepare and pack 1,000 liters of X and 2.5 hours to prepare and pack 1 ton of Y. In plant A, it costs $ 20,000 to prepare and pack 1,000 litres of X and $ 25,000 to prepare and pack 1 ton of Y, whereas these costs are $ 22,000 and $ 23,000 respectively in plant B. The company wants to produce 12,000 litres of X and 10 tons of Y and wants to organize the production so as to produce the products at minimum cost. Formulate this problem as an L.P. model.

لدى شركة تصنيع مصنعان ينتجان ويوردان منتجين X و Y. يمكن لكل مصنع أن يعمل حتى 15 ساعة في اليوم. في المصنع A ، يستغرق تحضير وتعبئة 1000 لتر من X و 2 ساعة لتحضير وتعبئة 1 طن من Y . في المصنع B ، يستغرق الأمر ساعتين لإعداد وتعبئة 1000 لتر من X و 2.5 ساعة للتحضير و تعبئة 1 طن من Y. في المصنع A ، يكلف $ 20000 لأعداد وتعبئة 1000 لتر من X و $ 25,000 لإعداد وتعبئة طن واحد من Y ، في حين أن هذه التكاليف هي $ 22000 و $ 23000 على التوالي في المصنع B. تريد الشركة إنتاج 12,000 لترا من X و 10 أطنان من Y وتريد تنظيم الإنتاج لإنتاج المنتجات بأقل تكلفة. صغ هذه المشكلة كنموذج L.P.

(Product Mix Problem)

8- A truck company has $ 50 lakh to invest and is to choose among three types of trucks A, B and C. Truck A has 12 tonne payload and is expected to average 50 km per hour. It costs $ 80,000. Truck B has a 20 tonne payload, is expected to average 45 km per hour and costs $ 1,00,000. Truck C is a modified form of B. It has sleeping space for the driver, which reduces its payload capacity to 17 tonne, while raising the cost to $ 1,20,000.

Truck A requires a crew of one man, and if driven on three shifts per day, could run for an average of 20 hours a day. Trucks B and C require a crew of two men each and if driven on three shifts per day, could be run for an average of 19 hours and 22 hours respectively. The company has a fleet of 120 crewmen available to it. If the total number of trucks are not to exceed 40, how many trucks of each type should be purchased if the company wants to maximize its capacity in tone km per day? Formulate the problem as L.P. problem.

شركة شاحنات لديها $ 50 (لكح) للاستثمار وتستطيع الاختيار من بين ثلاثة أنواع من الشاحنات A وB و C. تحمل شاحنة A حمولة 12 طنًا ومن المتوقع أن يبلغ متوسطها 50 كم في الساعة. تكلف $ 80,000. تبلغ حمولة الشاحنة 20B طنًا، ومن المتوقع أن يبلغ متوسطها 45 كم في الساعة والتكاليف $ 100,000. الشاحنة C هي شكل معدّل من B. تحتوي على مساحة نوم للسائق، مما يقلل من حمولتها إلى 17 طنًا، بينما يرفع التكلفة إلى $ 1,20,000. تتطلب الشاحنة A طاقمًا من رجل واحد، وإذا تمت قيادتها على ثلاث نوبات في اليوم، يمكن أن تعمل لمدة 20 ساعة في المتوسط. تتطلب الشاحنتين B وC طاقمًا من رجلين لكل منهما وإذا تم تشغيلهما على ثلاث نوبات في اليوم، يمكن تشغيلهما بمعدل 19 ساعة و 22 ساعة على التوالي. الشركة لديها أسطول من 120 من أفراد الطاقم المتاح لها. إذا كان العدد الإجمالي للشاحنات لا يتجاوز 40 شاحنة، فكم عدد الشاحنات التي يجب شراؤها من كل نوع إذا كانت الشركة ترغب في تعظيم طاقتها بالطن كم في اليوم؟ صغ المشكلة على أنها مشكلة L.P. .

الفصل الثالث

مشكلة النقل

1-3 تعريف مشكلة النقل Define Transport Problem

Its special case of L.P. it used to simplified calculation that we used in L.P. it deals with the transportation of product available from several sources to number of different destination each shipping sources has ascertain capacity and each destination has certain requirement associate with certain cost of shipping from the source destination the object is to minimize the cost of transportation with meeting the requirement at the destination

نموذج النقل هي حالة خاصة من البرمجة الخطية و يستخدم لايجاد حل لمشكلة نقل المنتجات المتوفرة في عدة معامل او مصادر الى عدة مواقع وكل موقع او مصدر له طاقة استيعابية معينة. والهدف هو تقليل كلفة النقل لمواجهة الطلبات في المواقع المختلفة

يذكر (G.T. Stevens , shambling) أن هذه المشكلة تنشا عندما تكون هناك مجموعة من الوحدات في عدة مصادر ويراد توزيعها على عدة جهات بطريقة مثلى (أي بأقل أو أعظم ربح) .
أما (BEN L . Wechsler garye white house) فيشير إلى أن مشكلة النقل هي نوع خاص من مشكلة البرمجة الخطية والتي غالبا تنطوي على توزيع منتوج أو مورد من مصادر مختلفة إلى أغراض أو استخدامات مختلفة وهذا النوع من المشاكل ليست محدودة بمشاكل حركة البضائع كما يفهم ذلك من المعنى العام لكلمة نقل (Transportation) ويشير (chares W. Gross , Harish l. Verme) إلى أن مشاكل النقل تتعلق بتحديد الخطة المثلى للنقل بين مجموعة من النقاط بحيث تكون التكاليف اقل ما يمكن التعاريف الثلاثة السابقة تكاد أن تكون مكملة لبعضها ويمكننا من خلالها أن تعرف مشكلة النقل بأنها حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية وهي تنشا عندما تكون هناك مجموعة من الموارد يراد توزيعها على مجموعة الاستخدامات بأقل كلفة أو أعظم ربح

2-3 الصياغة العامة لنماذج النقل

1. دالـــة الهدف :

تأخذ دالة الهدف في نماذج النقل احد الصيغتين الآتيتين :

الصيغة الأولى: تعظيم ك $= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \sum_{\text{ل}=1}^{\text{م}} \text{ت}_{\text{ر ل}} \, \text{س}_{\text{ر ل}}$

الصيغة الثانية: تدنية هـ $= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \sum_{\text{ل}=1}^{\text{م}} \text{ع}_{\text{ر ل}} \, \text{س}_{\text{ر ل}}$

2. القيـــــود :

أ. قيود الكميات المطلوبة : الكميات المنقولة إلى أية محطة استخدام يجب أن تساوي الكمية المطلوبة عند هذه المحطة وتأخذ الصيغة الرياضية لهذا القيد الشكل الأتي :

$$\sum_{\text{ل}=1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{رل}} = \text{ا}_{\text{ر}}$$

ب. قيود الكميات المتاحة عند المصادر مجموع الكميات المنقولة من أية مصدر يجب أن تساوي الكميات المتاحة عند هذه المصدر

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{رل}} = \text{ب}_{\text{ر}}$$

ج. قيود التوازن أي تساوي الكميات المطلوبة والمتوفرة

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ا}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ل}=1}^{\text{م}} \text{ب}_{\text{ر}}$$

د. قيود عدم السلبية :

$\text{س}_{\text{رل}} \geq$ الصفر

حيث :

هـ = الكلفة الكلية للنقل

ك = الربح الكلي للنقل

ر = مرتبة محطة الطلب (1 . 2. 3 .... ن)

ل = مرتبة محطة العرض (1 . 2. 3 .... م)

ن = عدد المحطات الطلب

م = عدد محطات العرض

$\text{ت}_{\text{رل}}$ = تكلفة نقل الوحدة من محطة الطلب ر إلى محطة العرض ل

$\text{س}_{\text{رل}}$ = عدد الوحدات المنقولة من محطة الطلب ر إلى محطة العرض ل

$ع_{رل}$ = الربح الناتج من نقل الوحدة من محطة الطلب ر إلى محطة العرض ل

$أ_ر$ = الكمية المطلوبة من محطة العرض ر

$ب_ل$ = الكمية المعروضة من محطة العرض ل

3-3 شروط استخدام نموذج النقل:

لحل مسالة أما باستخدام نموذج النقل يجب أن تتوفر في تلك المسألة الشروط الاتية :

1. أمكانيه تحديد المسألة بصوره كميه:- يجب أن يكون بالإمكان ترجمه المسألة إلى صيغه كميه حتى يمكن التعبير عن المشكلة بصوره نموذج رياضي , و عن طريق حل هذا النموذج يمكن التوصل إلى الحل الأمثل لمشكله
2. محدودية الموارد : نموذج النقل احد الأساليب العلمية لحل المشاكل فإذا كانت الموارد و فيره و بلا حدود عندئذ لا توجد مشاكل وبالتالي لا توجد هنالك حاجه لكل الأساليب العلمية المستخدمة لحل المشاكل بما في ذلك نموذج النقل يعني هذا الشرط ضروري احتواء النموذج الرياضي على قيود على استخدام الموارد
3. أن تكون هنالك مجموعه من البدائل لتحقيق الهدف: فإذا كانت هنالك طريقه واحده لتحقيق الهدف عندئذ يكون أمام متخذ القرار بديلان لا ثالث لهما فإما أن نقدم على أتباع هذه ألطريقه أو تركها وبالتالي عدم تحقيق الهدف و في كل الحالتين لا مبرر لاستخدام نموذج النقل
4. أن تكون العلاقة بين المتغيرات في النموذج مؤكده و خطيه
5. أن تكون الموارد المتوفرة و المطلوبة في النموذج معبر عنها بنفس الوحدة سواء كانت الوحدة وحده وزن أو حجم أو مساحه أو غيرها.

4-3 حل نموذج النقل

بالرغم من أمكانية صياغة مشكلة النقل بشكل النموذج العام للبرمجة الخطية وحله بالطرق المستخدمة في حل النموذج القياسي ألا انه توجد طرق خاصة بها أكثر ملائمة لحل هذه المشاكل من سواها وحل نماذج النقل باستخدام هذه الطرق يستلزم أتباع الخطوات الآتية:

1. **صياغة مشكلة النقل في شكل جدول تسهيلا لأجراء التحليل الرياضي للمشكلة** في احد جانبي الجدول يتم وضع أسماء محطات الموارد (supply) وفي الجانب المقابل كمية الموارد المتوفرة في كل محطة وفي الجانب الآخر من الجدول أسماء محطات الطلب (Demand) والجانب المقابل لها الكمية المطلوبة في كل محطة وفي أركان خلايا الجدول توضح تكلفة نقل الوحدة الواحدة من كل محطة عرض إلى محطة الطلب .
2. **تحديد حل ابتدائي أساسي ممكن Basic feasible solution :** وتوجد العديد من الطرق المستخدمة لهذا الغرض منها:
   - أ- طريقة الركن الشمالي **(North-West Corner Method)**
   - ب- طريقة أقل تكلفة **(The Least Cost Method)**

ج - طريقة فوجل التقريبية **(Vogel's Approximation Method)**

3. **اختبار المثالية Test Optimality** : وفي هذه الخطوة يتم اختبار الحل الناتج في الخطوة (2) عن طريق استخدام الطريقتين الآتيتين :

أ. طريقة الدرج الحجري **(Stepping – Stone Method)**

ب. طريقة التوزيع المعدلة **(Modified Distribution Method)**

فإذا لم يكن الحل الناتج حل امثل يتم تحسينه واستخراج حل جديد , تكرر هذه الخطوة حتى يتم الحصول على الحل الأمثل

4. **تحسين الحل الأساسي (Improvement the basic solution)**
5. **تكرر الخطوات (3) و (4) لحين التوصل إلى الحل الأمثل**

3-5 طرق الحصول على الحل الابتدائي :-

قبل البدء بالحل يجب التأكد من توازن العرض مع الطلب علما بان الحل الذي يتم الحصول عليه بجميع الطرق التي سيرد ذكرها (غالبا) ليس بالحل المستهدف, آذ أن الحل المستهدف هو الحل الأمثل وحتى في حاله كون الحل الذي يتم الحصول عليه بهذه الطرق حل امثل فإننا لا يمكننا التعرف عليه آذ أن هذه الأساليب توصلنا إلى حل أولي لمشكله النقل دون أن تدلنا على أن هذا الحل امثل ام لا ألا بعد اختباره (Test optimality).

1- طرق الركن الشمالي الغربي (North – West Corner Method)

اسم هذه ألطريقه مشتق من اسم موقع الخلية التي يبدأ الحل بها أذا يتم البدء في الحل بموجب هذه ألطريقه من الخلية الواقعة في الركن الشمالي الغربي من الجدول و يمكن تلخيص الخطوات التي يتم بموجبها الحصول على الحل بهذه ألطريقه في النقاط الاتية :

أ. أبدا من الخلية الواقعة في الركن الشمالي الغربي من الجدول وغطي اكبر كميه ممكنه من احتياجات محطة الطلب المقابلة لها عن طريق نقل الوحدات المطلوبة لها من محطة العرض المقابلة لها و طبيعي أن تكون الكميه المنقولة لهذه الخلية مساوية لا قل الكميتين المتوفرتين و المقابلتين لها (كميه العرض و كميه الطلب) فعلى سبيل المثال أذا كانت المطلوبة في المحطة المقابل للخلية و الواقعة في الركن الشمالي الغربي من الجدول (50) وحده في حين تبلغ الكميه المتوفرة في محطة العرض (20) وحده عندئذ تكون الكميه التي تنقل (20) وحده توضع الكميه المنقولة داخل الخلية , و تمثل الكميه المنقولة قيمه المتغير الأساسي .

ب. اطرح الكمية المنقولة من كمية العرض والطلب المقابله لها.

ج. احذف الخلايا المتبقية من العمود و الصنف الذي تم تحقيق متطلباته في الخطوة (أ) أي تم استنفاذ الموارد الخاص به أو تغطيه كافه احتياجاته .

د. كرر الخطوات (أ) و (ب) حتى يتم توزيع كافه الموارد على محطات الطلب.

ولإيضاح كيفية استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي نورد المثال الاتي :

مثال1 :- **تمتلك أحدى شركات صناعة السكر ثلاثة معامل وأربعة مخازن يخزن السكر الخام في المخازن ثم يتم نقلة إلى المعامل , وفيما يلي جدول بالتكاليف اللازمة لنقل الطن الواحد من مخازن الشركة إلى معاملها مقدرة بالدنانير**

جدول تكاليف نقل الطن مقداره بالاف الدنانير

معمل / مخزن	معمل رقم (1)	معمل رقم (2)	معمل رقم (3)
مخزن رقم (1)	2	6	4
مخزن رقم (2)	3	11	6
مخزن رقم (3)	1	5	7
مخزن رقم (4)	7	9	8

احتياجات معامل الشركة من السكر الخام كالاتي :

معمل رقم (1) 3000 طن
معمل رقم (2) 8000 طن
معمل رقم (3) 7000 طن

وتبلغ كمية مخزون السكر الخام في المخازن الشركة 18000 طن موزعة على مخازنها الاربعة وكما يلي :

مخزن رقم (1) 2500 طن
مخزن رقم (2) 1500 طن
مخزن رقم (3) 8000 طن
مخزن رقم (4) 6000 طن

المطلوب :-

استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي في إيجاد خطة ابتدائية لنقل السكر الخام من المخازن إلى المعامل وتحديد تكلفة النقل بطريقة الركن الشمالي الغربي .

الحل:

يمكن صياغة المشكلة أعلاه في جدول وكما يلي :

جدول النقل الذي يتضمن المشكلة

معمل / مخزن	معمل رقم (1)	معمل رقم (2)	معمل رقم (3)	الكميات المتاحة (بالاطنان)
مخزن رقم (1)	2	6	4	2500
مخزن رقم (2)	3	11	6	1500
مخزن رقم (3)	1	5	7	8000
مخزن رقم (4)	7	9	8	6000
الكميات المطلوبة (بالاطنان)	3000	8000	7000	18000

جدول النقل موضح فيه خطوات الوصول الى الحل الابتدائي باستخدام ام طريقة الركن الشمالي الغربي

معمل / مخزن	معمل رقم (1)	معمل رقم (2)	معمل رقم (3)	الكميات المتاحة (بالأطنان)
مخزن رقم (1)	2 ×	6 ×	4 2500	~~2500~~
مخزن رقم (2)	3 ×	11 ×	6 1500	~~1500~~
مخزن رقم (3)	1 ×	5 5000	7 3000	~~8000~~ ~~5000~~
مخزن رقم (4)	7 3000	9 3000	8 ×	~~6000~~ ~~3000~~
الكميات المطلوبة (بالأطنان)	~~3000~~	~~8000~~ ~~3000~~	~~7000~~ ~~4500~~ ~~3000~~	18000

الكلفة الكلية = 4 × 2500 + 6 × 1500 + 7 × 3000 + 5×5000 + 3000×9 + 7 ×3000

= 10000 +9000 + 21000 + 25000 + 27000 + 21000

= 113000

الانتقاد الموجه لطريقة الركن الشمالي الغربي

يعاب علي هذه الطريقة عدم اعتمادها على أساس منطقي فتوزيع الموارد على الاستخدامات بدءا من الخلية الواقعة في الركن الشمالي الغربي قد يؤدي إلى زيادة التكاليف أي يؤدي إلى الوصول إلى حل ابتدائي بعيد عن الحل الأمثل مما يؤدي إلى زيادة عدد الخطوات اللازمة للوصول إلى الخطة المستهدفة – الخطة المثلى – أي أن الوصول إلى الحل الأمثل يستغرق وقت وجهد كبيرين نسبيا – مقارنة بالطريقة البديلة التي سيرد ذكرها – وذلك لكون الحل الابتدائي المستخرج بهذه الطريقة – بعيد عن الحل الأمثل .

2. طريقة اقل تكلفة (The least cost method)

وتعتبر أفضل من سابقتها – طريقة الركن الشمالي الغربي – اذ يؤخذ بالاعتبار عند توزيع الموارد على الاستخدامات – باستخدام هذه الطريقة – الغاية المستهدفة في الحل وهي توزيع المواد على الاستخدامات بأقل تكلفة , حيث يتم توزيع المواد على الاستخدامات بدءا من الخلية التي تحمل اصغر تكلفة ثم بالتي تليها من حيث الصغر وهكذا حتى يتم توزيع كافة الموارد على الاستخدامات .

الحل الابتدائي المستخرج باستخدام هذه الطريقة يكون اقرب إلى الحل الأمثل من الحل الابتدائي المستخرج باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي (في الغالب)

وفيما يلي حل للمثال السابق باستخدام لهذه الطريقة

جدول الحل الابتدائي المستخرج بطريقة اقل تكلفة

معمل / مخزن	معمل رقم (1)	معمل رقم (2)	معمل رقم (3)	الكميات المتاحة
مخزن رقم (1)	2	6	4 2500	~~2500~~
مخزن رقم (2)	3	11	6 1500	~~1500~~
مخزن رقم (3)	1 3000	5 5000	7	~~8000~~ ~~5000~~
مخزن رقم (4)	7	9 3000	8 3000	~~6000~~ ~~3000~~
الكميات المطلوبة (بالأطنان)	~~3000~~	~~8000~~ ~~3000~~	~~7000~~ ~~4500~~ ~~3000~~	18000

الكلفة الكلية $= 4 \times 2500 + 6 \times 1500 + 1 \times 3000 + 5 \times 5000 + 9 \times 3000 + 8 \times 3000$

$= 98000$

عيوب طريقة اقل تكلفة

تعتبر هذه الطريقة أنها لم تأخذ بنظر الاعتبار الكلفة الفرصية كما أنها صعبة الاستخدام في حالة المشاكل الكبيرة وتزداد صعوبتها كلما زاد عدد محطات الموارد والاستخدامات اذ يزيد في هذه الحالة عدد الخلايا مما يتطلب جهدا ووقتا كبيرين, كما أن الاساس المعتمد في توزيع المواد على الاستخدامات في هذه الطريقة هو البدأ بالخلية التي تحمل اقل كلفة واعتماد هذا الاساس قد يؤدي في بعض الأحيان إلى زيادة التكاليف ولتوضيح هذه الحقيقة نورد المثال الاتي :-

جدول الحل الابتدائي باستخدام طريقة اقل تكلفة

معمل / مخزن	معمل رقم (1)	معمل رقم (2)	المواد
مخزن رقم (1)	16	8 / 15	15
مخزن رقم (2)	34 / 15	23	15
الاحتياجات	15	15	30

في المثال أعلاه استخدمنا طريقة اقل تكلفة في إيجاد الحل الابتدائي , التكاليف الكلية للنقل وكما موضحة في الجدول تساوي (630) دينار كان من الأفضل في المثال أعلاه البدأ بالحل من الخلية التي تقع عند تقاطع الصف الأول والعمود الأول أو الخلية الواقعة عند تقاطع الصف الثاني مع العمود الثاني ثم نقل الكمية المتبقية إلى احد هاتين الخليتين , عندئذ يكون الحل كما هو موضح في الجدول التالي .

التكلفة الكلية للنقل = عدد الوحدات المنقولة × تكلفة الوحدة

$$= 34 \times 15 + 8 \times 15$$

$$= 630$$

جدول الحل الابتدائي باستخدام طريقة اقل تكلفة

معمل / مخزن	معمل رقم (1)	معمل رقم (2)	المواد
مخزن رقم (1)	16 / 15	8	15
مخزن رقم (2)	34	23 / 15	15
الاحتياجات	15	15	30

التكلفة الكلية للنقل وكما موضحة في الجدول أعلاه تساوي (585) دينار و هي اقل من تكلفة النقل للحل في الجدول السابق .

أي أن الانتقاد الرئيسي الموجة لهذه الطريقة هو عدم أخذها بالاعتبار التكاليف الفرصية في كل صف وفي كل عمود

1. طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method (VAM)

تعتبر أفضل من الطريقتين السابقتين لان الحل الأولي المستخرج باستخدامها يكون اقرب إلى الحل الأ مثل من الحل الأولي المستخرج باستخدام الطريقتين السابقتين وقد يكون الحل الأولي المستخرج حلا امثل وفي هذه الطريقة يتم الأخذ باعتبار الخسارة الناتجة من اختيار نقل وحدة واحدة بأقل كلفة في كل صف وعمود دون اختبار النقل بالكلفة التي تليها من حيث الصغر (الكلفة الفرصية) ويتم احتساب هذه

الخسارة عن طريق احتساب الفرق بين هاتين الكلفتين ويمكن تلخيص خطوات الوصول إلى الحل الابتدائي باستخدام هذه الطريقة في النقاط الأتية:

1. احسب الفرق بين اقل قيمتين من قيم التكاليف في كل عمود و كل صف
2. اختار الصف أو العمود الذي يقابله اكبر فرق
3. اختار الخلية التي لها اقل تكلفة في العمود أو الصف الذي تم اختياره
4. انقل اكبر كمية ممكنة من المورد المقابل للخلية التي تم اختيارها في الخطوة (3) إلى محطة الاستخدام المقابلة لها
5. احذف الخلايا المتبقية للصف او العمود الذي تم تحقيق متطلبات في الخطوة (4) واستبعاده في الخطوات اللاحقة.
6. كرر الخطوات السابقة حتى يتم توزيع كافة الموارد على الاستخدامات

وفيما يلي حل المثال السابق بطريقة فوجل التقريبية

جدول النقل بأستخام طريقة فوجل التقريبية

معمل / مخزن	معمل رقم (1)	معمل رقم (2)	معمل رقم (3)	الكمية المتاحة				
مخزن رقم (1)	2	6	4 / 250	2500	2	2	2	—
مخزن رقم (2)	3	11	6 / 1500	~~1500~~	3	5	—	—
مخزن رقم (3)	1 / 300	5 / 5000	7	~~8000~~ ~~5000~~	2	2	2	2
مخزن رقم (4)	7	9 / 300	8 / 300	~~6000~~ ~~3000~~	1	1	1	1
الكميات المطلوبة بالاطنان	~~3000~~	~~8000~~ ~~3000~~	~~7000~~ ~~5500~~ ~~3000~~	18000				
	—	1	1	2				
	—	—	1	2				
	—	—	1	3				
	—	—	4	1				

جدول مقارنة بين الطرق الثلاث في إيجاد الحل الابتدائي

North – west corner Method	The least cost	Vogel's approximation Method
1) تحقيق التوازن 2) ابدأ من الخلية الواقعة في الركن الشمالي الغربي 3) انقل اكبر قيمة (اقل الكميتين المقابلتين لهذه الخلية) 4) اطرح الكمية المنقولة من جانبي العرض و الطلب 5) حذف الصف او العمود الذي استنفذت موارده 6) كرر الخطوات السابقة لحين توزيع كافة المواد على كافة الاستخدامات	1) كذالك 2) ابدأ من الخلية الأقل تكلفة 3) كذلك 4) كذلك 5) كذلك 6) كذلك	1) كذالك 2) أ - احسب الفرق بين اقل تكلفتين في كل صف وعمود ب- اختيار الصف او العمود الذي يقابل اكبر فرق ج- اختيار الخلية التي تحمل اقل تكلفة في الصف او العمود المختار 3) كذلك 4) كذلك 5) كذلك 5) كذلك

6-3 اختيار وتحسين الحل الابتدائي

Test and improvement of the basic solution

و هنالك طريقتين رئيسيتين هما

1. **طريقة الدرج الحجري Stepping stone method**
2. **طريقة التوزيع المعدلة Modified distribution method**

1- طريقة الدرج الحجري Stepping stone method

وهي تطبيق للطريقة المبسطة (simplex method) المستخدمة في حل النماذج الخطية مع الاخذ بالاعتبار الشكل الخاص لمشاكل النقل و يمكن تلخيص خطوات اختبار مثالية الحل بأستخدام هذة الطريقة في النقاط الاتية :-

1- تحديد اثر نقل وحدة من كل خلية فارغة على الكلفة الكلية عن طريق رسم مسار مغلق يبدأ بالخلية موضع الاختبار و ينتهي بها و يمر بالخلايا الاساسية فقط و في بعض الحالات يمكن ان يعبر خط سير خلية مليئة دون ان يمر بها حتى يستطيع اكمال السير , و يجب ان يكون خط السير دائما مكون من مستقيمات افقية او رأسية , يبدأ هذا المسار بأشارة موجبة ثم اشارة سالبة بالخلية التي تليها و هكذا تتعاقب الاشارات الموجبة و السالبة في خلايا اركان المسار بحيث تطفئ احدهما الاخرى في كل عمود و كل صف يمر به المسار .

2- حساب أثر أستخدام الخلية الفارغة على التكاليف الكلية عن طريق تطبيق قانون الاتي :-

أثر استخدام الخلية على التكاليف الكلية = تكلفة الخلية الفارغة – (مجموع تكاليف الخلايا التي يمر بها المسار بأشارة سالبة) + (مجموع تكاليف الخلايا التي يمر بها المسار بأشارة موجبة) .

3- تطبيق الخطوات (1) و (2) على كل الخلايا الفارغة فأذا ظهر اثر استخدام اي من الخلايا الفارغة قيمة سالبة فهذا يعني ان بالامكان تخفيض الكلفة الكلية بمقدار يساوي تلك القيمة لكل وحدة واحدة يتم نقلها الى الخلية الفارغة اي ان الحل غير امثل اما اذا كانت قيمة موجبة فأن الحل أمثل .

و فيما يلي مثال يوضح الخطوات السابقة :

Example 2 :

Test optimality the following solution using stepping stone method

S \ D	D1	D2	D3	Supply
S1	8 (7)	5	6 (5)	120
S2	15	10 (8)	12 (5)	80
S3	3 (8)	9	10	80
Demand	**150**	**80**	**50**	280

Solution :

الخلية الفارغة	المسار المغلق	اثر استخدام الخلية الفارغة على التكاليف
(1, 2)	**X (1, 3) -> X (2, 3) -> X (2,2)-> X(1,3)**	5-6+12-10=1
(2 ,1)	**X (2, 3) -> X (1, 3) X (1,1)-> X(2,1)**	15-12+6-8=1
(3 ,2)	**X (1, 1) -> X (1, 3) -> X (2,3)-> X(2,2) X(3, 2)**	+9-3+8-6+12-10=10
(3 , 3)	**X (1, 3) -> X (1, 1) -> X (3,1)**	10-6+8-3=9

بالنظر لكون اثر استخدام الخلايا قيم موجبة لذا فأن الحل أمثل

2. طريقة التوزيع المعدلة Modified distribution method

لأختبار وتحسين الحل الابتدائي نتبع الخطوات الاتية : -

1) نتأكد من الحل الابتدائي اذ يجب أن يكون أساسي والحل الأساسي يجب أن تكون عدد الخلايا (الاساسية المليئة) مساوية لعدد الصفوف + الاعمدة – ١ فـإذا لم تكن نضيف إلى احد الخلايا الفارغة في الجدول قيمة قريبة من الصفر تدعى ابسيلون يرمز لها بالرمز (E) لتحويل الحل إلى حل أساسي

2) نحسب لكل صف قيمة نرمز لها (u i) ولكل عمود قيمة نرمز لها (v j) حيث (i) رقم الصف (j) رقم العمود

3) نفترض احد قيم (u i) أو (v j) تساوي صفر

4) نستخرج بقية القيم بتطبيق القاعدة الاتية

تكلفة الحقيقية لكل خلية مليئة = قيم (v j + u i) المقابلتين لها

5) نستخرج تأثير النقل لكل خلية فارغة بتطبيق القاعدة التالية

تأثير النقل لكل خلية فارغة = كلفتها الحقيقية - (v j + u i) المقابلتين لها

6) أذا ظهر أن تأثير النقل لأي خلية قيمة سالبة فهذا يعني أن الحل غير امثل ولابد من تحسينه

7) تحسين الحل : لتحسين الحل نرسم مسار مغلق يبدأ من الخلية التي تحمل اقل تكلفة ويتصف بما يلي

-:

أ) يبدأ المسار بإشارة موجبة

ب) يمر بالخلايا المليئة فقط

ج) تتعاقب الإشارات الموجبة والسالبة على المسار بحيث تلغي احدهما الأخرى

د) تضاف الكمية المنقولة حيثما وجدت أشارة موجبة وتطرح حيثما وجدت أشارة سالبة

8) نكرر الخطوات السابقة حتى يتم الوصول الى الحل الأمثل

Example 3 :

Test optimality by modified distribution method

S / D	S1	S2	S3	Supply	
W1	2 (100)	5 + 10	1 +1	100	$U_1=0$
W2	11 +1	3 (80)	8 (40)	120	$U_2=8$
W3	6 (50)	12 +13	4 (80)	130	$U_3= -4$
Demand	150	80	120	530	

V1 = 2   V2 = -5   V3 = 0

الحل اساسي لأن عدد الخلايا الاساسية (المليئة) = عدد الاعمدة + عدد الصفوف – 1

M + N – 1

3 + 3 -1 = 5

5 = 5

(تطبيق القانون على الخلايا الفارغة فقط)

D12 = 5 – (0 + (- 5)) = +10

D13 = 1 – (0 + 0) = +1

D21 = 11 – (8 + 2) = +1

D32 = 12 – (4 + (- 5)) = +13

الحل امثل لان جميع قيم D موجبة

7-3 معالجة الحالات الخاصة Handling special situations

1- حالة عدم التوازن في النموذج Unbalanced Model

تحدث هذه الحالة عندما تكون الموارد لا تساوي الاستخدامات اي الطاقات المتوفرة لا تساوي الاحتياجات عندئذ نضيف صف وهمي او عمود وهمي و حسب الحاجة

و كما في الامثلة الاتية :

Example 4 :

Determine the initial solution and the transportation cost from the follow data using:

a. **North west corner method.**
b. **The least cost method.**

The Vogel's approximation method.

c. **The Vogel's approximation method.**

P \ S	S1	S2	S3	S4	Supply
P1	90	90	100	100	200
P2	50	70	130	85	100
Demand	75	100	100	30	300 / 305

Solution

Thus, supply and demand are not blanced

العرض غير متوازن مع الطلب (العرض 300 والطلب 305)

يضاف صف وهمي يمثل مصدر وهمي لمواجهة الطلب الاضافي تكون تكاليف النقل للكمية الاضافية وقدرة (5) مساوية للصفر لان الكمية اصلاً وهمية لاوجود لها هي مجرد وسيله للوصول للحل وعلية سيكون جدول النقل بالشكل الاتي :

Table (1)

P \ S	S1	S2	S3	S4	Supply
P1	90	90	100	100	**200**
P2	50	70	130	85	**100**
Dummy	0	0	0	0	**5**
Demand	**75**	**100**	**100**	**30**	**305** / **305**

a. Initial solution by using north west corner method

Table (2)

P \ S	S1	S2	S3	S4	Supply
P1	90 / 75	90 / 100	100 / 25	100 / ×	~~200~~ ~~125~~ ~~25~~
P2	50 / ×	70 / ×	130 / 75	85 / 25	~~100~~ ~~25~~
Dummy	0 / ×	0 / ×	0 / ×	0 / 5	~~5~~

Total cost = 75*90 + 100*90 + 25*100 + 75*130 + 25*85 + 5*0 = 30125

b. Initial solution by using the least cost method

S / P	S1	S2	S3	S4	Supply
P1	90	90 / 70	100 / 100	100 / 30	~~200~~ ~~130~~ ~~30~~
P2	50 / 70	70 / 30	130	85	~~100~~ ~~30~~
Dummy	0 / 5	0	0	0	~~5~~
Demand	~~75~~ ~~70~~	~~100~~ ~~70~~	~~100~~	~~30~~ ~~5~~	305 / 305

Total cost = 90*70 + 100*100 + 100*30 + 50*70 + 30*70 + 5*0
= 24900

c. Initial solution by using Vogel's approximation method

الحل بطريقة فوجل التقريبية

S / P	S1	S2	S3	S4	Supply				
P1	90	90 / 100	100 / 95	100 / 5	~~200~~ ~~105~~ ~~100~~ ~~5~~	10	10	10	10
P2	50 / 75	70	130	85 / 25	~~100~~ ~~25~~	20	20	15	15
Dummy	0	0	0 / 5	0	~~5~~	0	—	—	—
Demand	~~75~~	~~100~~	~~100~~ ~~95~~	~~30~~ ~~25~~	305 / 305				
	50	70	100	85					
	40	20	30	15					
	—	20	3	15					
	—	20	—	15					

Total cost = 100*90 + 100*95 + 100*5 + 50*75 + 85*25 + 5*0
= 9000 + 9500 + 500 + 3750 + 2125
= 24875

2 - حالة الانحلال Degeneracy

و في هذه الحالة تكون عدد الخلايا المملوءة اقل من عدد الصفوف + عدد الاعمدة – 1 اي ان الحل غير اساسي و قد تحدث هذه الحالة في الحل الابتدائي او اثناء تطويره عندئذ لابد تحويله الى حل اساسي بأضافة كمية الى احد الخلايا الفارغة هذه الكمية تدعى ابسيلون و يرمز لها بالمز (E) عندئذ يتحول الحل الى حل اساسي و نطبق عليه الخطوات السابقة و فيما يلي امثلة يوضح هذه الحالة

Example 5 :

Test the following solution and determine the optimal cost?

S \ D	D1	D2	D3	Supply
S1	8 (70)	5	6 (50)	120
S2	15	10 (80)	12	80
S3	3 (80)	9	10	80
Demand	150	80	50	280

Solution

S \ D	D1	D2	D3	Supply	
S1	8 (70)	5	6 (50)	120	$U_1=0$
S2	15	10 (80)	12 (E)	80	$U_2=6$
S3	3 (80)	9	10	80	$U_3= -5$
Demand	150	80	50	280	
	V1 = 8	V2 = 4	V3 = 6		

1. الحل غير اساسي لان عدد الخلايا الاساسية = 4

عدد الاعمدة + عدد الصفوف – 1 = 3 + 3 – 1 = 5

2. نحول احد الخلايا الفارغة الى خلية اساسية عن طريق اضافة كمية قريبة من الصفر تدعى ابسيلون **Epsilon** ويرمز لها بالرمز **(E)** لتحويل الحل الى حل اساسي.

3. نستخرج الكلفة الفرصية للخلايا غير الاساسية

D1 2 = 5 – (4+0) = +1

D2 1 =15 – (6+8) = +1

D2 3 =12 – (6+6) = 0

D3 2 = 9 – (4-5) = 10

D3 3 = 10 – (6-5) = 9

The solution is optimum the total cost = 8*70 + 6*50 + 10*80 + 80*3

= 560 + 300 + 800 +240

= 1900

Example 6 :

Test optimality the following solution by using modifies distribution method

Table (1)

P \ S	1	2	3	4	5	Supply
A	8	8	3	0 (80)	14	**80**
B	10	8 (70)	4 (50)	3	14	**120**
C	8 (100)	10 (40)	7	9	14 (10)	**150**
D	10	4	0 (7)	1	14	**70**
E	9	6 (90)	7	6	14	**90**
Demand	**100**	**200**	**120**	**80**	**10**	**510**

Solution

عدد الصفوف (m) + عدد الاعمدة (n) – 1 = 5 + 5 – 1 = 9

عدد الخلايا الاساسية (المليئة) = 8

لذا نضيف ابسلون E لتحويل احد الخلايا غير الاساسية الى خلية اساسية و كما يلي :

Table (2)

P \ S	1	2	3	4	5	Supply	
A	8 / +3	8 / +1	3 / E	0 / 80	14 / +3	80	$U1=5$
B	10 / +4	8 / 70	4 / 50	3 / +2	14 / +2	120	$U_2=6$
C	8 / 100	10 / 40	7 / +1	9 / +6	14 / 10	150	$U_3=8$
D	10 / +8	4 / 0	0 / 70	1 / +4	14 / +6	70	$U_4=2$
E	9 / +5	6 / 90	7 / +5	6 / +7	14 / +4	90	$U_5=4$
Demand	100	200	120	80	10	510	
	$V_1=0$	$V_2=2$	$V_3=-2$	$V_4=-5$	$V_5=6$		

D1 1 = 8 – (0+5) = 3

D1 2 = 8 – (2+5) = 1

D1 3 = 3 – (-2+5) = 0

D1 4 = 14 – (6+5) = 3

D2 1 = 10 – (6+0) = 4

D2 4 = 3 – (-5+6) = 2

D2 5 = 14 – (6+6) = 2

D3 3 = 7 – (-2+8) = 1

D3 4 = 9 – (-5+8) = 6

D4 1 = 10 – (0+2) = 8

D4 2 = 4 – (2+2) = 0

D4 4 = 1 – (-5+2) = 4

D4 5 = 14 – (6+2) = 6

D5 1 = 9 – (0+4) = 5

D5 3 = 7 – (-2+4) = 5

D5 4 = 6 – (-5+4) = 7

D5 5 = 14 – (4+6) = 4

The solution is optimum

The Total Cost = 100 * 8 + 70 * 8 + 40 * 10 + 90 * 6 + 50 * 4 + 70 * 0 + 80 * 0 + 10 * 14

= 800 + 560 + 400 + 540 + 200 + 140

= 2640

Example 7 :

Determine the optimal solution from the following solution so as to minimize the total cost

Table (1)

to / from	F	N	P	Y	Supply
J	19	7	3 (100)	21	100
S	15 (150)	21	18	6 (150)	300
T	11	14 (100)	15 (100)	22	200
Demand	150	100	200	150	600

Solution

M + n -1 = 4 + 3 -1 = 6

عدد الخلايا الاساسية (المليئة) = 5

∴ الحل غير اساسي نحولة الى حل اساسي بأضافة (E) الى احد الخلايا الفارغة

To / From	F	N	P	Y	Supply	
J	19 +20	7 +5	3 100	21 +31	100	$U1=0$
S	15 150 −	21 +3	18 E + -1	6 150	300	$U_2=16$
T	11 + E	14 100	15 - 100	22 +20	200	$U_3=12$
Demand	150	100	200	150	600	
	$V_1=-1$	$V_2=2$	$V_3=3$	$V_4=-10$		

Table (2)

D1 1 = 19 – (0-1) = 20

D1 2 = 7 – (2+0) = 8

D2 1 = 15 – (16+ (-1)) = 0

D2 2 = 21 – (16+2) = 3

D2 3 = 18 – (3+16) = -1

D3 1 = 11 – (-1+12) = 0

D3 4 = 22 – (-10+12) = 20

No optimum solution so we must improvement

Table (3)

To / from	F	N	P	Y	Supply	
J	19 / +20	7 / +8	3 / 100	21 / +31	100	$U1=0$
S	15 / 50	21 / +3	18 / 100	6 / 150	300	$U_2=15$
T	11 / 100	14 / 100	15	22	200	$U_3=11$
Demand	150	100	200	150	600	
	$V_1=0$	$V_2=3$	$V_3=3$	$V_4=-9$		

D1 1 = 19 – (0+0) = +19

D1 2 = 7 – (3+0) = +4

D1 4 = 21 – (-9+0) = +30

D2 2 = 21 – (15+3) = +3

D3 3 = 15 – (3+11) = +1

D3 4 = 22 – (-9+11) = +20

The solution in (table 2) is optimum

The optimum cost = 100*3 + 50*15 + 100*18 + 6*150 + 11*100 + 14*100 = 6250

Maximization حالة التعظيم - 3

في حالة كون البيانات المعطاة تمثل ارباح و الهدف تعظيم الارباح يتم تحويل المصفوفة الى مصفوفة تكاليف بطرح اكبر قيمة من جميع القيم مع اهمال الاشارة ثم اتباع الطرق و الخطوات السابقة في ايجاد الحل الامثل مع الرجوع الى المصفوفة الاولى عند احتساب الارباح و بالتأكيد قبل البدأ بأنجاز الحل الابتدائي يجب تحقيق التوازن .

Example 8 :

Following is profit Matrix and required:

A : Determine initial solution by vogels mothod
B : Detemine optimum solution

Table (1)

S \ P	1	2	3	4	Demand
A	6	6	11	14	*80*
B	4	6	10	11	*120*
C	6	4	7	5	*150*
D	4	10	14	13	70
E	8	8	7	8	90
Supply	100	200	120	80	510 \ 500

خطوات الحل

1. تحقيق التوازن بأضافة عمود وهي تحتوي كمية وهمية قدرها (10) فيصبح النموذج بالشكل الاتي :-

Table (2)

S \ P	1	2	3	4	Demand	Supply
A	6	6	11	14	0	*80*
B	4	6	10	11	0	*120*
C	6	4	7	5	0	*150*
D	4	10	14	13	0	**70**
E	8	8	7	8	0	**90**
Demand	**100**	**200**	**120**	**80**	**10**	**510**

2. نحول النموذج الى نموذج تدنية تكاليف بطرح جميع التكاليف من اكبر قيمة من قيم التكاليف و البالغة (14) ثم نستخدم طريقة فوجل بأستخراج الحل الابتدائي

Table (3)

S \ P	S1	S2	S3	S4	Demand	Supply					
A	8	8	3	0 (80)	14	~~80~~	3	–			—
B	10	8 (70)	4 (50)	3	14	~~120~~ ~~70~~	1	1	1	2	—
C	8 (10)	10 (4)	7	9	14 (10)	~~150~~ ~~140~~ ~~100~~	1	1	1	1	2
D	10	4	0 (70)	1	14	~~70~~	1	1	–		—
E	6	6 (90)	7	6	14	~~90~~	1	1			0
Demand	~~100~~	~~200~~ ~~130~~ ~~40~~	~~120~~ ~~50~~	~~80~~	100 ~~10~~	510					
	2	2	3	1	0						
	2	2	4	2	0						
	2	2	3	—	0						
	2	4	—	—	0						

الحل اعلاه غير اساسي لكون عدد الخلايا المليئة (8) و عدد الصفوف (m) + عدد الاعمدة (n) – 1 =

5 + 5 – 1 = 9

لذا لابد من اضافة كمية قريبة من الصفر (Epsilon) ثم نستخرج قيم (u) و (v) و (d)

كما يلي :

Table (4)

S / P	*1*	*2*	*3*	*4*	**Dummy**	***Supply***	
A	8 / + 7	8 / +5	3 / +4	0 / 80	14 / + 17	80	$U1=-7$
B	10 / +4	8 / 70	4 / 50 / -	3 / + / -2	14 / +2	120	$U_2=-2$
C	8 / 100	10 / 40	7 / +1	9 / + 4	14 / 10	150	$U_3=0$
D	10 / +8	4 / 0	0 / 7 / +	1 / E / -	14 / +11	70	$U_4=-6$
E	9 / +5	6 / 90	7 / +5	6 / +3	14 / +4	90	$U_5=-4$
Supply	**100**	**200**	**120**	**80**	**10**	510	
	$V_1=8$	$V_2=10$	$V_3=6$	$V_4=7$	$V_5=14$		

الحل اعلاه غير أمثل لان (d24) قيمه سالبة لذا نرسم اقصر خط مغلق يبدأ بالخلية d24 و ينتهي بها و الكمية التي تنتقل هي E (لانها اقل كمية يمر بها المسار حاملا اشارة سالبة لذا يكون الحل الجديد كما في **(Table 5)** .

Table (5)

S / P	1	2	3	4	Dummy	Supply	
A	8 + 5	8 +3	3 +2	0 80	14 +5	80	$U1=-3$
B	10 +4	8 70	4 50	3 E	14 +2	120	$U_2=0$
C	8 100	10 40	7 +1	9 +14	14 10	150	$U_3=2$
D	10 +8	4 0	0 + 70	1 +2	14 +6	70	$U_4=-4$
E	9 +5	6 90	7 +5	6 +5	14 +4	90	$U_5=-2$
Supply	**100**	**200**	**120**	**80**	**10**	510	
	$V_1=8$	$V_2=10$	$V_3=4$	$V_4=3$	$V_5=12$		

أسئلة فصل الثالث

1-Two drug companies have invertories of 1.1 and 0.9 million doses of a particular flu vaccine and anepideinie of the flu seems imminent in three cities since the flu could be fatal to senior citizens it is imperative that they be vaccinated first ; others will be vaccinated on a first-come-first-served basis while the vaccine supply lasts the amounts of vaccine (in millions of doses)each city estimates it could administer are as follow:

	City 1	city 2	city 3
To Elders	0.325	0.260	0.195
To Others	0.750	0.800	0.650

The shipping cost (in cents per dose) between drug companies and cities are as follows :

	City 1	city 2	city 3
Company 1	3	3	6
Company 2	1	4	7

Determine a minimum – cost shipping schedule which will provide each city whit at least enough vacelne care for its senior citizens (hint :divide each city into two destinations senior citizens and other . create a dummy source .make the shipping cost from the dummy to the senior – citizen destinations prohiblilvely high , effectively guaranteeing no shipments along those links)

2-

Prove that if the costs in any row or any column of a transportation tableau are uniformly reduced by that same number (positive or negative) . then the resultant problem has the same optimal solution as that original problem

3-

A regional airline can buy its jet fuel from any one of three vendors the airline's needs for the upcoming month at each of the three airports it serves are 100000 gal at airport 1 , 180000 gal at airport 2 , and 360000 gal at airport 3 , each vendor can supply fuel to each airport at a price (in cents per gallon) given by the following schedule :

	Airport 1	Airport 2	Airport 3
Vendor 1	92	89	90
Vendor 2	91	91	95
Vendor 3	87	90	92

Each Vendor , however , is limited in the total number of gallons it can provide during any one month . these capacities are 320000 gal for Vendor 1 , 270000 gal for Vendor 2, and 190000 gal for Vendor 3 , determine a purchasing police that will supply the airline's requirements at each airport at minimum total cost .

4-

A baking from can produce bread in either of its two plants , as follows:

Plant	Production capacity loves	Production Cost € / loaf
A	2500	23
B	2100	25

Four restaurant chains are willing to purchase their ; demands and the prices they are willing to pay are as follows :

Chain	maximum capacity loves	Price offered Cost € / loaf
1	1800	39
2	2300	37
3	550	40
4	1750	36

The cost (in cents) of shipping a loaf from a plant to a restaurant chine is given in the following table :

	Chain 1	Chain 2	Chain 3	Chain 4
Plant A	6	8	11	9
Plant B	12	6	8	5

Determine a delivery schedule for the baking from that will maximize profit from bread

الفصل الرابع

مشكلة التخصيص

مشكلة التخصيص Assignment problem

1-4 المقدمة

Assignment problem is particular case of transportation problem where the objective is to Assign a number of resources to equal number of activities. So as to minimize total cost or to Maximize total profit.

مشكلة التخصيص (التعيين) حالة خاصة من مشاكل النقل وهي تعني بتخصيص استخدام واحد لكل مورد بحيث تكون التكلفة الكلية اقل مايمكن او الفائدة اكبر مايمكن.

ان اهم معايير قياس كفاءة الادارة هي قدرتها على تخصيص الموارد المتيسره لما لهذا التخصيص من مردود وانعكاس على الايرادات لمساهمته في تقليل التكاليف, ويتم تمثيل مشكلة التخصيص بمصفوفة مربعة (عدد الصفوف مساوي لعدد الاعمدة) حيث تمثل الموارد المتيسره بالصفوف (في الغالب) والاعمده تمثل الاستخدامات او المهام وتمثل أرقام المصفوفة فهي تمثل تكاليف استخدام او تخصيص المورد لكل استخدام.

2-4 الشكل العام لنموذج التخصيص

لنفرض ان المشكلة هي تخصيص عدد m (عامل او عمل) على عدد n لماكنه حيث يترتب على تخصيص i (m , ... , 2 , 1) على j (n , ... , 2 , 1) التكلفة C_{ij} والهدف هو تخصيص الاعمال على الالات (عمل واحد للاله) بما يحقق ادنى تكلفة وتأخذ مشكلة التخصيص بشكلها العام الاتي:-

Jobs

a_i Supply

Facilities

	1	2	....	n
1	C_{11}	C_{12}	....	C_{1n}
2	C_{21}	C_{22}	....	C_{2n}
.....	.....			
m	C_{m1}	C_{m2}	....	C_{mn}

Demand b_j

3-4 الفرضيات الاساسية لنموذج التخصيص

1. تساوي عدد الموارد مع عدد الاستخدامات اي عدد الصفوف مساوي عدد الاعمدة اي ان المصفوفة الممثلة للمشكله مربعة .
2. هنالك استخدام واحد لكل مورد اي لايمكن لاي عامل ان ينجز سوى عمل واحد على سبيل المثال:
3. التكاليف محدده اي غياب صفة الاحتمال.
4. عدم السلبية.

4-4 طرق حل مشاكل التخصيص

1. طرق العدد الكامل Complete Enumeration
2. الطريقة الهنغارية Hungarian Method.
3. طريقة البرمجة الخطية Linear programming Method.

وتعتبر الطريقة الهنغارية هي الانسب والاكثر شيوعاً لذا سوف نكتفي بشرح واعتماد هذة الطريقة في هذا الفصل.

1-4-4 الطريقة الهنغارية Hungarian Method

تعد الطريقة الهنغارية افضل الطرق لحل نماذج التخصصية وفيما يلي خطوات تطبيقها في حل النماذج التخصيص

1. اعداد جدول التخصيص .
2. التأكد من تحقيق التوازن (عدد الموارد يساوي عدد الاستخدامات أي عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة) في حالة عدم التوازن نضيف صف أو عمود وهمي (حسب الحاجة) تكون تكاليف الصف والعمود المضاف قيم صفرية لتحقيق التوازن.
3. التأكد من الهدف فإذا كان الهدف تعظيم أرباح معطاة في المصفوفة فعندئذ نحول المصفوفة الى مصفوفة تكاليف وذلك بطرح جميع القيم من اكبر قيمة في المصفوفة.
4. اطرح أقل قيمة في كل صف من جميع قيم الصف.
5. اطرح أقل قيمة في كل عمود من جميع قيم العمود.
6. ارسم أقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي جميع القيم الصفرية فإذا كان عدد الخطوط مساوية لعدد الصفوف (والتي تساوي عدد الاعمده) انتقل للخطوة اللاحقة (7) اما اذا كانت غير مساوية عندئذ اطرح أقل قيمة غير مغطاة من جميع القيم غيرالمغطاة واضف نفس القيمة الى نقاط تقاطع الخطوط المستقيمة. تكرر هذه الخطوة حتى يتم التوصل الى عدد الخطوط المستقيمة مساوي لعدد الصفوف الاعمدة عندئذ يكون الحل أمثل .
7. خصص كل صف الى كل عمود بحيث تكون تكاليف التخصيص في الجدول الأخير قيم صفرية وهنا يجب مراعاة مايلي :

a. ابدأ التخصيص بالعمود او الصف الذي يحوي قيمة صفرية واحدة.
b. احذف القيم الصفرية للعمود والصف الذي خصصت موارده (كي لايتكرر تخصيصة).
c. كرر الخطوات لـ d) و e) لحين اكتمال التوزيع.

8. أذا تم توزيع المواد على الاستخدامات بتكاليف قدرها قيم صفرية (في الجدول الأخير) فأن الحل الناتج حل أمثل.
9. تكلفة الحل الامثل تحسب عن طريقة استخدام الجدول الاول الوارد في السؤال حيث يتم جميع التكاليف لتمثل التكاليف المثلى اذا كانت المشكلة تدنية تكاليف أو الأرباح المثلى (اذا كانت المشكلة تعظيم ارباح).

Example 1: Find Assignment which yield minimum cost from the following

Programmers

Programmers

	1	2	3
A	120	100	80
B	80	90	110
C	110	140	120

خطوات الحل :

1. التأكد من ان عدد الصفوف تساوي عدد الاعمدة (عدد الاعمدة في هذا السؤال مساويه لعدد الصفوف)
2. تطرح اقل قيمة في كل صف فينتج المصفوفة في Table (2)

Table (1)

	1	2	3	اقل قيمة في كل صف
A	120	100	80	80
B	80	90	110	80
C	110	140	120	110

Table (2)

	1	2	3
A	40	20	0
B	0	10	30
C	0	30	10
اقل قيمة في كل عمود	0	10	0

3. تطرح اقل قيمة في كل عمود المصفوفة في (Table 2) من قيم العمود فينتج (Table 3) :

Table (3)

	1	2	3
A	40	10	0
B	0	0	30
C	0	20	10

4. نرسم اقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية فأذا كان العدد مساوي للصفوف فان الحل الامثل

	1	2	3
A	40	10	0
B	0	0	30
C	0	20	10

الحل اعلاه امثل لان اقل عدد من من الخطوط المستقيمة مساوية لعدد الصفوف او الاعمدة = 3

5. نبدأ بتخصيص كل مورد لكل استخدام بحيث يكون تكلفة التخصيص في الجدول الاخير مساوي للصفر ولتحقيق ذلك يجب اتباع ما يلي :

أ- نبدأ بالتخصيص من الصف والعمود الذي فية قيمة صفرية واحدة (أن وجدت)

ب- نحذف القيم الصفرية في الصف او العمود الذي تم فية التخصيص (كي لايتكرر تخصيص العمود او الصف)

ج- نكرر الخطوات أ , ب حتى يتم توزيع كافة الموارد على الاستخدامات

	1	2	3
A	40	10	0
B	0	0	30
C	0	20	10

6. تكلفة التخصيص المثلى هي مجموع التكاليف المناظرة للخلايا التي تخصيصها في الجدول الاول

Optimum cost = 80 + 90 + 110 = 280

Example 2:

A department has five employees with five jobs to be performed. the time (in hours) each men will take to be perform job is given in following effectiveness matrix employee how should the jobs allocated one per employee so as to minimize the total man hours

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
A	10	5	13	15	16
B	3	9	18	13	6
C	10	7	2	2	2
D	7	11	9	7	12
E	7	9	10	4	12

خطوات الحل:

1) نتاكد من وجود التوازن اي عدد الصفوف = عدد الاعمدة ولكون ذلك متحقق لذا نبدأ بطرح اقل قيمة في كل صف من الصفوف

نطرح اقل قيمة في كل صف من عناصر الصف فينتج لنا جدول (2)

Table (1)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	أقل قيمة في كل الصف
A	10	5	13	15	16	5
B	3	9	18	13	6	3
C	10	7	2	2	2	2
D	7	11	9	7	12	7
E	7	9	10	4	12	4

Table (2)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
A	5	0	8	10	11
B	0	6	15	10	3
C	8	5	0	0	0
D	0	4	2	0	5
E	3	5	6	0	8
	0	0	0	0	0

2) في المصفوفة في Table (2) اقل قيمة كل عمود صفر لذا تبقى المصفوفة كما هي ونرسم اقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي جميع القيم الصفرية

Table (3)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
A	5	0	8	10	11
B	0	6	15	10	3
C	8	5	0	0	0
D	0	4	2	0	5
E	3	5	6	0	8

من الجدول أعلاه (3) Table يتضح أن اقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية يساوي 4 وهي اقل من عدد الصفوف لذا فان الحل غير امثل لذا ننتقل إلى الخطوة اللاحقة

3) نطرح اقل قيمة غير مغطاة (تساوي 2) من جميع القيم غير المغطاة ونضيفها إلى القيم الواقعة في تقاطع الصفوف فينتج لنا الجدول الاتي (4) Table

Table (3)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
A	5	0	6	10	9
B	0	6	13	10	1
C	10	7	0	2	0
D	0	4	0	0	3
E	3	5	4	0	6

عدد الخطوط التي تغطي القيم الصفرية مساوية لعدد الصفوف لذا فأن الحل الامثل

Optimum cost(التكلفة المثلى) = 5 + 3 + 2 + 9 + 4 = 23

Example 3:

four different jobs can be done on four different machines. the set-up and take down time costs are assumed to be prohibitively high for changeovers the matrix below gives the cost of producing job I on machines

Machines

	M1	M2	M3	M4
J1	5	7	11	6
J2	8	5	9	6
J3	4	7	10	7
J4	10	4	8	3

How should the jobs be assigned to the various machine so that the total cost is minimized?

خطوات الحل:

1) هنالك أربعة مكائن وأربعة أعمال وبالتالي المصفوفة متوازنة والصف لتغطية التكاليف المعطاة في السؤال والخاصة بانجاز الأعمال على الآلات .

2) نطرح اقل قيمة في كل صف من جميع قيم الصف فينتج (Table 2)

Table (1)

	M1	M2	M3	M4	اقل قيمة في كل صف
J1	5	7	11	6	5
J2	8	5	9	6	5
J3	4	7	10	7	4
J4	10	4	8	3	3

Table (2)

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	2	6	1
J_2	3	0	4	1
J_3	0	3	6	3
J_4	7	1	5	0
اقل قيمة في كل عمود	0	0	4	0

3) نطرح اقل قيمة في كل عمود من جميع قيم العمود فينتج (Table 3)

Table (3)

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	2	2	1
J_2	3	0	0	1
J_3	0	3	2	3
J_4	7	1	1	0

4) نرسم اقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية وكما يلي :-

Table (4)

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	2	2	1
J_2	3	0	0	1
J_3	0	3	2	3
J_4	7	1	1	0

5) نلاحظ ان أقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي القيمة الصفرية (3) وهي أقل من عدد الصفوف والبالغة (4)

لذا فإن الحل غير أمثل

نطرح أقل قيمة غير مغطاة (1) من جميع القيم غير المغطاة ونضيفها للخلايا الواقعة في تقاطع الخطوط المستقيمة ونرسم اقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية وكما موضح في (Table 5)

Table (5)

	M1	M2	M3	M4
J1	0	1	1	0
J2	4	0	0	1
J3	0	2	1	2
J4	8	1	1	0

6) أقل عدد من الخطوط المستقيمة لاتزال أقل من عدد الصفرف لذا تكرر الخطوط (5) فتحصل على (Table 6)

Table (6)

	M1	M2	M3	M4
J1	0	0	∩	0
J2	5	∩	x	2
J3	∩	1	x	2
J4	8	x	x	∩

الحل الوارد في الجدول حل امثل

لآن عدد الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية مساوية لعدد الصفوف

The optimal cost = 4 + 5 + 11 + 3

=23

5-4 الحالات الخاصة لنماذج التخصيص

1-5-4 تعظيم الارباح

Example 4:

Find the assignment which yield maximum profit from flowing data

	(1)	(2)	(3)	(4)
A	**42**	**35**	**28**	**21**
B	**30**	**25**	**20**	**15**
C	**30**	**25**	**20**	**15**
D	**24**	**20**	**16**	**12**

Solution

Converte maximization problem in to minimization problem by subtracting from the highest element all the elements

نحول النموذج الى نمـوذج تدنية عن طريق طرح جميع القيم الواردة في النموذج من أعلى قيمة وقدرها (42) فينتج ما يلي :

Table (1)

	(1)	(2)	(3)	(4)	اقل قيمة في كل صف
A	**0**	**7**	**14**	**21**	**0**
B	**12**	**17**	**22**	**27**	**12**
C	**12**	**17**	**22**	**27**	**12**
D	**18**	**22**	**26**	**30**	**18**

النموذج أعلاه تحول الى نموذج كلفة نتعامل معه بنفس الخطوات السابقة ذكرها اي نبدا بطرح اقل قيمة في كل صف من جميع قيم الصف فينتج (Table 2)

Table (2)

	(1)	(2)	(3)	(4)
A	0	7	14	21
B	0	5	10	15
C	0	5	10	15
D	0	4	8	12
اقل قيمة في كل عمود	0	4		8

نطرح اقل قيمة في كل عمود من (Table 2) فينتج (Table 3)

Table (3)

	(1)	(2)	(3)	(4)
A	0	3	6	9
B	0	1	2	3
C	0	1	2	3
D	0	0	0	0

في الجدول (Table 3) أقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية أقل من عدد الصفوف لذا نطرح أقل قيمة غير مغطاة من جميع القيم غير المغطاة (1) ونضيفها الى نقاط تقاطع الخطوط المستقيمة فينتج مصفوفة أخرى نرسم عليها أقل عدد من الخطوط المستقيمة وكما يلي :-

Table (4)

0	2	5	8
0	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	0

الخطوط المستقيمة في المصفوفة أعلاه لا تساوي الصفوف لذا نكرر تطوير الحل

Table (5)

0	2	4	7
0	0	0	1
0	0	0	1
2	1	0	0

الحل أمثل لكون عدد الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية مساوية لعدد الصفوف

الأرباح المثلى هي المناظرة للقيم المخصصة في الجدول الأول =

42 25 + 20 + 12 = 99

2-5-4 عدم التوازن والتخصيص الممنوع :

في هذه الحالة نفترض ان تكلفة التخصيص الممنوعة مساوية الى ∞ اما عدم التوازن فيتحقق باضافة صف او عمود وهي (وحسب الحاجة) و بتكلفة مساوية للصفر كما في المثال الاتي :

Example 5:

Four new machines M_1, M_2, M_3 and M_4 are to be installed in a machine shop. There are five vacant place A, B, C, D and E available. Because of limited space, machine M_2 cannot be placed at A. The assignment cost of machine (I) to place (J) is shown below

	A	B	C	D	E
M1	4	6	10	5	6
M2	7	4	—	5	4
M3	—	6	9	6	2
M4	9	3	7	2	3

Find the optimal assignment Schedule.

اربعة مكائن هي M_1, M_2, M_3, M_4 يراد تثبيتها في متجر للمكائن , وهناك خمسة اماكن شاغرة هي A, B, C, D, E وبسبب محدودية المكان , لايمكن تثبيت الماكنة M_2 في المكان C ولايمكن تثبيت الماكنة M_3 في المكان A تكاليف تخصيص المكائن للامكنة (تثبيتها) كما مدرج في الجدول الاتي :

	A	B	C	D	E
M1	4	6	10	5	6
M2	7	4	—	5	4
M3	—	6	9	6	2
M4	9	3	7	2	3

اوجد جدول التخصيص الامثل.

خطوات الحل:

1) نضيف صف وهمي لتحقيق التوازن وكما يلي :

(Table 1)

	A	B	C	D	E
M1	4	6	10	5	6
M2	7	4	—	5	4
M3	—	6	9	6	2
M4	9	3	7	2	3
Dummy	0	0	0	0	0

2) بالنظر لعدم امكانية تثبيت الماكنة M_2 في C ولعدم امكانية تثبيت الماكنة M_3 في A نفترض ان كلفة التثبيت ∞ ثم نطرح اقل قيمة في كل صف من قيم الصف فينتج الجدول (3)

(Table 2)

	A	B	C	D	E	اقل قيمة في كل صف
M1	4	6	10	5	6	4
M2	7	4	∞	5	4	4
M3	∞	6	9	6	2	2
M4	9	3	7	2	3	2
Dummy	0	0	0	0	0	0

(Table 3)

	A	B	C	D	E
M1	0	2	6	1	2
M2	3	0	∞	1	0
M3	∞	4	7	4	0
M4	7	1	5	0	1
Dummy	0	0	0	0	0

بالنظر لكون اقل قيمة في كل عمود صفر لذا نرسم اقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية في الجدول (4)

(Table 4)

	A	B	C	D	E
M1	0	2	6	1	2
M2	3	0	∞	1	0
M3	∞	4	7	4	0
M4	7	1	5	0	1
Dummy	0	0	0	0	0

بما ان عدد الخطوط المستقيمة = عدد الصفوف = عدد الاعمدة اذن الحل امثل

تكلفة التخصيص الامثل كما ورد في الجدول

Optimal Total cost = 4 + 4 + 2 + 2

= 12

Example 6:

A small work shop has five workers making five different types of chairs All the five workers are capable of making all the five type of chairs. The output per day workers and the profit for each type of chairs are given below

Workers	Chairs 1	2	3	4	5
A	7	9	4	8	6
B	4	9	5	7	8
C	8	5	2	9	8
D	6	5	8	10	10
E	7	8	10	9	9
Profit per Chairs	2	3	2	3	4

- **Which type of chairs should be assigned to worker in order to Maximize profit**

خطوات الحل:

1. نستخرج مصفوفة الارباح عن طريق ضرب كمية الانتاج الوارده في المصفوفة X ربح الكرسي الواحدة (2) فينتج :

Table (1)

Workers	Chairs 1	2	3	4	5
A	7*2	9*3	4*2	8*3	6*4
B	4*2	9*3	5*2	7*3	8*4
C	8*2	5*3	2*2	9*3	8*4
D	6*2	5*3	8*2	10*3	10*4
E	7*2	8*3	10*2	9*3	9*4

Table (2)

Chairs

Workers	1	2	3	4	5
A	14	27	8	24	24
B	8	27	10	21	32
C	16	15	4	27	32
D	12	15	16	30	40
E	14	24	20	27	36

2. نحول المصفوفة الى مصفوفة تكاليف بطرح جميع القيم من اكبر قيمة في المصفوفة (40) فتحول المصفوفة الى مصفوفة تكاليف ونتبع الخطوات السابقة

نبدأ بطرح اقل قيمة في كل صف

Table (3)

Workers	1	2	3	4	5	
A	26	13	32	16	16	13
B	32	13	30	19	8	8
C	24	25	36	13	8	8
D	28	25	24	10	0	0
E	26	16	20	13	4	4

ثم نطرح اقل قيمة في كل عمود

Table (4)

Workers	1	2	3	4	5
A	13	0	19	3	3
B	24	5	22	11	0
C	16	17	28	5	0
D	28	25	24	10	0
E	22	12	16	9	0
	13	0	16	3	0

Table (5)

Workers	1	2	3	4	5
A	0	0	3	0	3
B	11	5	6	8	0
C	3	17	12	2	0
D	15	25	8	7	0
E	9	12	0	6	0

3. أقل عدد من الخطوط المستقيمة اتلي تغطي القيم الصفرية ثلاثة وهي أقل من عدد الصفوف لذا تطرح أقل قيمة غير معطاة من جميع القيم غير المعطاة وتضيفها الى القيم الواقعة في تقاطع الخطوط المستقيمة أقل قيمة غير مغطاة في مثالنا (2)

Table (6)

Workers	1	2	3	4	5
A	0	0	3	0	5
B	9	3	4	6	0
C	1	15	10	0	0
D	13	23	6	5	0
E	9	12	0	6	2

لازالت عدد الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية أقل من عدد الصفوف المساوية لعدد الاعمدة لذا تكرر طرح أقل قيمة غير مغطاة وهي (3) فتنتج المصفوفة الاتية :

Workers	1	2	3	4	5
A	0	0	3	0	8
B	6	0	1	3	0
C	1	15	10	0	3
D	10	20	3	2	0
E	9	12	0	6	5

الحل امثل لان عدد الخطوط المستقيمة = عدد الصفوف = عدد الاعمدة
التخصيص كما مؤشر في الجدول

Total profit = 14 + 27 + 27 + 40 + 20 = 128

Example7:

A city corporation has decided carry out road repairs on main four arteries of the city. The government has agreed to make a special grant of Rs. 50 thousaud ID towards the cost with a condition that the repairs be done at the lowest cost and quickest time. If the conditions warrant, a supplementary token grant will also be considered favorably. The corporation has floated tenders and five contractors have sent in their bids. In order to expedite work, one road will be awarded to only one contractor.

مثال (7) :-

قرر مجلس البلدية اجراء عمليات صيانة طرق الرئسية الاربعة الرئسية للمدينة حيث وافقت الحكومة على تقديم منحه خاصة بمبلغ 50 الف لتغطية التكاليف و على شرط ان تتم اعمال الصيانة باقل التكليف واسرع وقت و اذا كانت الظروف مؤاتية فسيتم الموافقة على صرف المنحة الرمزية التكميلية , وقد طرحت المناقصة و يتم اختيار عروض خمس من المقاولين
وسيتم منح طريق واحد لكل مقاول من اجل تسريع العمل

	R_1	R_2	R_3	R_4
C_1	9	14	19	15
C_2	7	17	20	19
C_3	9	18	21	18
C_4	10	12	18	19
C_5	10	15	21	16

(a) Find the best way of assigning the repair work to the contractors and the costs.
(b) If it is necessary to seek supplementary grants, what should be the amount sought?
(c) Which of the five contractors will be unsuccessful in his bid?

a)ابحث عن انسب طريقة لتوزيع التكاليف و اعمال الصيانة على المقاولين .
b) اذا كان من الضروري السعي للحصول على منح تكميلية , فما هو المبلغ المطلوب ؟
c) اي من المقاولين الخمسة سيفشل في عرضه .

Solution: -

(a) The given cost matrix is not balanced; add one dummy column (road, R5,) with a zero cost in that column . The cost matrix So obtained is given in Table 14.50.

الحل : مصفوفة التكلفة المغطاة غير متوازنة , يتم اضافة عموداً وهمياً واحداً (الطريق R5) بتكلفة صفر في العمود و كما يلي :-

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5 (Dummy)
C_1	9	14	19	15	0
C_2	7	17	20	19	0
C_3	9	18	21	18	0
C_4	10	12	18	19	0
C_5	10	15	21	16	0

Apply the Hungarian method to solve this problem. This is left as an exercise for the reader. An optimal assignment is shown in following table .

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
C_1	1	1	0	~~0~~	1
C_2	0	5	2	5	2
C_3	~~0~~	4	1	2	0
C_4	3	0	~~0~~	5	2
C_5	1	1	1	0	~~0~~

The total minimum cost (in $) and optimal assignment made are as follows:

يتم حساب اجمالي الحد الادنى للتكلفة (بالدولا) و التخصيص الامثل كما يلي :-

الطريق المتعاقد الكلفة							
	Road	:	R1	R2	R3	R4	R5
	Contractor	:	C2	C4	C1	C5	C3
	Cost	:	7	12	19	16	0 = $

(b) Since total cost exceeds 50 thousand, the excess amount of (= 54 – 50) is to be sought as supplementary grant.

ب) بما ان التكلفة الاجمالية تتجاوز 50 الف فأن المبلغ الزائد = (54 – 50) ينبغي السعي للحصول عليها كمنحة تكميلية

(c) contractor.C3 who has been assigned to dummy row, R5 (roads) loses out in the bid.

ج) المقاول الثالث (C3) الذي تم تخصيصه للصف الوهمي (طريق R5) يخسر في العرض .

Example 8 :

A company has one surplus truck in each of the cities A, B, C, D and E and one deficit truck in each of the cities 1, 2, 3, 4, 5 and 6. The distance between the cities in kilometers is shown in the matrix below . Find the assignment of trucks from cities in surplus to cities in deficit so that the total distance covered by vehicles is minimum.

	1	2	3	4	5	6
A	12	10	15	22	18	8
B	10	18	25	15	16	12
C	11	10	3	8	5	9
D	6	14	10	13	13	12
E	8	12	11	7	13	10

Solution: -

نضيف صف وهي كي تكون عدد الصفوف مساوي لعدد الاعمدة وكما يلي :

Table (1)

	1	2	3	4	5	6	اقل قيمة في الصف
A	12	10	15	22	18	8	8
B	10	18	25	15	16	12	10
C	11	10	3	8	5	9	3
D	6	14	10	13	13	12	6
E	8	12	11	7	13	10	7
Dummy	0	0	0	0	0	0	0

نطرح اقل قيمة في كل صف فينتج جدول (2)

Table (2)

	1	2	3	4	5	6
A	4	2	7	14	10	0
B	0	8	15	5	6	2
C	8	7	0	5	2	6
D	0	8	4	7	7	6
E	1	5	4	0	6	3
Dummy	0	0	0	0	0	0

بما ان كل عمود وكل صف فيه قيم صفرية لذا نرسم اقل عدد من الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية وكما يلي :

Table (3)

	1	2	3	4	5	6
A	4	2	7	14	10	0
B	0	8	15	5	6	2
C	8	7	0	5	2	6
D	0	8	4	7	7	6
E	1	5	4	0	6	3
Dummy	0	0	0	0	0	0

بما ان اقل عدد من الخطوط اقل من عدد الصفوف (اقل من 5) فأن الحل غير امثل.
لذا نطرح اقل قيمة غير مغطاة من جميع القيم غير المغطاة ونضيفها الى نقاط تقاطع الخطوط المستقيمة فينتج الجدول (4)

Table (4)

	1	2	3	4	5	6
A	6	2	7	14	10	0
B	0	6	13	3	4	0
C	10	7	0	5	2	6
D	0	6	2	5	5	4
E	3	5	4	0	6	3
Dummy	2	0	0	0	0	0

الحل الوارد في (**Table 4**) غير امثل لذا نطرح اقل قيمة غير مغطاة **(2)**

Table (5)

	1	2	3	4	5	6
A	6	0	5	12	8	0
B	0	4	11	1	2	0
C	12	7	0	5	2	8
D	0	4	0	3	3	4
E	5	5	4	0	6	5
Dummy	4	0	0	0	0	2

الحل الوارد في الجدول السابق (**Table 5**) امثل و التخصص كما يلي :

	1	2	3	4	5	6
A	6	0	5	12	8	~~0~~
B	~~0~~	4	11	1	2	0
C	12	7	0	5	2	8
D	0	4	~~0~~	3	3	4
E	5	5	4	0	6	5
Dummy	4	~~0~~	~~0~~	~~0~~	0	2

بما ان عدد الخطوط المستقيمة التي تغطي القيم الصفرية = 6 لذا فأن الحل امثل والتخصص الامثل هو الاتي :

Since there is no row and no column without assignment, the third feasible solution is the optimal solution. The optimal assignment pattern is

city A should supply the vehicle to city 2,

city B should supply the vehicle to city 6,

city C should supply the vehicle to city 3,

city D should supply the vehicle to city 1,

city E should supply the vehicle to city 4, and

minimum distance travelled = (10 + 12 + 3 + 6 + 7) km = 38 km.

No truck is supplied to city 5.

اسئلة فصل الرابع

1-

Find the last cost allocated from the following data

Workers	P	Q	R	S	T
A	85	75	65	125	75
B	90	78	66	132	78
C	75	66	57	114	69
D	80	72	60	120	72
E	76	64	56	112	68

2 -

Five men are available to do five different jobs. From past records, the time (in hours) that each man takes to do each job is known and given in the following table:

	I	II	III	IV	V
A	2	9	2	7	1
B	6	8	7	6	1
C	4	6	5	3	1
D	4	2	7	3	1
E	5	3	9	5	1

Find the assignment of men to jobs that will minimize the total time taken.

3 -

A pharmaceutical company is producing a single product and is selling it through five agencies situated in different cities. All of a sudden, there is a demand for the product in another five cities not having any agency. The company is faced with the problem of deciding on how to assign the existing agencies to dispatch the product to needy cities in such a way that the travelling distance is minimized. The distance between the surplus and deficit cities (in km) is given in the following table.

	a	b	c	d	e
A	160	130	115	190	200
B	135	130	130	160	175
C	140	110	125	170	185
D	50	50	80	80	110
E	55	35	80	80	105

Determine the optimum assignment schedule

4 -

A national truck rental service has a surplus of one truck in each of the cities, 1, 2, 3, 4, 5 and 6; and a deficit of one truck in each of the cities 7, 8,9, 10, 11 and 12. The distances (in km) between the cities with a surplus and cities with deficit are displayed in the table:

	7	8	9	10	11	12
1	31	62	29	42	15	41
2	12	19	39	55	71	40
3	17	29	50	41	22	22
4	35	40	38	42	27	33
5	19	30	29	16	20	23
6	72	30	30	50	41	20

5 -

A departmental head has four subordinates and four tasks to be performed. The subordinates differ in efficiency and the tasks differ in their intrinsic difficulty. His estimates of the times that each man would take to perform each task is given below in the matrix:

	I	II	III	IV
A	8	26	17	11
B	13	28	4	26
C	38	19	18	15
D	19	26	24	10

How should the tasks be allocated to subordinates so as to minimize the total man-hours?

6-

A lead draftsman has five drafting tasks to accomplish and five idle draftsmen. Each draftsman is estimated to require the following number of hours for each task.

	A	B	C	D	E
1	60	50	100	85	95
2	65	45	100	75	90
3	70	60	110	97	85
4	70	55	105	90	93
5	60	40	120	85	97

If each draftsman costs the company Rs. 15.80 per hour including overhead, find the assignment of draftsmen to tasks that will result in the minimum total cost, what is the total cost?

7-

The marketing director of a multi-unit company is faced with a problem of assigning 5 senior managers to six zones. From past experience he knows that the efficiency percentage judged by sales, operating costs, etc., depends on manager-zone combination. The efficiency of different managers is given below:

	I	II	III	IV	V	VI
A	73	91	87	82	78	80
B	81	85	69	76	74	85
C	75	72	83	84	78	91
D	93	96	86	91	83	82
E	90	91	79	89	69	76

Find out which zone will be managed by a junior manager due to non-availability of a senior manager.

8-

Solve the following assignment problem:

	I	II	III	IV	V
1	11	17	8	16	20
2	9	7	12	6	15
3	13	16	15	12	16
4	21	24	17	28	26
5	14	10	12	11	13

9-

Five wagons are available at stations 1, 2, 3, 4 and 5. These are required at five stations I, II, III, IV and V. the mileages between various stations are given by the table below. How should the wagons be transported so as to minimize the total mileage covered?

	I	II	III	IV	V
1	10	5	9	18	11
2	13	9	6	12	14
3	3	2	4	4	5
4	18	9	12	17	15
5	11	6	14	19	10

Solution: -

10-

A fast-food chain wants to build four stores. In the past the chain has used six different construction companies, and having been satisfied with each, has invited them to bid for each job. The final bids (in thousands of rupees) are shown in the following table:

		Construction companies					
		1	2	3	4	5	6
Stores	1	85.3	90	87.5	82.4	89.1	91.3
	2	78.9	84.5	99.4	80.4	89.3	88.4
	3	82.0	31.3	28.5	66.5	80.4	109.7
	4	84.3	34.6	86.2	83.3	85.0	85.5

Since the fast-food chain wants to have each of the new stores ready as quickly as possible, it will allot at most one job to a construction company. What assignment will result in the minimum total cost?

11-

A manufacturer of complex electronic equipment has just received a sizable contract and plans to subcontract part of the job. He has solicited bids for 6 subcontracts from 3 firms. Each job is sufficiently large and any firm can take only one job. The table below shows the bids as well as the cost estimates (in $ of rupees) for doing the job internally. Not more than three jobs can be performed internally.

Firm \ Job	1	2	3	4	5	6
1	44	67	41	53	48	64
2	46	69	40	45	45	68
3	43	73	37	51	44	62
Internal	50	65	35	50	46	63

Find the optimal assignment that will result in minimum total cost.

12-

A company has a team of four salesmen and there are four districts where the company wants to start its business. After taking into account the capabilities of salesmen and the natrue of districts, the company estimates that the profit per day in rupees for each salesman in each district is as below.

	1	2	3	4
A	16	10	14	11
B	14	11	15	15
C	15	15	13	12
D	13	12	14	15

Find the assignment of salesmen to various districts which will yield maximum profit.

13-

A company has four territories open and four salesmen available for assignment. The territories are not equally rich in their sales potential. It is estimated that a typical salesman operating in each territory would bring in the following annual sales:

Territory:	I	II	III	IV
Annual sales ($):	60,000	50,000	40,000	30,000

The four salesmen are also considered to differ in ability; it is estimated that working under the same conditions, their yearly sales would be proportionately as follows:

Salesman:	A	B	C	D
Proportion:	7	5	5	4

If the criterion is maximum expected total sales, the intutive answer is to assign the best salesman to the richest territory, the next best salesman to the second richest territory and so on. Verify this answer by the assignment method

14-

A small garment making unit has five tailors stitching five different types of garments. all the five tailors are capable of stitching all the five types of garments. The output per day per tailor and the profit ($) for each type of garment are given below:

Tailors	1	2	3	4	5
A	7	9	4	8	6
B	4	9	5	7	8
C	8	5	2	9	8
D	6	5	8	10	10
E	7	8	10	9	9
Profit ($) per garment	2	3	2	3	4

(i) Which type of garment should be assigned to which tailor in order to maximize profit. assuming that there are no other constraints?

(ii) If tailor D is absent for a specified period and no other substitute tailor is available what should be the optimal assignment?

15-

Welldone Company has taken the third floor of a multi-storeyed building for rent with a view to locate one of their zonal offices. There are five main rooms on this floor to be assigned to five managers. Each room has its own advantages and disadvantages. Some have windows, some are closer to the washrooms or to the canteen or secretarial pool. The rooms are all of different sizes and shapes. Each of the five managers were asked to rank their room preferences amongst the rooms 301, 302, 303, 304 and 305.

Their preferences were recorded in a table as indicated below.

		MANAGER		
M1	M2	M3	M4	M5
302	302	303	302	301
303	304	301	305	302
304	305	304	304	304
	301	305	303	
		302		

Most of the managers did not list all the five rooms since they were not satisfied with some of these rooms and they left off these from the list. Assuming that their preferences can be quantified by numbers, find out as to which manager should be assigned to which room so that their total preference ranking is minimum.

16-

The captain of a cricket team has to allot five middle batting positions to five batsmen the average runs scored by each batsman at these positions are as follows:

	Batting position				
Batsman	I	II	III	IV	V
P	40	40	35	25	50
Q	42	30	16	25	27
R	50	48	40	60	50
S	20	19	20	18	25
T	58	60	59	55	53

(i) Find the assignment of batsmen to positions which would give the maximum number of runs.

(ii) If another batsman 'U' with the following average runs in batting positions as given

below:

Batting positions:	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
Average runs:	**45**	**52**	**38**	**50**	**49**

is added to the team, should he be included to play in the team? If so, who will be replaced by him?

17-

A solicitor's firm employs typists on hourly piece rate basis for their work. There are for typists and their charges and speeds are different. According to an earlier understanding only one job is given to one typist and the typist is paid for full hour even if he works for a fraction of an hour. Find the least cost allocation for the following data:

Typist	Rate/hour ($)	NO. of pages typed/hour
A	5	12
B	6	14
C	3	8
D	4	10
E	4	11

Job	Number of pages
P	199
Q	175
R	145
S	298
T	178

الفصل الخامس

المخططات الشبكية

تحليل المخططات الشبكية Network Analysis

1-5 المقدمة

يعد التخطيط للمشاريع من اهم مستلزمات انجاحها ولقد ازدادت اهمية التخطيط بزيادة حجم المشاريع وتعقد اساليب تنفيذها لاسيما تلك المشاريع التي تشترك فيها العديد من الشركات معاً في التخطيط والتنفيذ . والى حد قريب وربما لازالت في العديد من الدول يعتمد التخطيط اسلوب مخططات جانت Gantt charts وهو تمثيل بياني وضع من قبل احد رواد علم الادارة (هنري جانت) عام 1916 . وقد وجهت العديد من الانتقادات الى هذة المخططات منها :

1. لاتوضح اي من الانشطة تتمتع واي منها لا يتمتع بمتسع من الوقت يسمح لها بالتأخير.
2. لاتوضح ما اذا كان توزيع الامكانيات المتاحة على انشطة المشروع توزيعاً امثلاً ام لا.
3. لاتوضح اي من الانشطة يحتاج الى اهتمام ومراقبة خاصة .
4. لاتوضح بدقة العلاقة بين انشطة المشروع (علاقات الترابط)

وقد لاتظهر نواحي القصور اعلاه في المشاريع الصغيرة الا انه وبعد ظهور المشاريع العملاقة مثل مشروع صواريخ بولاريس ومد خط انابيب الاسكا ومحطات الاقمار الصناعية وبناء المفاعلات النووية اصبحت هناك حاجة ماسة لاسلوب تخطيط ومتابعة يتناسب مع التطورات في المشاريع ويعالج النواقص في الاسلوب السابق , اسلوب التحليل الشبكي الذي اعتمد طريقتين يختلفان في مصدر نشأتهما ويتشابهان في الاسلوب والهدف هما :

أ. اسلوب المسار الحرج Critical path method (C.P.M)

ب. اسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت) Program Evolution and Review Technique (P.E.R.T)

بأستخدام المخططات الشبكية اصبح بالامكان استخدامها في العمليات الاتية :

1. **التخطيط :** يوضح المخطط المستقبلي تتابع الانشطة والوظائف ويمكن من استبعاد الوظائف غير الضرورية والتركيز على الوظائف الضرورية .
2. **الجدولة :** بعد اكمال رسم المخطط الشبكي يكون بالامكان الانتقال للمرحلة الثانية وهي حساب وتقدير الوقت اللازم للشروع ولكل نشاط من نشاطاتة وتحديد الزمن الفائض في كل وظيفة من الوظائف وكذلك الوظائف التي يؤدي تاخيرها الى تاخير تنفيذ المشروع ككل .
3. **توزيع الموارد :** من خلال معرفة الوقت الاضافي يمكن التوصيل الى صيغة مثلى لاستخدام موارد المشروع وتسخيرها بالصيغة المثلى .
4. **الرقابة والتحكم :** ان الازمنة التي يتم تحديدها في المخطط الشبكي تكون اساساً للرقابة كما يمكن حساب الانحراف المعياري للوقت .
5. **الاتصالات :** ان المعلومات التي تتضمنها الشبكة والتي تعطي صورة كاملة للمشروع تمكن كل فرد من معرفة المطلوب منه في المشروع وكيف يتعامل مع الاخرين .

2-5 خطوات استخدام المخططات الشبكية

1. تعريف المشروع وتحديد جميع الانشطة المتعلقه به .
2. تحديد العلاقات بين الانشطة المختلفة وذلك بتحديد اي الانشطة تسبق او تتبع الانشطه الاخرى (تحديد التسلسل بين الانشطة).
3. رسم الشبكة الممثلة للمشروع .
4. تقدير الوقت و الكلفة المصاحبة لكل نشاط .
5. حساب اطول المسارات المختلفة في الشبكة (المسار الحرج) و يمثل اقل زمن لتمثيل المشروع
6. استخدام الشبكة والمعلومات المتوفرة عليها في تخطيط و برمجة ورقابة المشروع .

3-5 تعاريف لبعض المصطلحات المستخدمة في التحليل الشبكي

1. **شبكة الاعمال Network**

هو عبارة عن تمثيل بياني للمشروع بهيئة اسهم تمثل الانشطة ودوائر تمثل الاحداث.

2. **المشروع Project**

مجموعة من الانشطة التي تتميز بأن لها بداية محدده ونهاية محدده ومن امثلة ذلك انشاء مبنى او جسر او بناء مخازن.

3. **النشاط Activity**

وهو جزء من المشروع يتم تمثيلة بسهم (→) ولأنجازه يتطلب موارد مادية وبشرية ويستغرق وقت مثل نشاط صب الاساس لمبنى او صب السقف او بناء جدران.

4. **النشاط الوهمي Dummy Activity**

ويمثل بسهم منقط (⇠) ولا يتطلب وقت ولا موارد بل يستخدم لتوضيح العلاقة بين الانشطة في المخطط الشبكي وقد يمثل وقت فقط كما في حال انتظار الصب لحين جفافه.

5. **الحدث Event**

لحظة معينة من الزمن وتمثل لحظة البداية لنشاط وعندئذ تدعى حدث البداية او لحظة نهاية لنشاط وعندئذ تدعى حدث النهاية ويمثل الحدث في المخطط الشبكي بدائرة (O) .

6. **المسار Path**

سلسلة من الانشطة تربط حدث البداية بحدث النهاية.

7. **المسار الحرج Critical path**

اطول مسار يصل بين حدث البداية وحدث النهاية وتدعى الانشطة الواقعة علية بالانشطة الحرجة Critical Activity ويمثل اقل زمن يمكن فيه انجاز المشروع.

4-5 أساليب رسم المخطط الشبكي

هنالك أسلوبين

اولآ - أسلوب تمثيل النشاط بسهم Activity on Arrow

و في هذا الاسلوب يمثل كل نشاط بسهم و حدث البداية و كذالك حدث النهاية للنشاط بدائرة (Node) وهذا الاسلوب نعتمده في الفصل .

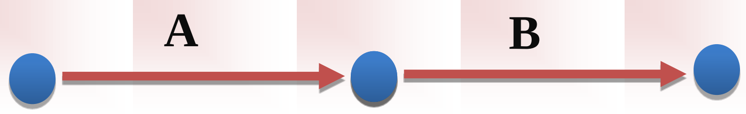
ثانيآ ـ أسلوب تمثيل النشاط بدوائر Activity on Node

و في هذا الاسلوب تمثيل الانشطة بدوائر و العلاقات بين الانشطة يتم تمثيلها بأسهم .

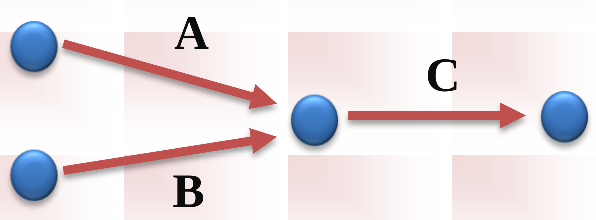
5-5 قواعد رسم المخططات الشبكية

1. تمثل العلاقات بين الانشطة كما يلي :

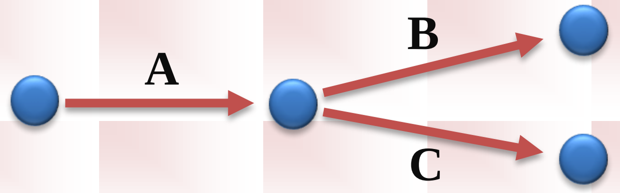
أ. اذا كان النشاط (B) يبدأ بعد انتهاء النشاط (A) فيكون التمثيل كما يلي :



ب. اذا لم يكن بالامكان البدأ بالنشاط (C) الا بعد الانتهاء من (A) و (B) عندئذ يتم تمثيلها كما يلي:

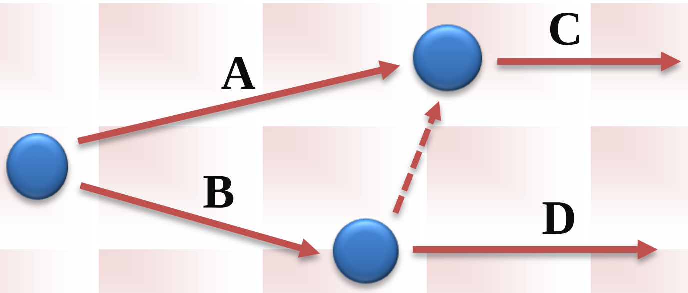


ج. اذا كان النشاطين (C,B) يبدأن بعد انجاز النشاط (A) عندئذ يمثلان كما يلي :



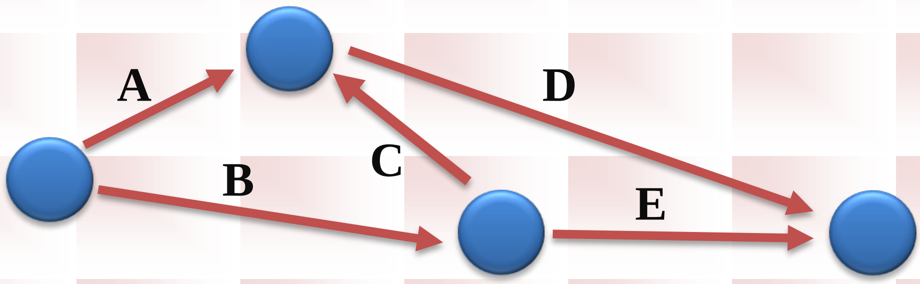
مع ملاحظة ان تعطل احدهما (C,B) لايؤثر على الاخر

د. اذا كان النشاط (C) لايمكن البدأ به الا بعد الانتهاء من النشاطين (A,B) والنشاط (D) يمكن البدأ به بعد الانتهاء من نشاط (B) مباشرةً عندئذ يمكن تمثيل العلاقة بالاتي:

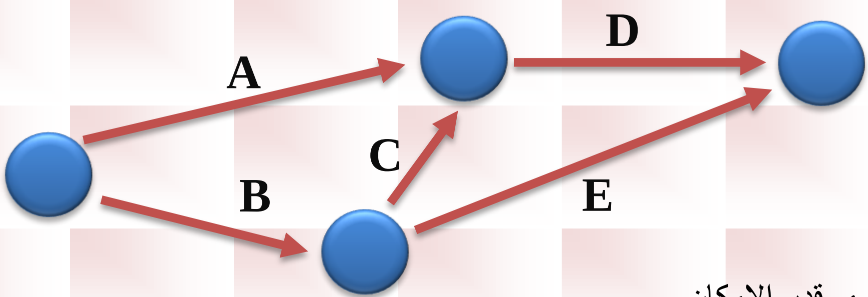


2. كل نشاط يجب ان يمثل بسهم واحد والاسهم للمشروع يجب ان تكون بأتجاه واحد (عادةً من اليسار الى اليمين)

فالشكل الاتى خاطئ

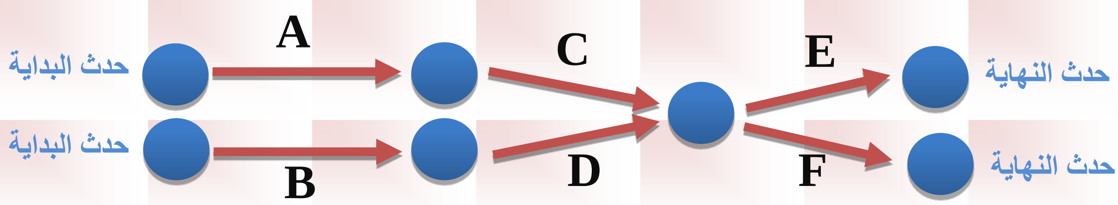


والشكل الصحيح هو

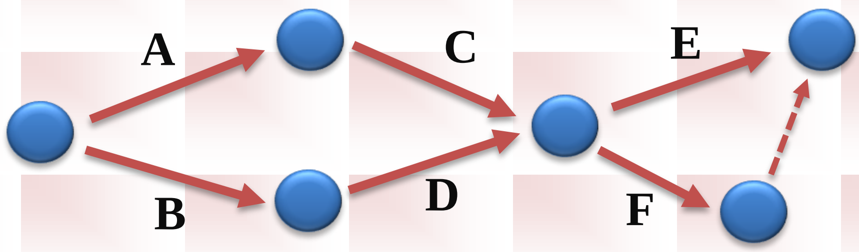


3. يجب تجنب تقاطع الاسهم قدر الامكان
4. للشبكة حدث بداية واحد وحدث نهاية واحد

هذا الشكل خاطئ



والشكل الصحيح



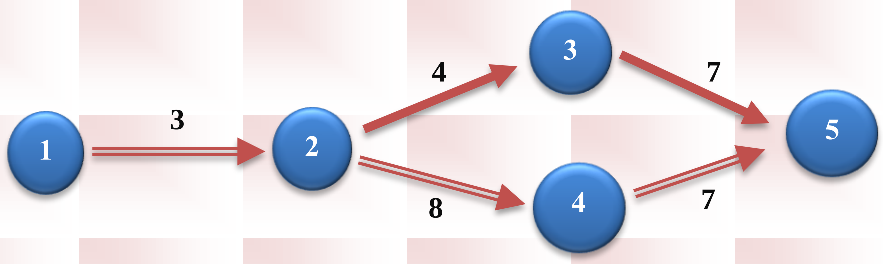
6-5 اسلوب المسار الحرج Critical path (CPM)

يعتمد هذا الاسلوب على تحديد زمن محدد واحد لكل نشاط في المخطط الشبكي لذا فهو يستخدم في المشاريع التي تتكرر بأستمرار الى الحد الذي يمكن تقدير زمن واحد لكل نشاط من انشطتها بسبب الخبرة المتراكمة.

والمسار الحرج هو أطول مسار في المخطط الشبكي وأقل فترة يمكن ان ينفذ بها المشروع ويتكون من الانشطة الحرجة وهي الانشطة التي يترتب على التأخير في تنفيذها تأخير المشروع بالكامل. ويمكن الوصول الى المسار الحرج بأحدى الطريقتين :

أ- الطريقـــة الحسابية او البيانية Graphical or Arithmetic Method

في هذة الطريقة يتم حساب أزمنة جميع المسارات في المخطط الشبكي والتي تصل حدث البداية بحدث النهاية والمسار الذي يكون زمنه الاكبر هو المسار الحرج فأذا كان لدينا المخطط الشبكي الاتي :



فأن هنالك مسارين هما :

المسار الاول :- 1-2-3-5 الزمن اللازم لأنجاز 3+4+7 = 14

المسار الثاني :- 1-2-4-5 الزمن اللازم لأنجازه 3+8+7 = 18

المسار الثاني هو المسار الاطول لذا فهو يعتبر المسار الحرج.

هذه الطريقة لاتصلح للمشاريع الكبيرة لكثرة المسارات ويتطلب حساب المسارات جميعها زمن وجهد كبيرين.

ب- طريقة الزمن المبكر والزمن المتأخر في تحديد المسار الحرج

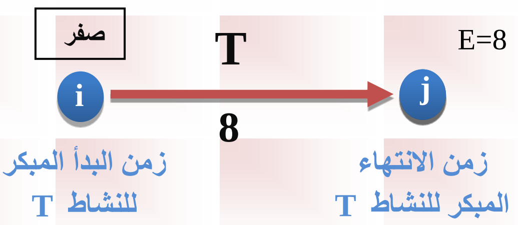
1. نفرض الزمن المبكر للحدث الاول في المشروع = صفر

2. تحديد الزمن المبكر لكل نشاط من انشطة المشروع (Earliest start time) ويرمز له بالرمز E او Esi وهو الزمن الذي لايمكن للنشاط ان يبدأ قبله ولتحديده نتبع القواعد الاتية :

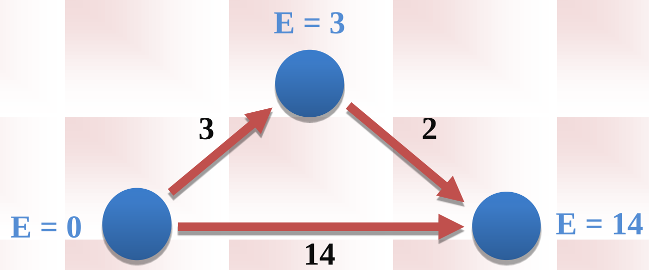
القاعدة الاولى : يتم حساب الزمن المبكر بأتجاه اسهم المخطط الشبكي مع افتراض الزمن المبكر للحدث الاول = صفر.

القاعدة الثانية : الزمن المبكر لاي نشاط = زمن البدأ المبكر + زمن انجاز النشاط.

$$ET_j = ET_i + D_{ij}$$



ملاحظة : في حالة وجود تفرع نأخذ الزمن الاكبر



3. زمن انجاز المشروع هو الزمن المبكر لأخر حدث في المشروع.

4. يحتسب الزمن المتأخر (يرمز له بالرمز L) بأتباع الخطوات الاتية :

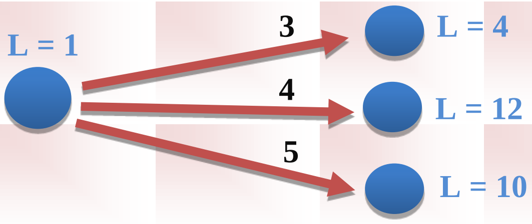
A. نفترض ان الزمن المتاخر للحدث الاخير مساوي للزمن المبكر لذلك الحدث

B. يحسب بعكس اتجاه الاسهم

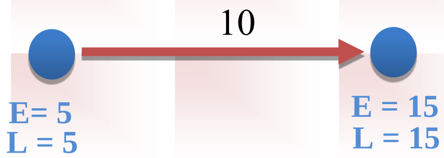
C. زمن البدء المتأخر = زمن الانجاز المتأخر – زمن النشاط

وفي حالة تعدد الانشطة والاحداث نأخذ اقل زمن يوصلنا للحدث وكما يلي :

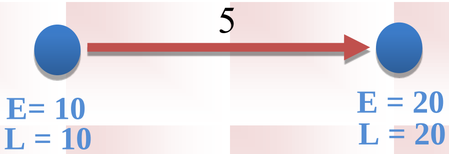
L = 4 – 3 = 1



.5 النشاط الحرج هو النشاط الذي يشترط ان تكون الزمن المبكر والمتأخر لحدث البداية وحدث النهاية فيه متساويان وان حاصل طرح الزمن المبكر لحدث بداية النشاط من الزمن المبكر لحدث نهاية النشاط مساوي لزمن تنفيذ النشاط



النشاط اعلاه نشاط A-B أعلاه حرج لان الازمنة المبكر والمتأخر لكل من حدث البداية والنهاية متساويان اضافة الى ان (زمن التنفيذ) 15- 5 = 10

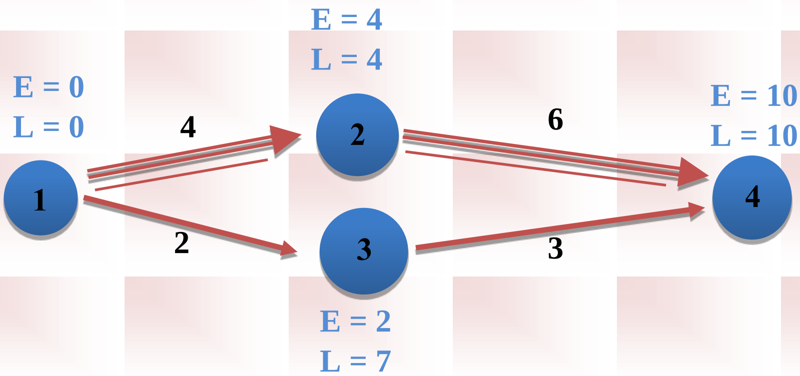


لايتعبر نشاط C-D حرج لان 10 = 10- 20 اي لايساوي زمن التنفيذ و قدره 5

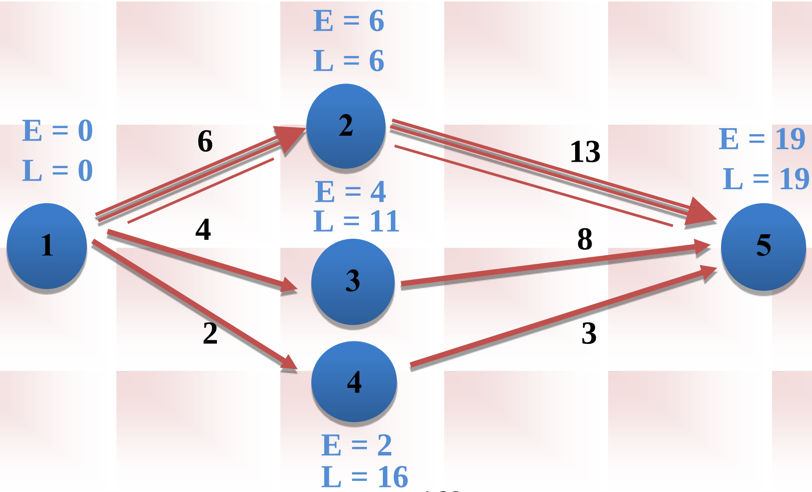
.6 مجموع الانشطة الحرجة تمثل المسار الحرج

.7 زمن المسار الحرج مساوي الى مجموع ازمنة الانشطة الحرجة

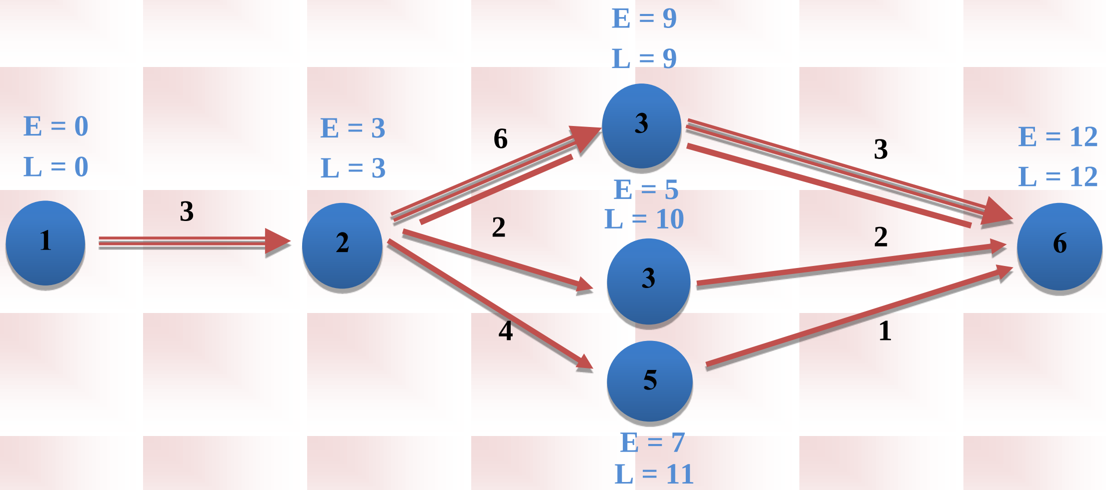
E1:



E2:



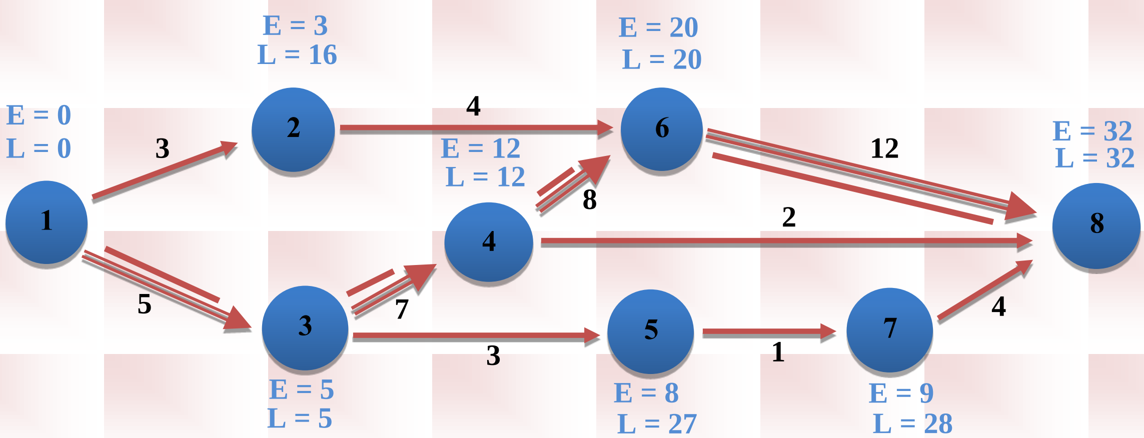
E3:



Example 4: A project Schedule has the following characteristics

Activity	Percedecessor Activity	Time (weeks)
1 – 2	——	3
1 – 3	——	5
3 – 4	1 – 3	7
3 – 5	1 – 3	3
2 – 6	1 – 2	4
5 – 7	3 – 5	1
4 – 6	3 – 4	8
4 – 8	3 – 4	2
6 – 8	2 – 6 and 4 – 6	12
7 – 8	5 – 7	4

a) Construct the net work
b) Compute (E) and (L) time
c) Find the critical path



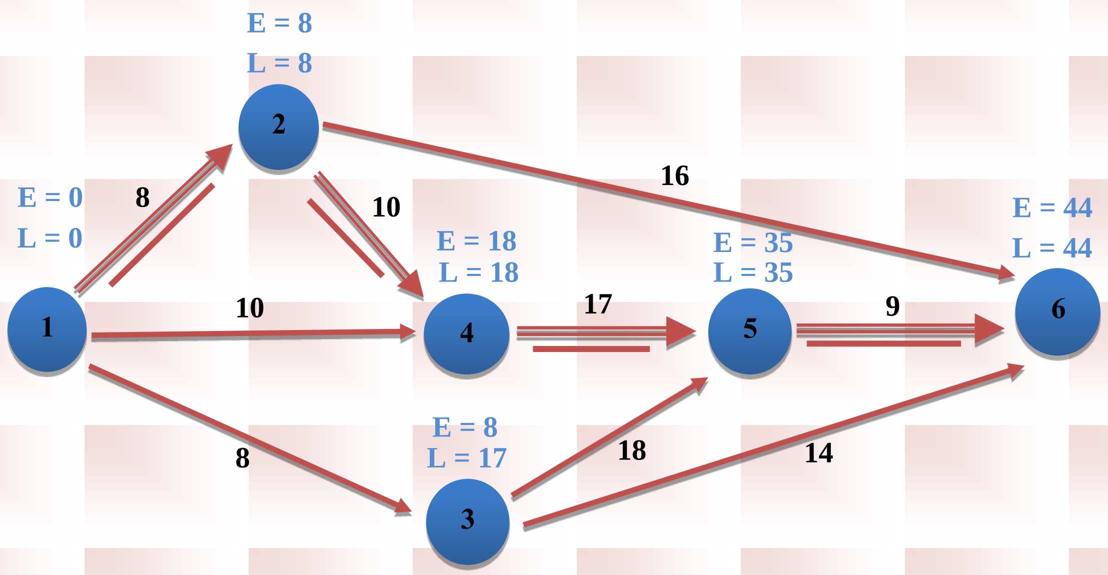
The Critical path = 1 – 3 – 4 – 6 – 8
The Total critical Time = 32

Example 5: **A project Schedule has the following characteristics**

Activity	Percedecessor Activity	Time (weeks)
1 – 2	—	8
1 – 3	—	8
1 – 4	—	10
2 – 4	1 – 2	10
2 – 6	1 – 2	16
3 – 5	1 – 3	18
3 – 6	1 – 3	14
4 – 5	2 – 4 and 1 – 4	17
5 – 6	4 – 5 and 3 – 5	9

a) Construct the net work
b) Compute (E) and (L) for each event
c) Find the critical path

Solution :-



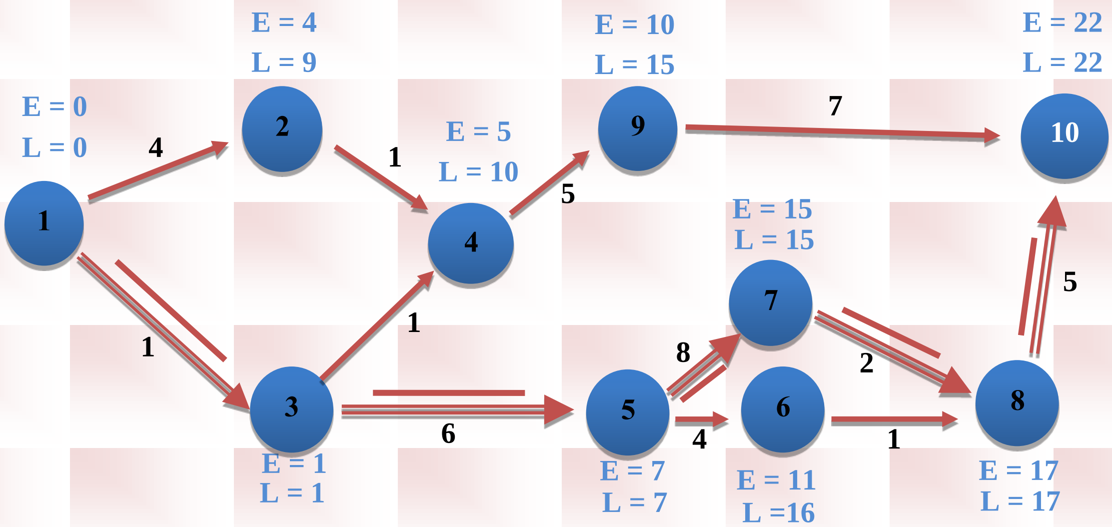
The Critical path = 1 – 2 – 4 – 5 – 6
The Total critical Time = 44

Example 6: **A project Schedule has the following characteristics**

Activity	Time (weeks)	Activity	Time (weeks)
1 – 2	4	5 – 6	4
1 – 3	1	5 – 7	8
2 – 4	1	6 – 8	1
3 – 4	1	7 – 8	2
3 – 5	6	8 – 10	5
4 – 9	5	9 – 10	7

a) Construct the net work
b) Compute (E) and (L) for each event
c) Find the critical path

Solution :-



The Critical path = 1 – 3 – 5 – 7 – 8 - 10
The Total critical Time = 22

6-5 اسلوب بيرت PERT

1. يمتاز اسلوب بيرت عن اسلوب المسار الحرج في تقدير زمن انجاز النشاط فأسلوب المسار الحرج يعتمد على تقدير زمن انجاز واحد لكل نشاط لذا فهو يصلح للمشاريع المتكررة والتي تتوافر خبرات كبيرة لدى الادارة بحيث يمكنها اعتماد زمن واحد لانجاز كل نشاط اما اسلوب بيرت فالحال يختلف اذ تعتمد ثلاث تقديرات للزمن (فهو اسلوب احتمالي) بسبب عدم التأكد من فترة انجاز الأنشطة وهذه الازمنة هي :

أ- الزمن التفاؤلي Optimistic time (t_o)

وهو اقل زمن متوقع لانجاز النشاط ويتم تحديده بناءاً على توقع توافر الظروف المثلى للانجاز.

ب- الزمن المتشائم Pessimistic time (tp)

وهو بعكس الزمن السابق ويحدد على اساس توقع اسوء الظروف.

ج- الزمن الاكثر احتمالاً Most likely time (tm)

وهذا الزمن هو الاكثر واقعية ويحدد على اساس الظروف الطبيعية التي لاتخلو من بعض المعوقات اثناء التنفيذ.

2. ومن خلال الازمنة الثلاث يتم حساب الزمن المتوقع (Expected time) ويمثل الوسط الحسابي (μ) يتم استخراج الزمن المتوقع وفق توزيع بيتا وكما يلي :

$$\text{Mean (Expected time) } (t_e) = \mu = \frac{t_e+4t_m+t_p}{6}$$

3. يتم احتساب المسار الحرج اعتماداً على الزمن المتوقع.

4. تحديد الانحرافات المعيارية للانشطة الحرجة

وتستخرج بأستخدام القانون الاتي (بعد ان يتم تحديد الانشطة الحرجة) حيث يستفاد من الانحراف المعياري في تحديد احتمال تنفيذ المشروع

$$\text{الانحراف المعياري للمسار الحرج } \sigma = \sqrt{\text{تباينات الانشطة الحرجة}} = \sqrt{\sigma^2}$$

5. يتم استخراج التباين للانشطة الحرجة بأستخدام القانون الاتي:

$$\text{Variance (V)} = \sigma^2 = \left(\frac{t_p - t_o}{6}\right)^2$$

6. تتمكن الادارة من معرفة احتمال تنفيذ اي مشروع في اي وقت عن طريق استخدام العلاقة الاتية :

$$\text{الدرجة المعيارية (Z) Standard normal distribution} = \frac{\text{زمن المسار الحرج} - \text{الزمن المستهدف}}{\sigma}$$

و (Z) تتبع التوزيع الطبيعي القياسي بالتالي امكان استخدامها في تحديد احتمال تنفيذ المشروع بأستخدام جداول التوزيع الطبيعي (A) .

مثال7 : توفرت لديك البيانات الاتية بصدد احد المشاريع

الزمن المتشائم (t_p)	الزمن الاكثر احتمالاً (t_m)	الزمن المتفائل (t_o)	النشاط
5	4	3	1-2
7	5	3	1-3
10	9	8	2-3
7	6	5	3-4

والمطلوب :-

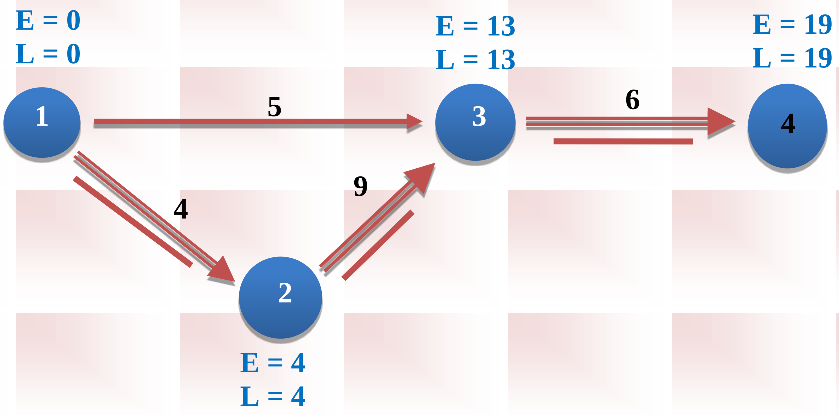
1. رسم شبكة الاعمال.
2. تحديد المسار الحرج.
3. حساب الانحراف المعياري للمشروع.
4. حساب احتمال تنفيذ المشروع في 20 يوم.

الحل :

1. تحسب الزمن المتوقع وكما يلي:

الوسط الحسابي (الزمن المتوقع) $t_e = \mu = \frac{t_e+4t_m+t_p}{6}$	النشاط
$\frac{3+4(4)+5}{6} = 4$	1-2
$\frac{3+4(5)+7}{6} = 5$	1-3
$\frac{8+4(9)+10}{6} = 9$	2-3
$\frac{5+4(6)+7}{6} = 6$	3-4

2. رسم الشبكة



يتضح ان المسار الحرج هو (4 – 3 – 2 – 1) وان زمن تنفيذ المشروع وفق المسار الحرج هو 19 يوم.

3. حساب الانحراف المعياري للمسار الحرج

أ- الانحرافات المعيارية للانشطة الحرجة بأستخدام القانون الاتي :

$$\sigma^2 = \left(\frac{t_p - t_0}{6}\right)^2$$

$$(1\text{-}2) = \left(\frac{5-3}{6}\right)^2 = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$(2\text{-}3) = \left(\frac{10-8}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$(3\text{-}4) = \left(\frac{7-5}{6}\right)^2 = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

ب- الانحراف المعياري للمسار الحرج

(الانحراف المعياري للمشروع ككل) = $\sqrt{\text{تباين الانشطة الحرجة } (\sigma^2)}$

$$= \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.57$$

ويستفاد من الانحراف المعياري في تحديد احتمال تنفيذ المشروع

4. حساب احتمال تنفيذ المشروع في 20 يوم

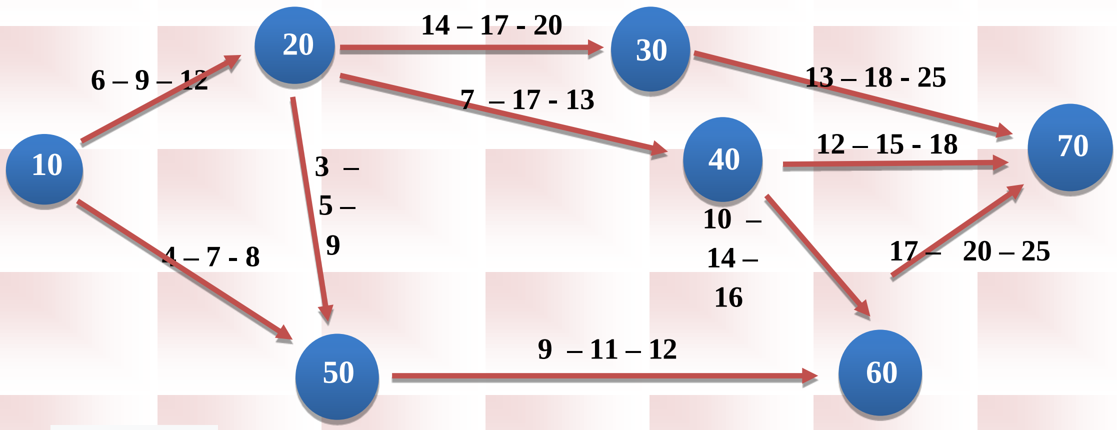
$$\text{الدرجة المعيارية } (Z) = \frac{\text{زمن المسار الحرج} - \text{الزمن المستهدف}}{\sigma}$$

$$Z = \frac{20-19}{0.57} = 1.8$$

وبالنظر لجدول **A** نجد ان احتمال تنفيذ المشروع هو = %96 = $P(Z \leq 1.8)$

Example 8 :

Consider the network shown following fig. For each activity, the three time estimates t_0, t_m and t_p given along the arrows in the $t_0 - t_m - t_p$ order. Determine variance and expected time for each activity.



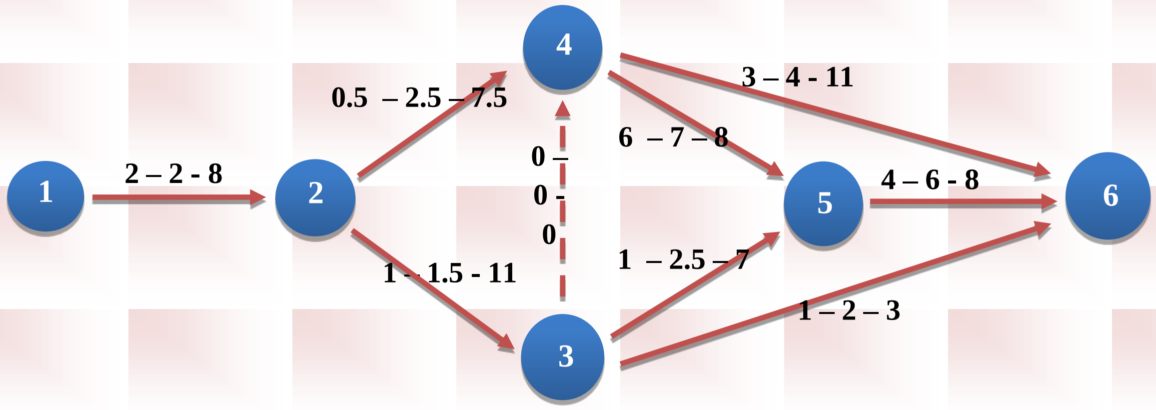
Solution: -

We put the events in a tabular form and calculate the variance and expected times. These calculations can be carried on the network also

Activity i-j		t_0	t_m	t_p	$\sigma^2 = \left(\frac{t_p - t_0}{6}\right)^2$	$t_e = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{6}$
Predecessor event i	Successor event j					
10	20	6	9	12	1.00	9.0
10	50	4	7	8	0.44	6.7
20	30	14	17	20	1.00	17.0
20	40	7	10	13	1.00	10.0
20	50	3	5	9	1.00	5.33
30	70	13	18	25	4.00	18.33
40	60	10	14	16	1.00	13.67
40	70	12	15	18	1.00	15.00
50	60	9	11	12	0.25	10.83
60	70	17	20	25	1.78	20.33

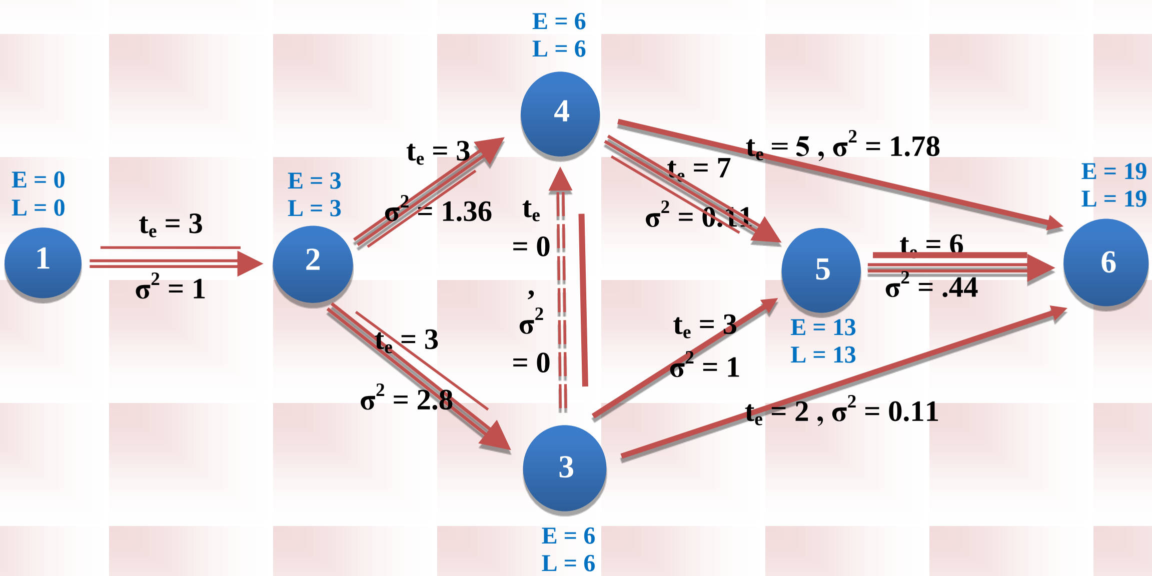
Example 9:

Consider the network shown in following fig. the three time estimates for the activities are given along the arrows. Determine the critical path. What is the probability that the project will be completed in 20 days?



Solution: -

اولاً : حساب الزمن المتوقع والتباين



ثانياً : من خلال المخطط الشبكي وعلى اساس الزمن المتوقع امكن حساب المسار الحرج وكما يظهر في الاسهم المزدوجة هنالك مسارين

Expected duration of the project, T_{cp} = 19 days.

Contractual obligation time, T = 20 days.

Standard deviation of the project,

$$\sigma = \sqrt{\sum \sigma_{ij}^2} \text{ for all i-j on the critical path}$$

$\therefore$ σ for path 1-2-4-5-6 $= \sqrt{1 + 1.36 + 0.11 + 0.44} = 1.70$,

σ for path 1-2-3-4-5-6 $= \sqrt{1 + 2.8 + 0 + 0.11 + 0.44} = 2.08$.

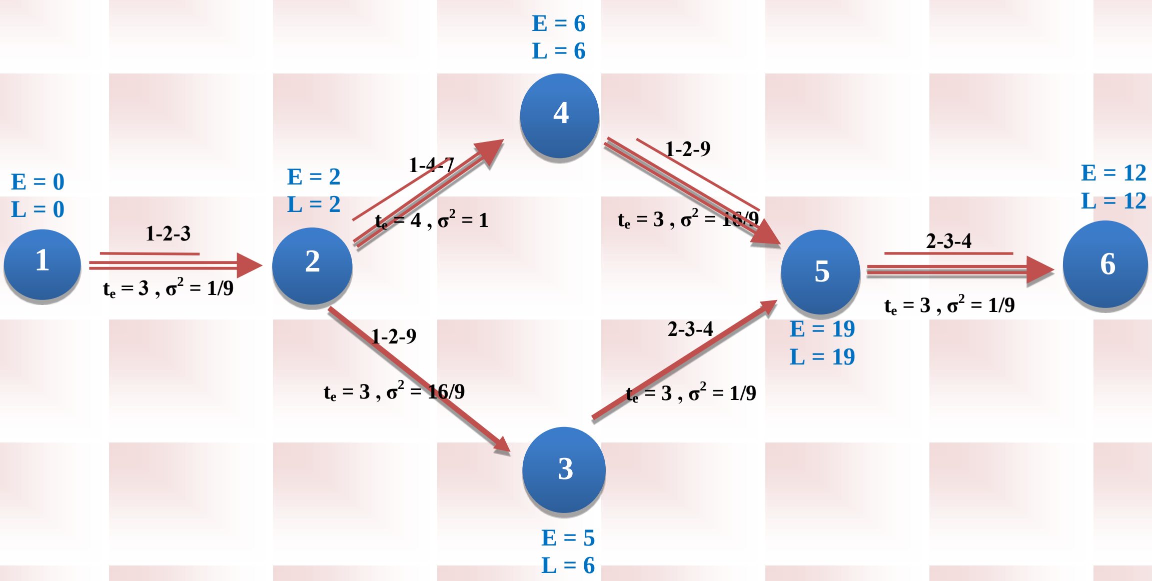
$\therefore$ σ = 2.08 is chosen as it is higher of the two values.

$\therefore$ Normal deviate, $Z = \frac{T - T_{cp}}{\sigma} = \frac{20-19}{2.08} = 0.48$.

From table A, probability = 68.44%.

Example 10 :

Consider the network shown in following fig. the three time estimates, the expected activity duration and the variances are shown along the arrows. The earliest expected times and the latest allowable occurrence times are computed and put along the node. What is the probability of completing the project in (i) 12 days (ii) 14 days (iii) 10 days?



Solution: -

We identify that the path 1-2-4-5-6 is the critical path and expected project length is 12 days.

(i) Here, زمن المسار الحرج $T_{cp} = 12$ days, T = 12 days.

Standard deviation for the project length, $\sigma = \sqrt{\sum \sigma_{ij}^2}$ for all ij on the critical path

$\therefore$ $$\sigma = \sqrt{1/9 + 1 + 16/9 + 1/9} = 1.73.$$

∴ Normal deviate, $Z = \frac{T - T_{cp}}{\sigma} = \frac{12-12}{1.73} = 0.$

∴ probability of completing the project (from table A) = 50%

(ii) Here, T = 14 days.

∴ $Z = \frac{14-12}{1.73} = 1.16.$

∴ Corresponding probability = 87.7%.

(iii) Here, T = 10 days.

∴ $Z = \frac{10-12}{1.73} = -1.16.$

∴ Corresponding probability = 1 – 0.877 = 0.123 = 12.3%.

Example 11 :

The time estimates (in weeks) for the activities of a PERT network are given below.

Activity	t_0	t_m	t_p
1-2	1	1	7
1-3	1	4	7
1-4	2	2	8
2-5	1	1	1
3-5	2	5	14
4-6	2	5	8
5-6	3	6	15

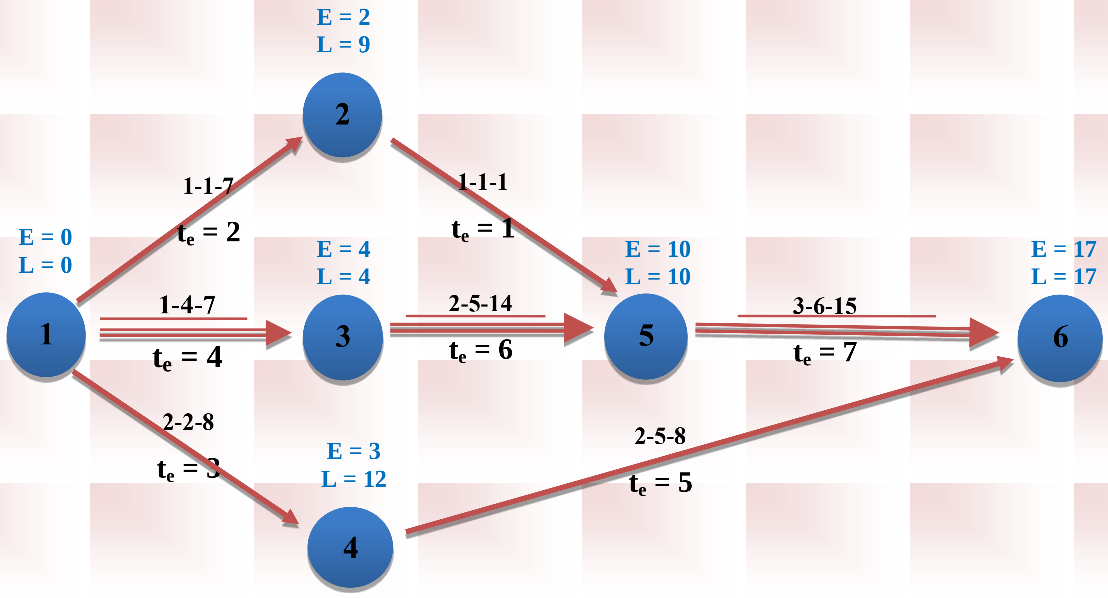
a) Draw the project network and identify all the paths through it.
b) Determine the expected project length.
c) Calculate the standard deviation and variance of the project length.
d) What is the probability that the project will be completed?
(i) at least 4 weeks earlier than expected time?
(ii) no more than 4 weeks later than expected time?
e) If the project due date is 19 weeks, what is the probability of not meeting the due date?
f) The probability that the project will be completed on schedule if the scheduled completion time is 20 weeks.
g) What should be the scheduled completion time for the probability of completion to be 90%?

Solution: -

a) The network for the given data is drawn in following fig. The various paths through the network are

وفيما يلي المخطط الشبكي والذي تظهر فية المسارات الاتية:

1-2-5-6,
1-3-5-6,
and 1-4-6



b) For determining the expected project length, the expected activity times need to be calculated. The same, along with the variances, are computed below.

لحساب الطول المتوقع للمشروع يجب معرفة الازمنة المتوقعه والتباينات وكما يلي:

Activity	t_0	t_m	t_p	$\sigma^2 = \left(\frac{t_p - t_0}{6}\right)^2$	$t_e = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{6}$
1-2	1	1	7	1	2
1-3	1	4	7	1	4
1-4	2	2	8	1	3
2-5	1	1	1	0	1
3-5	2	5	14	4	6
4-6	2	5	8	1	5
5-6	3	6	15	4	7

Length of path 1-2-5-6 = 2+1+7 = 10,
Length of path 1-3-5-6 = 4+6+7 = 17, and
Length of path 1-4-6 = 3+5+8= 16

Since 1-3-5-6 has the longest duration, it is the critical path of the network.

∴ The expected project length 17 weeks.

c) Variance of the project length is the sum of the variances of the activities on the critical path.

تباين المسار الحرج مجموع تباين الانشطة الحرجة

$V_{cp} = V_{1-3} + V_{3-5} + V_{5-6} = 1+4+4 = 9$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{9} = 3$

d) **(i)** probability that the project will be completed at least 4 weeks earlier than expected time:

احتمال انجاز المشروع قبل (4) اسابيع من التاريخ المتوقع للانجاز

Expected time = 17 weeks,

and Scheduled time = 17 – 4 = 13 weeks.

∴ The standard normal deviate,

$$Z = \frac{13-17}{3} = -1.33.$$

For Z = - 1.33, probability is 1 – 0.9082 =0.0918 or the probability of completing the project at least 4 weeks earlier than expected time i.e., within 13 weeks is 9.18 % .

(ii) probability that the project will be completed no more than 4 weeks later than expected time:

احتمال تنفيذ المشروع بما لايزيد عن (4) اسابيع بعد الزمن المتوقع

Expected time = 17 weeks,

∴ Scheduled time = 17 + 4 = 21 weeks.

∴ $$Z = \frac{21-17}{3} = 1.33.$$

∴ p = 0.9082.

Therefore, the probability of completing the project in not more that 21 weeks is 90.82%.

e) When the project due date is 19 weeks:

$$Z = \frac{19-17}{3} = 0.667 \approx 0.67,$$

For which, p = 0.7486 or 74.86%.

∴ The probability of meeting the due date is 74.86% and the probability of not meeting the due date is 25.14%.

f) Scheduled time = 20 weeks.

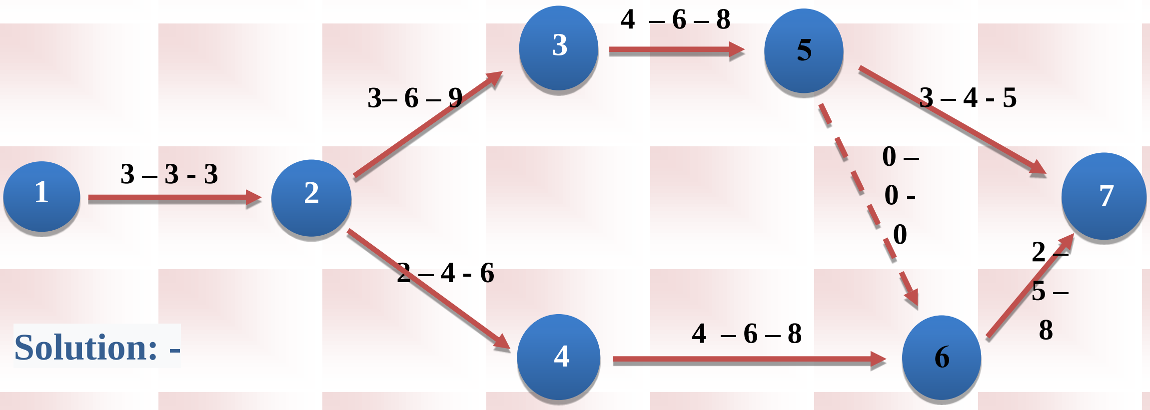
$$\therefore \qquad Z = \frac{20-17}{3} = 1, \text{ for which } p = 84.13\%.$$

g) Value of Z for p = 0.9 is = 1.28.

$$\therefore \qquad 1.28 = \frac{T-17}{3} \text{ or } T = 17+3.84 = 20.84 \text{ weeks.}$$

Example 12 :

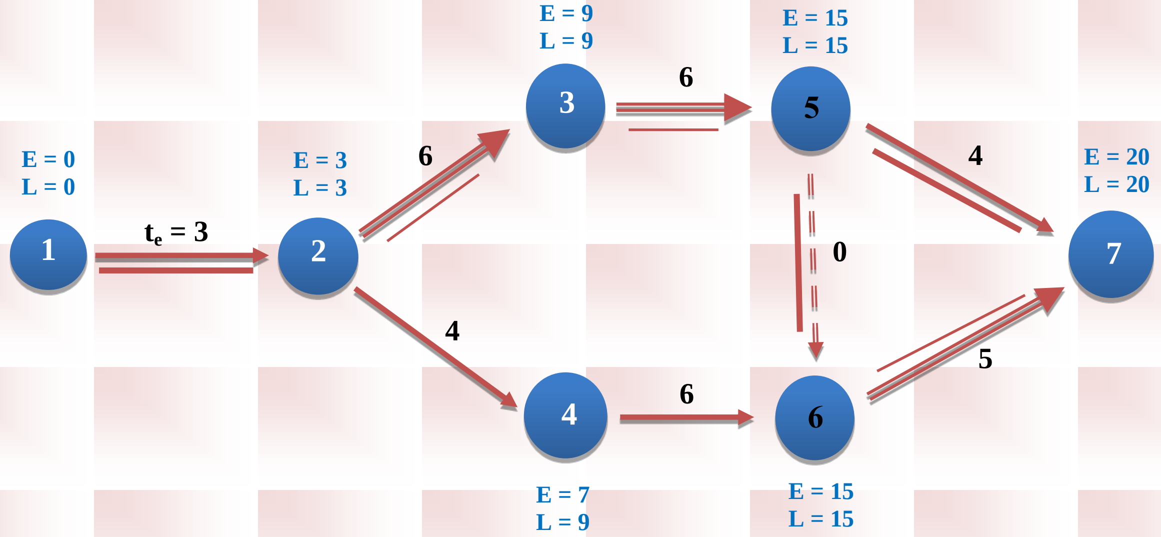
In the PERT network shown in following Fig. the activity time estimates (in weeks) are given along the arrows. If the scheduled completion time is 23 weeks, calculate the latest possible occurrence times of the events. identify the critical path. What is the probability that the project will be completed on the scheduled date?



Solution: -

The expected time of the activities and their variance are computed below.

Activity	t_0	t_m	t_p	σ^2	t_e
1-2	3	3	3	0	3
2-3	3	6	9	1	6
2-4	2	4	6	4/9	4
3-5	4	6	8	4/9	6
4-6	4	6	8	4/9	6
5-6	0	0	0	0	0
5-7	3	4	5	1/9	4
6-7	2	5	8	1	5



Probability of completing the project on scheduled date:

T= 23 weeks, E = 20 weeks.

Variance of the critical path = 0 + 1 + 4/9 + 0 + 1 = 22/9 = 2.444.

$$\therefore \quad Z = \frac{23-20}{\sqrt{2.444}} = 1.92.$$

$\therefore$ Probability = 97.26%.

8-5 تحديد الزمن الفائض Float time

من خلال تحليل المخطط الشبكي يتضح للأدارة وجود زمن الفائض في الانشطة غير الحرجة و هنا مؤشر على مؤشر على وجود طاقات عاطلة يمكن الاستفادة منها في تخويض كلفة أنجاز المشروع و لتحديد الزمن الفائض نتبع ما يلي :

أ- تحديد الازمنة المبكرة Earliest Time و هي نوعين هما :

1- زمن البدأ المبكر Early Star (ES) :

و يحسب من خلال المخطط الشبكي (بداية السهم) .

2- زمن أنتهاء المبكر Early Finish (FS) :

و يساوي **(DT)** و زمن تنفيذ النشاط + **(ES)** .

ب – الازمنة المتأخرة Latest Time وهي نوعين هما :

1- زمن الانتهاء المتأخر Latest Finish (LF) :

و يتم استخراجه من الشبكة (نهاية السهم) .

2- زمن البدء المبكر Latest Star (LS) :

و يساوي زمن تنفيذ النشاط (DT) - LF

ج – الزمن الفائض Slack Time (S) :

و يستخرج بأستخدام القانون الاتي :

S = LF – EF

Or

S = LS – ES

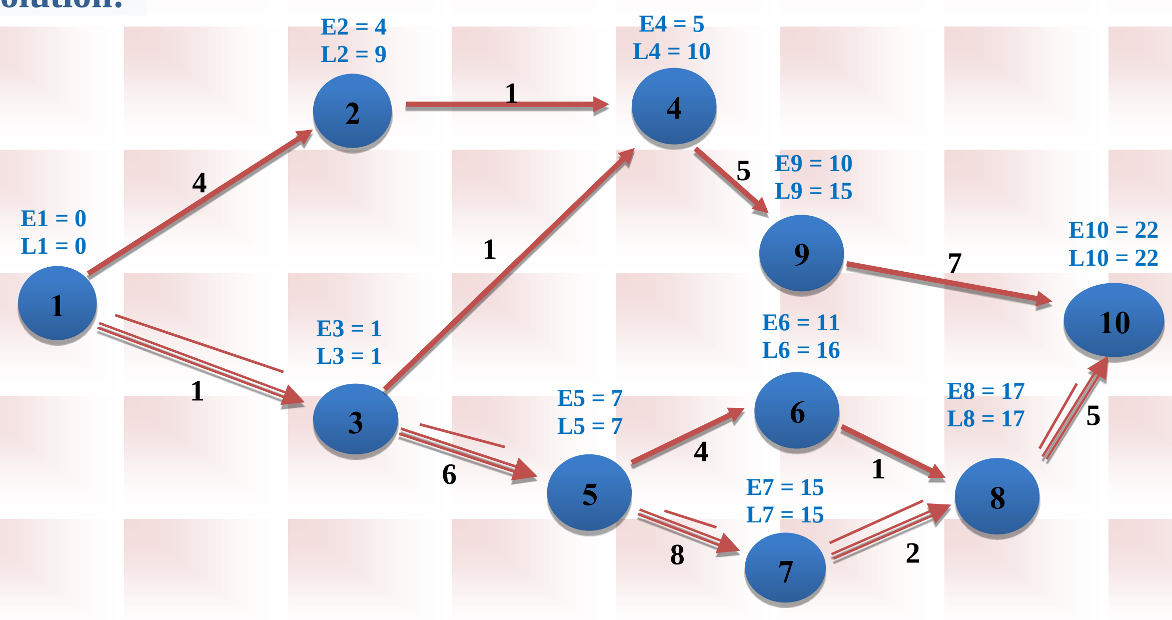
Example 13 :

A project schedule has the following characteristics:

Activity	Times (weeks)
1-2	4
1-3	1
2-4	1
3-4	1
3-5	6
4-9	5
5-6	4
5-7	8
6-8	1
7-8	2
8-10	5
9-10	7

a. Construct the network diagram.
b. Compute E and L for each event, and find the critical path.
c. Compute Total Float for Activities

Solution: -

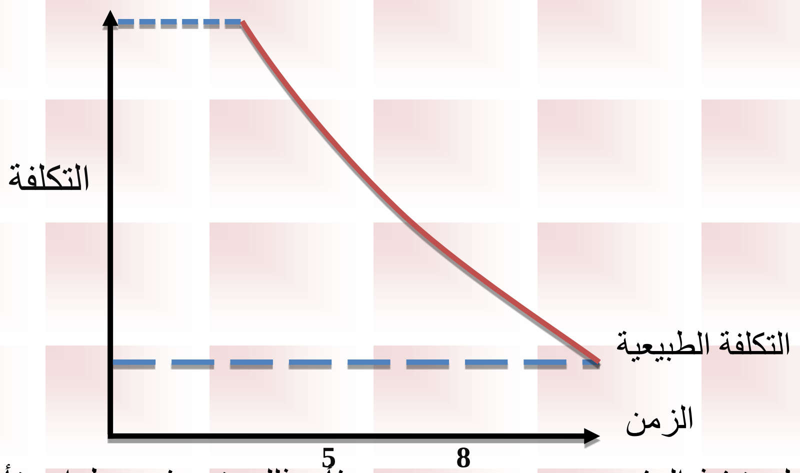


The critical path = 1 -3 – 5 – 7 – 8 – 10

Activity (i,j)	Duration t_{ij}	Earliest Time الزمن المبكر		Latest Time الزمن المتأخر		Totol Float الفائض
		ES	EF	LS	LF	(LS- ES)
1-2	4	0	4	5	9	5-0 =5
1-3	1	0	1	0	1	0-0 =0
2-4	1	4	5	9	10	9-4 =5
3-4	1	1	2	9	10	9-1= 8
3-5	6	1	7	1	7	1-1= 0
4-9	5	5	10	10	15	10-5=5
5-6	4	7	11	12	16	12-7 =5
5-7	8	7	15	7	15	7-7 =0
6-8	1	11	12	16	17	16-11= 5
7-8	2	15	17	15	17	15-15= 0
8-10	5	17	22	17	22	17-17=0
9-10	7	10	17	15	22	15-10=5

9-5 اسلوب بيرت والتكاليف PERTcost

1. فيما سبق تعرفنا على استخدام اسلوب بيرت في خفض الوقت اللازم لتنفيذ المشروع غير ان هنالك علاقة بين زمن التنفيذ وتكلفة التنفيذ اذ بالامكان الاسراع بتنفيذ المشروع او النشاط بأستخدام مزيد من المواد او المكائن او العمال وهذا يستدعي أخذ التكلفة بنظر الاعتبار اذ على الادارة ان تقرر التكلفة المثلى والوقت الامثل عن طريق اختيار بدائل التنفيذ المختلفة من حيث الزمن والتكلفة.
2. لتسريع تنفيذ النشاط هنالك زمن يدعى الزمن المعجل Crash Time وهنالك تكلفة تدعى تكلفة التعجيل Crash cost وهي بخلاف التكلفة الطبيعية Normal cost والزمن الطبيعي Normal Time والعلاقة بين التكلفة والزمن يمكن تمثيلها بالمخطط الاتي :



3. اذا قررت الادارة التعجيل بتنفيذ المشروع ضمن زمن محدد فأن ذلك يتم وفق خطوات تأخذ بنظر الاعتبار ان يتم ذلك بأقل زيادة ممكنه في التكاليف ويتم ذلك وفق الخطوات الاتية :

أ- التعجيل يجب ان يتم على الانشطة الحرجة لان تقليصها كفيل بتقليص زمن تنفيذ المشروع.
ب- حساب الكلفة التي تضاف على كل وحدة زمنية توفر نتيجة التعجيل عن طريق استخراج قيمة تدعى ميل التكلفة (cost slope) وكما يلي :

$$\text{ميل التكلفة cost slope} = \frac{\text{كلفة تنفيذ النشاط بالزمن المعجل} - \text{كلفة تنفيذ النشاط بالزمن الطبيعي}}{\text{الزمن التنفيذ الطبيعي} - \text{الزمن المعجل}}$$

$$= \frac{C_c - C_n}{D_n - D_c}$$

نبدأ بتعجيل (ضغط) النشاط ذو الميل الاقل ونكرر التعجيل طالما كان زمن المسار الحرج اكبر من زمن التعجيل حتى نصل الى زمن المسار الحرج الجديد ألمساوي لزمن التعجيل او الزمن المستهدف مع ملاحظة ان المسار الحرج في كل مره قد يتغير او ان يكون هنالك اكثر من مسار حرج وهنا يجب ضغط جميع المسارات الحرجة بنفس الفتره الزمنية لضمان تعجيل زمن تنفيذ المشروع.

4. عند بلوغ التعجيل الزمن المستهدف تضاف التكاليف المباشرة الى التكاليف غير المباشرة والمجموع يمثل تكلفة التنفيذ.

مثال 14 : الاتي البيانات الخاصة بأحد المشاريع

النشاط	الزمن		الكلفة	
	الطبيعي	المعجل	الطبيعية	المعجلة
1-2	5	4	200	250
1-3	3	2	400	560
2-3	7	6	450	480
2-4	8	6	480	600
3-4	15	12	800	1010
3-5	10	10	400	400
4-5	4	4	150	150
4-6	12	10	600	800
5-6	3	1	150	300
المجموع			3630	4550

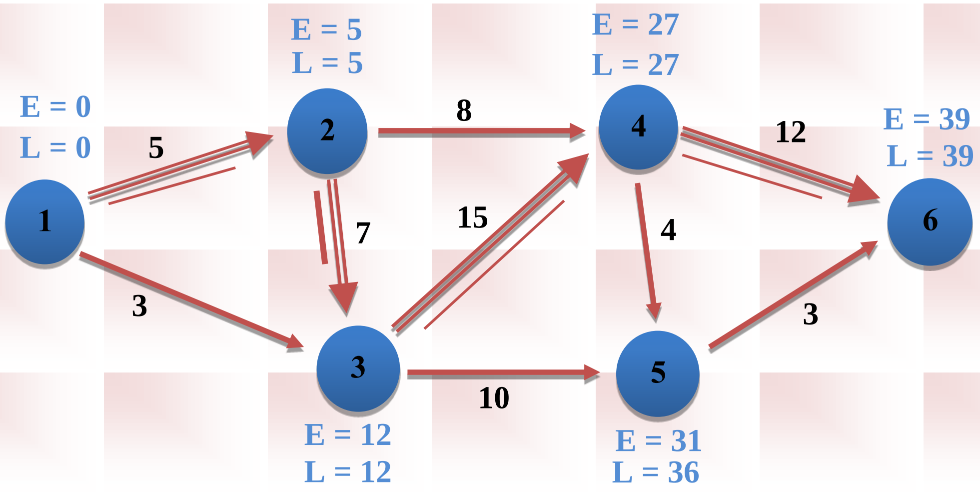
والمطلوب : معرفة الزمن المعجل الذي يمكن ان ينفذ فية المشروع والانشطة التي تضغط للوصول الى الزمن المعجل بأقل تكلفة

الحل :

اولاً: نستخرج الميل (slope)

النشاط	Slope
1-2	$\frac{250-200}{5-4} = 50$
1-3	$\frac{560-400}{3-2} = 160$
2-3	$\frac{480-450}{7-6} = 30$
2-4	$\frac{600-480}{8-6} = 60$
3-4	$\frac{1010-800}{15-12} = 70$
3-5	$\frac{400-400}{10-10} = -$
4-5	$\frac{150-150}{4-4} = -$
4-6	$\frac{800-600}{12-10} = 100$
5-6	$\frac{300-150}{3-1} = 75$

ثانياً: رسم المخطط الشبكي وتحديد المسار الحرج على اساس الزمن الطبيعي

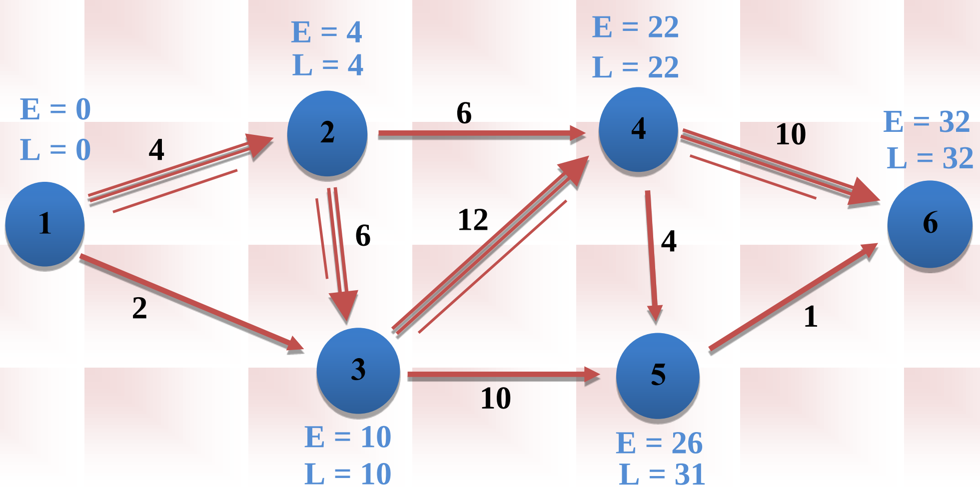


المسار الحرج : 1-2-3-4-6

الزمن اللازم لانجاز المشروع : 39

التكلفة الكلية : 3630

ثالثاً: رسم المخطط الشبكي وتحديد المسار الحرج وفقاً للتكلفة المعجلة



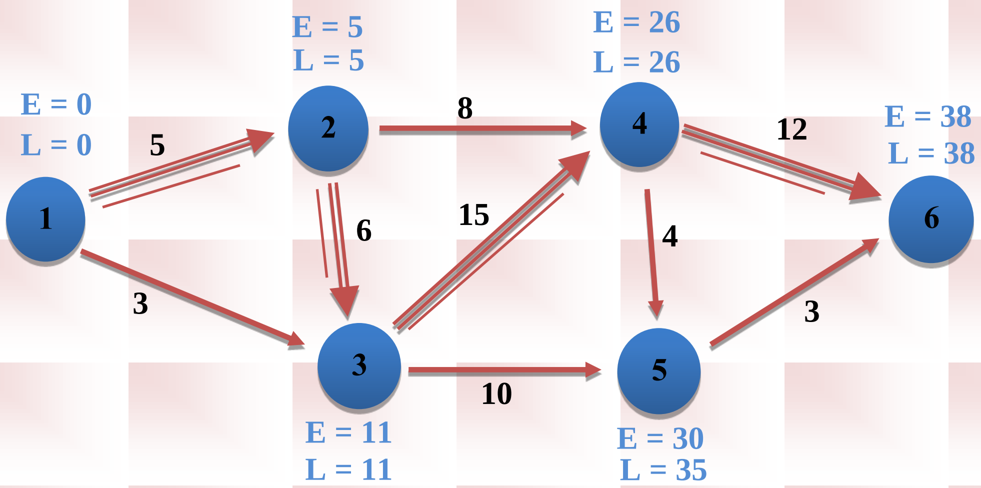
من المخطط اعلاه يتضح مايلي :

الزمن المعجل لتنفيذ المشروع = 32

التخفيض في الزمن = 7 = 32 – 39

التكلفة المعجلة = 4550

ولمعرفة الانشطة التي يجب ضغطها نبدأ بالنشاط الحرج الذي له اقل ميل (slope) وكما يظهر في الجدول ان هذا النشاط هو (2-3) وبالامكان ضغطة بمقدار (1) ويترتب على ذلك زيادة في التكلفة قدرها (30) وعلى هذا الاساس يكون المخطط كالاتي :

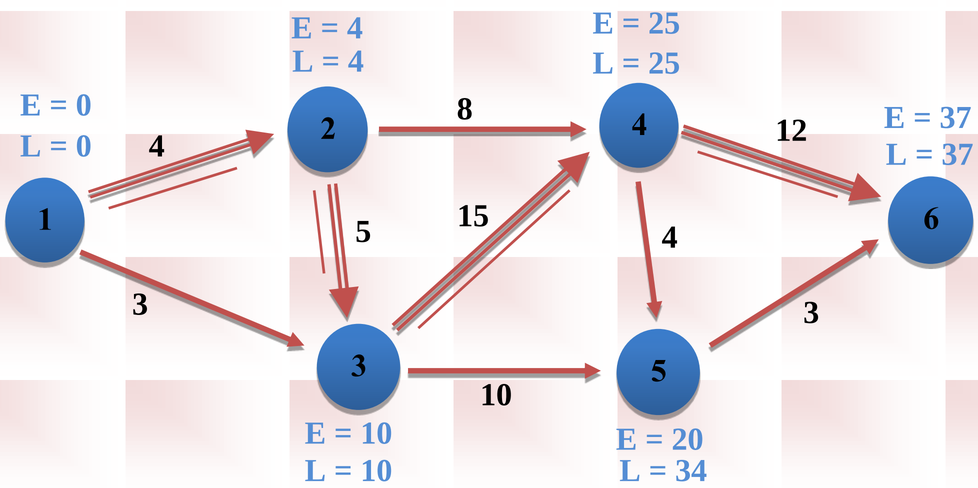


ومن خلال الرسم يتضح ان المسار الحرج هو نفسة المسار السابق

وان مدة التنفيذ 38 يوم

وان كلفة التنفيذ = 3630 + 30 = 3660

وان افضل نشاط حرج يمكن ضغطة في هذة المرحلة الاقل ميل بين الانشطة الحرجة المتبقية هو النشاط (1-2) وحدة زمنية واحدة وبالتالي سوف يكون المخطط الشبكي كالاتي :

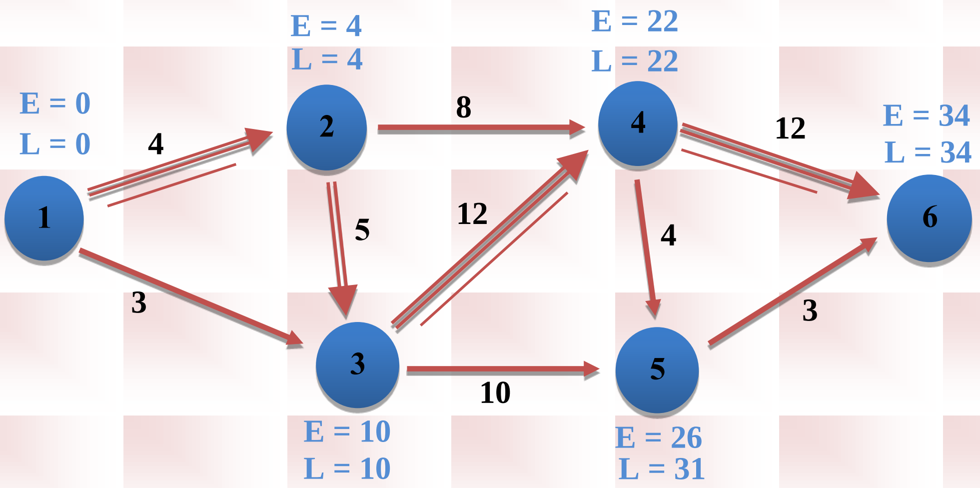


من الشكل اعلاه يتضح ان المسار الحرج بقي ولم يتغير

فترة تنفيذ المشروع (المسار الحرج) =37

كلفة التنفيذ = 3660 + 1 * 50 = 3710

والنشاط الممكن ضغطة في هذة المرحلة هو (3-4) بالامكان تخفيضة بمقدارالفرق بين تنفيذ الطبيعي و المعجل (3) وبالتالي سوف يكون المخطط الشبكي كالاتي :



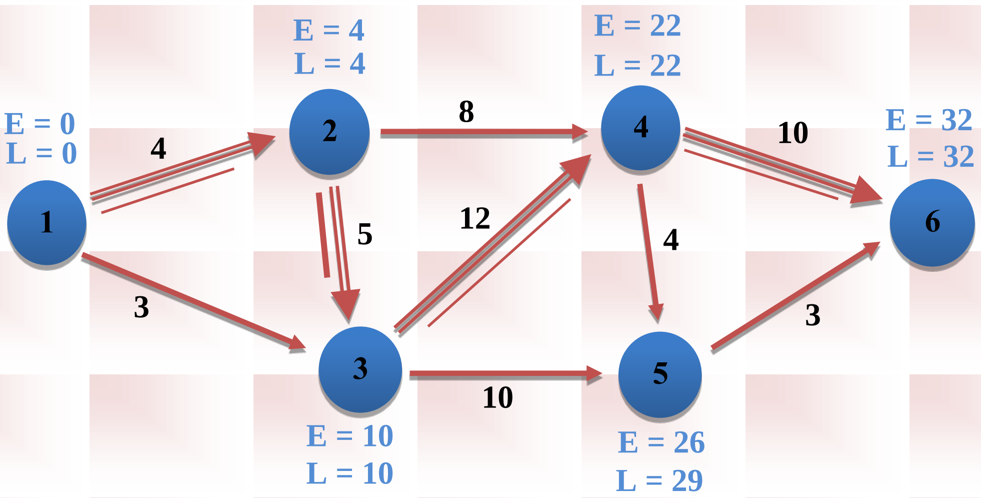
من الشكل اعلاه يتضح ما يلي :

زمن تنفيذ المشروع = 34

تكلفة التنفيذ = 3710 + 3 * 70 = 3920

وان المسار الحرج بقي كما هو علية

واخيراً يمكن ان نضغط المسار (4-6) وحدتين زمنيتين الفرق بين الزمن الطبيعي و الزمن المعجل وبالتالي يكون المخطط الشبكي كما يلي :



من الشكل اعلاه يتضح ان زمن تنفيذ المشروع = 32

تكلفة التنفيذ = 3920 + 2 * 100 = 4120

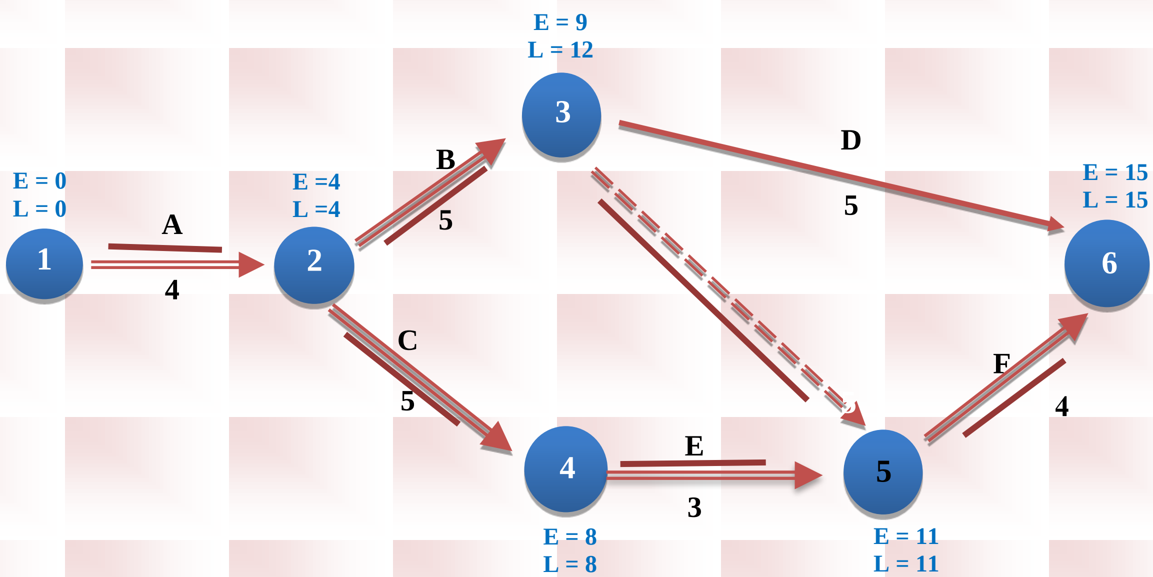
ويتضح انه بالامكان تخفيض التكلفة بأقل من التكلفة المعجلة بمقدار 430 = 4120 – 4550

وسبب الاختلاف لان ذلك يستدعي تعجيل انشطة غير حرجة (1-5,3-2,6-6) ويؤدي ذلك الى زيادة التكاليف دون ان يؤدي ذلك الى تقليل زمن تنفيذ المشروع (زمن المسار الحرج)

Ex 15 :-

Activity	Immediate predecessor($)	Normal time (days)	Normal cost ($)	Crash cost / day ($)	Crash time (day) .
A	-	4	400	125	3
B	A	5	800	200	4
C	A	4	520	150	2
D	B	3	600	225	2
E	C	3	225	100	2
F	B , e	4	600	200	2

a) Draw the project network.
b) Find the critical path.
c) Find the project completion time and the corresponding cost.
d) What is the total cost , if the project deadline is 13 days?
e) Assume the project deadline to be 10 days . the company has to bear $ 170 for each day of delay . find the optimal number of days to crash the project.



C: project completion time = 15

And corresponding cost = 3175

d: لتعجيل تنفيذ المشروع ننظم الجدول الاتي

Activity	Slope	Crash limit	f,f
A	125	4 – 3 = 1	
B	200		9 – 4 – 5 = 0
C	150	4 – 2 = 2	
D	225		15 – 9 – 3 = 3
E	100	3 – 2 = 1	
F	200	4 – 2 = 2	
Dummy			211 – 9 =

FF = الزمن المبكر لنهاية النشاط – الزمن المبكر لبدايه النشاط – زمن التنفيذ

لتحديد زمن التسريع نتبع ما يلي

نحدد النشاط الحرج الذي يقابل اقل ميل (النشاط E)

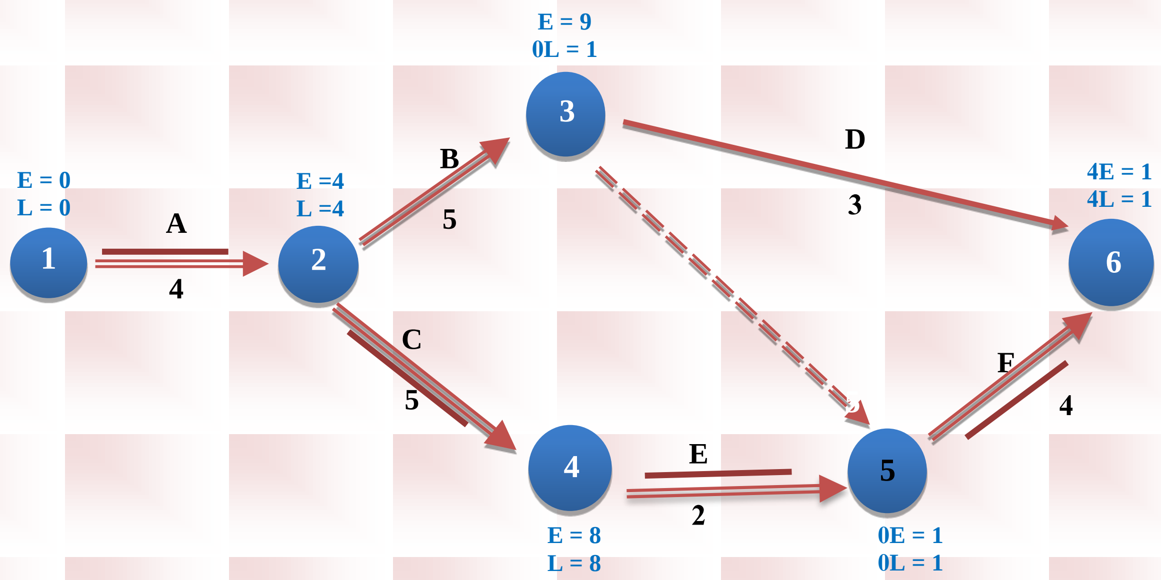
اقصى تعجيل النشاط E= 1 (حدود التعجيل crash limit)

اقل قيمه ل ff موجبه = 3 (للانشطة غير الحرجة D,B)

نختار اقل قيمتين وهي = 1

اي تعجيل (ا) وحدته زمنيه للنشاط (E) كلفه التعجيل 100

عليه فان المخطط الجديد كما يلي :



project cost = 3175 + (1) (100) = 3275

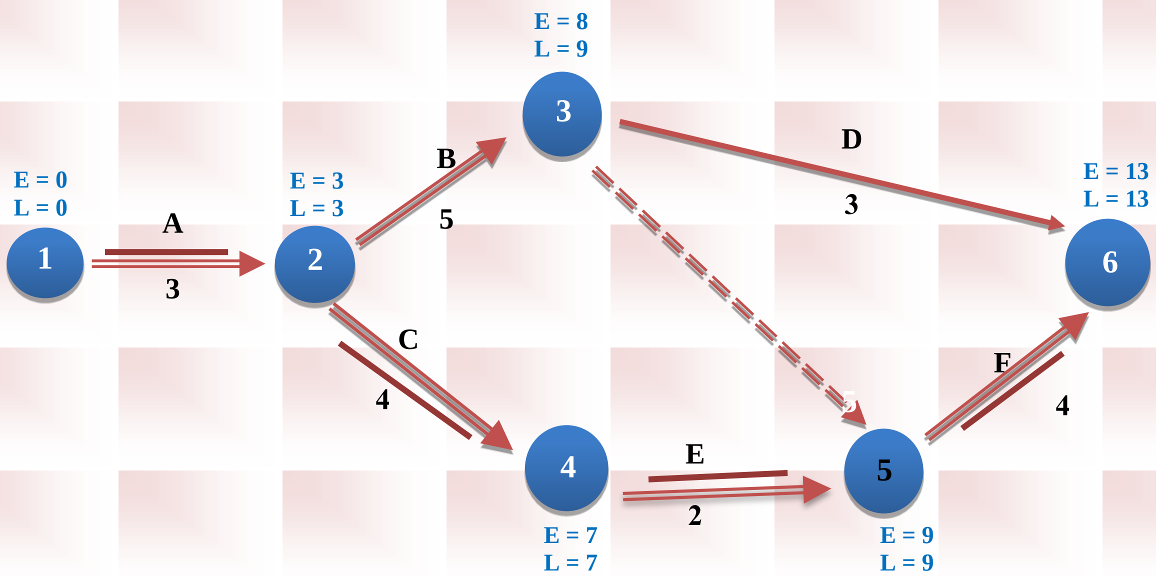
2 – تعجيل النشاط الحرج الاخر الاقل في الميل (نشاط A)

حدود التعجيل = A 1

اقل قيمه موجبه ل ff= 1

Activity	ff
B	10−4−5=1
dummy	10 -9 -0 = 1
D	14 – 9 – 3 = 2

:. نعجل النشاط A بمقدار (1) فيصبح المخطط كما يلي (ملاحظه كلفه التعجيل 125)



Critical path = A C E F

Project completion time = 13 days

Project cost = 3275 + (1) + (125) = 3400

Activity	ff
B	8−35=0
D	13 -8 -3 = 2
Dummy	9 – 8 – 0 = 1

Activity :	A (1,2)	B(2,3)	C (2,4)	D (3,-6)	E (4,5)	F (5,6)	Dummy
Critical :	yes		yes		yes	yes	
Free Float (FF)		0		2			1

اقل ميل بعد أستفاد , E النشاط التخفيض هو C

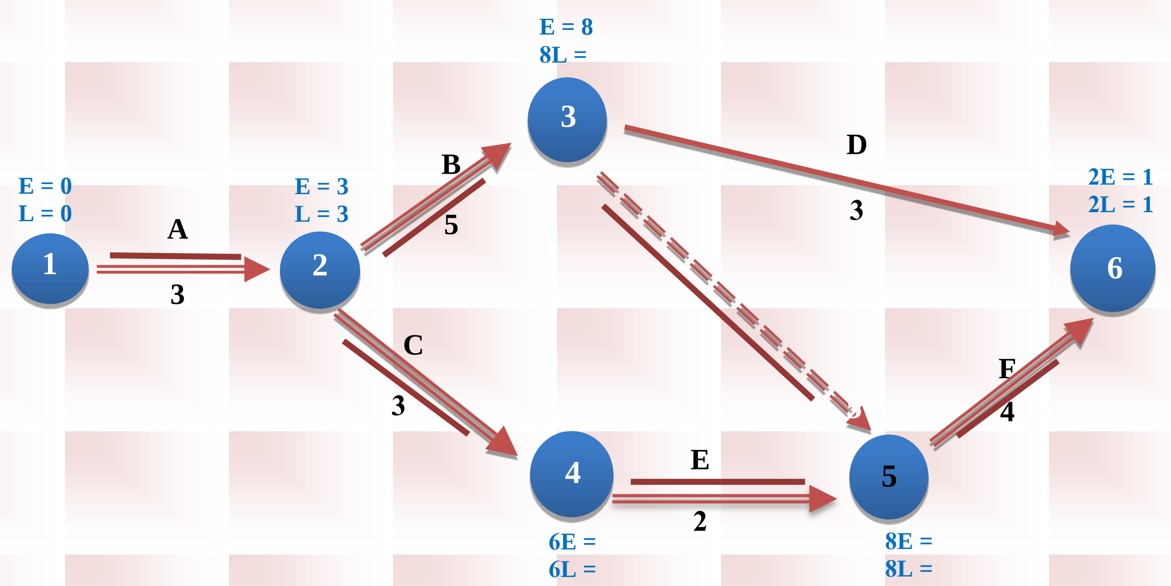
حدود تعجيله 2

$\underline{Activity}$	$\underline{ff}$
B	$8-35=0$
D	13 -8 -3 = 2
Dummy	9 – 8 – 0 = 1

نقارن حدود التعجيل 2 مع اقل قيمة موجبة لـ

(1) C نختار زمن التعجيل (1) و تعجيل النشاط

كلفة التعجيل (150)



Project cost = 3400 + (1) (150) = 3550

Activity :	A (1,2)	B (2,3)	C (2,4)	D (3,6)	E (4,5)	Dummy
Critical :	Yes	Yes	Yes		Yes	Yes
FF :					(1)	1

ملاحظة :

تم أستفاد حدود التعجيل لها E , A

بقيت الانشطة الحرجة F , C , B

Activity :	B	C	F
Slope :	200	150	200
Remaining Crash limit :	1	1	2

المتبقي من زمن التعجيل

لايمكن للتعجيل لاسباب الاتية :

1. أذا تم تعجيل F فأن كلفة التعجيل 200 وهي اكبر كلفة التأخير 175
2. أذا تم تعجيل المسارين (C) , (B) يجب ان يتم تعجيلهما معآ لانهما يقعان على مسارين مختلفين وكلفة تعجيلهما
200 + 150 = 350 وهي اكبرمن كلفة التأخير .

∴ project completion time = 12 days

Cost of delay = (delay time) x cost of delay / day)

= (12 – 10) x 170

= 340

Project cost = 3550 + 340

= 3890

اسئلة الفصل الخامس

Solved Problems

1- The A B C Manufacturing Company is considering the construction of a new factory building the folloing list shows the project list a ctivites relationships and time estimates :

Activity	Description	Immediate Predecessor (s)	Time
A	Problem definition	-	3
B	Preliminary study of costs and constrainins	A	3
C	nalysis of problems in existing building	A	3
D	Incorporation of requirmentin new building	C	5
E	Detailed darwings of new building	B , C	6
F	Contractor building a prototype	D , E	9
G	Cost analysis	E	5
H	Engineers reviewing feasibility	G	3
I	Contractor building the factory	G , F	5
J	Building inspection	I , H	6
K	Final plant layout	J	4

(a) Develop a CPM network for this project .
(b) Identify the critical path .
(c) Computer the total floats for the activities.

2- An industrial project has the folloing data :

Activity	Immediate Predecessor (S)	Duration (Weeks)
A	-	**5**
B	-	**5**
C	B	**2**
D	A , C	**2**
E	A , C	**3**
F	A , C	**1**
G	B	**2**
H	B	**7**
I	E	**13**
J	E D	**6**
K	F , G , H	**4**
L	H	**5**
M	J , K , L	**5**

I and M are the terminal activities of the project .

(a) Develop a CPM network for this project .

(b) Identify the critical path .

3- Draw a pert network diagram for a construction project , with the activity information given below :

		Duration (Weeks)		
Activity	Immediate Predecessor(s)	Optimistic	Most Likely (m)	Pessimistic
A	-	7	16	28
B	A	4	19	25
C	A	10	16	37
D	B	7	13	37
E	B , C	13	19	33
F	B	19	22	33
G	D , E	4	7	19
H	F , G	13	19	49
I	B , C	13	25	37
J	I , H	7	13	19

(a) Identify the critical path.
(b) Determine the probability of completing the project in two years (104 weeks) .

4- The project of construction a small bridge in Wilmington , Pennsylvanina consists of 10 major activities . information pertaining to the project is given below :

Activity	Optimistic (a)	Most Likely (m)	Pessimistic(b)
A	2	5	**8**
B	4	7	**10**
C	4	9	**14**
D	6	10	**20**
E	1	3	**5**
F	3	6	**9**
G	4	5	**12**
H	6	8	**10**

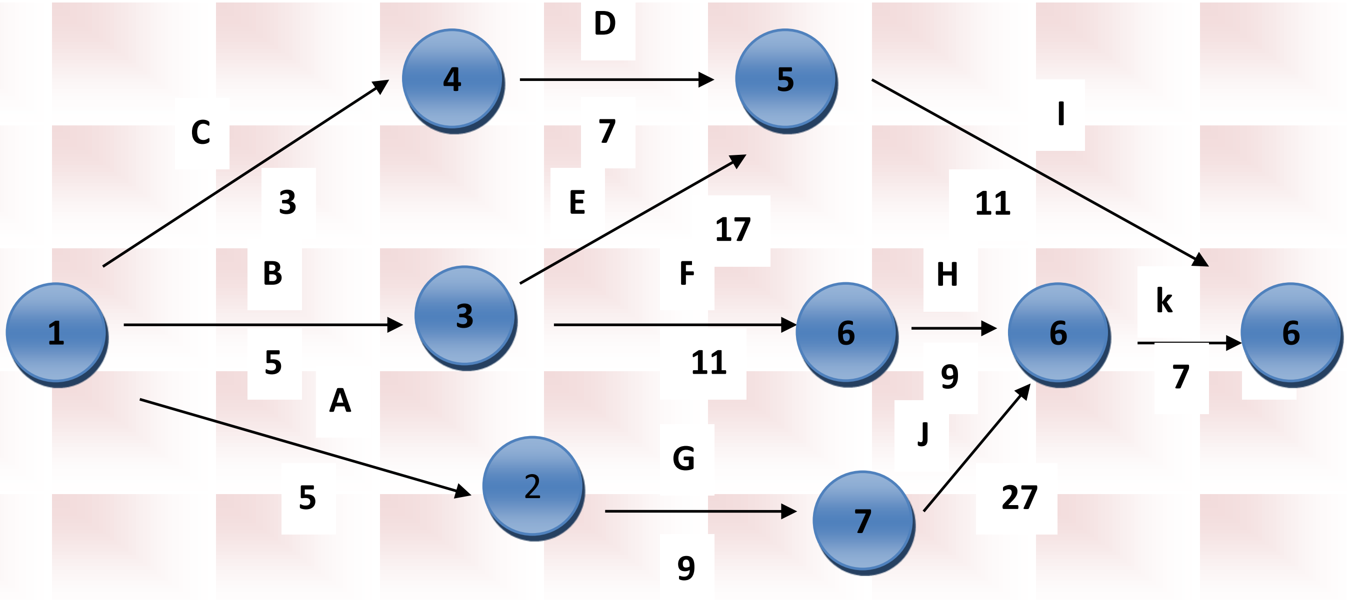
(a) Develop a PERT network for this project .
(b) Find the critical path.
(c) Computer the probability of completing the project in 29 weeks .

4- An electrical engineering project has the folloing activity information:

Activity	Immeditate Predecessors (s)	Normal Time (Days)	Normal Cost ($)	Crash Time (Days)	Crash Cost ($)
A	-	14	1000	10	**1400**
B	-	16	1200	11	**1650**
C	-	20	2000	14	**2720**
D	A,B,C	15	3000	10	**4250**

(a) Draw the network digram Find the cirical path total cost and total time
(b) If the budget limit is $200 per day for any addiyional cost due to crashing find the optimal project completion time and the corresponding cost
(c) If the total budget for this project is $8000 with no limit on daily spending what is the shortest possible project time ?

6 - For the folloing arrow diagram identify the critical path and calculate the total floats for each activity



7- The softwere solution division at mastek inc has been working on an application which on development would have a large market in order to remain market leaders and innovators of new products they have to completed this project as soon as possible the division mananger resorts to the use of PERT in the scheduling of the project activites the folloing table depicts the information on the activities

		Duration (Days)		
Activity	Immediate Predecessor(s)	Optimistic (a)	Most Likely (m)	**Pessimistic (b)**
A	-	2	3	**4**
B	A	2	4	**6**
C	A	4	5	**12**
D	A	1	3	**5**
E	B	2	2	**2**
F	B	3	6	**9**
G	C	5	7	**15**
H	E , G , D	4	8	**12**
I	D	6	15	**18**
J	E , F , G , D	3	4	**5**

a) Find the critical path and the expected project completion time through a PERT network digram

b) What is the probability that the project will be completed within 30 days

8 :- Consider problem 14.7 suppose the activity duration are probabilistic as given in the table below :

Activity	Optimistic (a)	Most Likely (m)	Pessimistic (b)
A	1	3	**5**
B	1	2	**3**
C	3	5	**13**
D	4	7	**10**
E	2	3	**4**
F	1	4	**13**
G	4	8	**12**
H	6	13	**14**
I	2	6	**10**
J	1	1	**1**
K	9	10	**17**

a) Calculater the expected time and variance for each activity
b) Find the critical path
c) Detemine the expected project completion time

9 - Consider a construction project with the folloing data on precedence relationships durations and costs:

Activity	Immeditate Predecessors (s)	Normal Time (Days)	Normal Cost ($)	Crash Time (Days)	Crash Cost ($)
A	-	6	120	4	**170**
B	-	4	120	2	**220**
C	A	3	195	2	**s270**
D	A	4	320	2	**520**
E	B,C	7	700	4	**1075**
F	D,E	5	650	2	**1100**
G	E	10	1600	6	**3200**

F and G are the terminal activities of the project

a) Find the critical path
b) Find the project completion time the corresponding cost

c) Suppose it is required to complet the project in 22 days find which activities to crash and by how much to yield the mininmun project cost

10- conside the folloing information for a manufacturing system project

Activity	Immeditate Predecessors (s)	Normal Time (Days)	Normal Cost ($)	Crash Time (Days)	Crash Cost ($)
A	-	12	10	500000	**90000**
B	A	10	8	140000	**170000**
C	B	12	9	120000	**180000**
D	A	9	8	60000	**70000**
E	D	12	10	70000	**950000**
F	C,E	5	5	80000	**80000**
G	F	6	6	60000	**60000**

a) Draw the network digram and find the critical path
b) Find the project completion time and the correspoing cost
c) If the company wants to complets the project 1n 41 weeks find the optimal crash cost

11:- Fusion Engineering Inc . is designing a new product for welding two different alloys . The company has limited time and resources to complete the project . the folloing avctitiy information is available .

Activity	Immediate Predecessor(s)	Normal Time(Days)	Normal Cost (S)	Crash Cost / Day stope (s)	Crash Time (Days)
A	-	4	400	125	**34**
B	A	5	800	200	**2**
C	A	4	520	150	**2**
D	B	3	600	225	**2**
E	C	3	255	100	**2**
F	B , E	4	600	200	**2**

(a) Draw the project network.
(b) Find the critical path.
(c) Find the project completion time and the corresponding cost .
(d) What is the total cost , if the project deadline is 13 days ?

(e) Assume the project deadline to be 10 days . the company has to bear $ 170 for each day of delay . Find the optimal number of days to crash the project .

الفصل السادس

نظرية المباراة

نظرية المباريات Game Theory

1-6 المقدمة :-

تهتم هذه النظرية بالتوصل الى افضل القرارات في مواقف الصراع او التنافس حيث يسعى كل طرف من أطراف المباراة الى تعظيم عائده او تقليل خسائره الى الحد الادنى , ويعد فون نيومان اول من وضع تحليل عليه لاختيار الاستراتيجيات كان ذلك في عام 1928 وقد اكتملت الافكار التي نتجت عن تحليلات نيومان سنه 1944 في المجالات الادارية والاقتصادية وقد تضمنها كتاب بعنوان (نظرية الالعاب في السلوك الاقتصادي) وتعتمد هذه النظرية عدة افتراضات اهمها :-

أ- طرفي التنافس يتمتعان بالذكاء والمعرفة العميقة بأصول اللعبة.
ب- الطرفين على علم بالاستراتيجيات المختلفة المتاحة لكل لاعب.
ج- يسعى كل طرف الى تعظيم ارباحة او تقليل خسائرة
د- كلا الطرفين يتخذان قراراتها بنفس الوقت وبشكل مستقل عن الطرف الاخر.

و تمثل الارقام الموجبة ارباح الطرف A و خسائر الطرف B أما الارقام السالبة فتمثل خسائر الطرف A و ارباح الطرف B

2-6 المصطلحات المستخدمة Useful Terminology

1) **Player: لأعب**
Each participant is called player كل طرف يسمى لاعب

2) **Game results: نتائج المباراة**
Player of the game results when each players has chosen course of action.
نتائج المباراة : هي خيارات اللاعبين عندما يختارون استراتيجياتهم.

3) **Strategy: الاستراتيجية**
The decision rule by which a player determines his course of action is called strategy
الاستراتيجية : هي القواعد التي يعتمها كل لاعب تدعى استراتيجية .

4) **Mixed strategy: الاستراتيجية المختلطة**
If a player decides to use all or some of his available course in some fixed proportion, he is said to use mixed strategy.

الاستراتيجية المختلطة : عندما يقرر اللاعب ان يلعب بعض او كل الخيارات المتاحة له تدعى هذة الحالة الاتراتيجيات المختلطة.

5) **Pure strategy:** **الاستراتيجية الخالصة**

To a player decides to only one particulate course to action during a play he is said to use a pure strategy.

الاستراتيجية الخالصة : هي الاستراتيجية التي يلعبها اللاعبين طوال وقت المبارة.

6) Two – **person zero – sum game:** **المباراة ذات المجموع الصفري**

A game with two players where again of one player equals the loss to the other is known as two – person zero – sum game

المباراة ذات المجموع الصفري : وهي المباراة المتكونة من اللاعبين عندما يكون مايحصل علية احدهما مساوي الى خسارة اللاعب الاخر.

7) **Payoff matrix:** **المصفوفة العوائد**

Is a table showing the amounts received by the player named at the left hand side after all possible plays of the game. The payment is made by the player named at the top of the table.

المصفوفة العوائد : وهي مصفوفة توضيح القيم الموجبة فيها العوائد الخاصة باللاعب الاول من الاستراتيجيات المتاحة وهي خسائر للطرف الاخر (اللاعب الاخر).

3-6 الاستراتيجيات الخالصة ونقطة السرج Pure strategies and Saddle point

وفي هذه الحالة يكون امام كل لاعب استراتيجية واحدة يلعبها طوال المباراة وهنالك نقطة تعادل تقع عند تقاطع الاستراتيجيات الخالصة لكلا اللاعبين وتسمى نقطة السرج وهي تمثل قيمة المباراة وهي تمثل اقل قيمة في صفها وأكبر قيمة في عمودها وتسمى ايضاً نقطة التعادل او التوازن.

Example 1:

Solve the game given below:

		Player (B)		
		I	II	III
Player (A)	1	1	9	2
	2	8	5	4

Solution: -

		Player (B) I	II	III	Row Minimum
Player (A)	I	1	9	2	1
	II	8	5	4	4 Maximum
Column Maximum		8	9	4 Minimum	

The value of game = 4 (مكسب اللاعب A)

بسبب وجود نقطة توازن (نقطة سرج) فأن اللاعب

A : سوف يلعب الاستراتيجية الثانية طول المباراة

B : سوف يلعب الاستراتيجية الثالثة طول المباراة

Value of the Game = 4

Strategies: A , row 2

B , column 3

Example 2:

Solve the game whose pay of matrix is:

		(B) I	II	III
(A)	I	-3	-2	6
	II	2	0	4
	III	5	-2	-4

Solution: -

Player (B)

Player (A)	I	II	III	Row Minimum	
I	-3	-2	6	-3	
II	2	0	4	0	Maximum
III	5	-2	-4	-4	
Column Maximum	5	0	6		
		Minimum			

Strategies: A , row 2

B , column 3

Saddle point (2,2)

Game value : 0

Example 3:

Find the solution of the game whose payoff matrix is given below:

(B)

(A)	I	II	III	IV	V
I	-4	-2	-2	3	1
II	1	0	-1	0	0
III	-6	-5	-2	-4	4
IV	3	1	-6	0	-8

Solution: -

(B)

(A)	I	II	III	IV	V	Row Minimum	
I	-4	-2	-2	3	1	-4	
II	1	0	-1	0	0	-1	Maximum
III	-6	-5	-2	-4	4	-6	
IV	3	1	-6	0	-8	-8	
Column Maximum	3	1	-1	3	4		
			Minimum				

The value of game = -1

This means that B always wins 1 unite of money

Saddle point (2, 3)

Strategies : A , row 2

B , column 3

4-6 المباريات بدون نقطة سرج Game without saddle point

1-4-6 قاعدة السيادة (Dominance)

في كثير من المباريات قد لاتوجد نقطة توازن عندئذً لابد من اتباع طرق اخرى لايجاد الاستراتيجيات التي يتبعها اللاعبان وقيمة المباراة وقبل البدأ بأتباع اي من الطرق نحاول تقليص المباراة بأستخدام طريقة السيادة (Dominance method) عندما تكون المباراة نوع (M.2) او (2.M) عندما تكون M>2 وعدم وجود نقطة توازن. فاذا كان جميع عناصر احد الصفوف أصغر او مساوية لعناصر صف اخر فأن هذا الصف يعتبر مهيمن وعندئذً يمكن حذف الصف الاخر , اما بالنسبة للاعمدة فأذا كان عناصر احد الاعمدة أكبر او مساوية لعناصر عمود اخر فهذا العمود مهيمن ويمكن حذف العمود الاخر وبأستخدام هذه الطريقة (Dominance method) يمكن ان يحذف اكثر من صف وعمود و يمكن تلخيص مبادئ قاعدة السيارة بما يلي :-

مبادئ الهيمنة principle of dominance

1- اذا كان جميع عناصر الصف اصغر او يساوي لعناصر الصف اخر فهذا الصف مهيمن عليه و يمكن حذفه

2- اذا كان جميع عناصر العمود اكبر او يساوي لعناصر العمود اخر فهذا العمود مهيمن عليه و يمكن حذفه

3- يمكن حذف اكثر من عمود اوصف مهيمن عليه و جعل المصفوفة بابسط صورها

مع ملاحظة ان الحذف لا يؤثر على قيمة المباراة

Example 4: solve the following game by using the principle of dominance

		Player (B)		
		(1)	(2)	(3)
Player (A)	W	1	-1	7
	M	-3	0	-3
	R	2	1	5

Solution :

بالامكان اللأعبA حذف الاستراتيجية الثابتة لان كل عناصرها اقل من عناصر الاستراتيجية الثالثة و كالاتي :-

اللاعب (B)

		(1)	(2)	
اللاعب (A)	w	1	-1	7
	R	2	1	5

اللأعب B سوف لن يلعب الاستراتيجية الثالثة لذا سوف تختصر المبارة و كالاتي :-

اللاعب (B)

		(1)	(2)
اللاعب (A)	w	1	-1
	R	2	1

الان اصبح من السهل حل المباراة بالطرق التي سيرد ذكرها لاحقاً .

Example 5: solve the following game

Player (B)

		(1)	(2)	(3)
	W	0	-2	7
Player (A)	M	2	5	6
	R	3	-3	8

Soluation :

جميع عناصر الاستراتيجية (2) اقل من عناصر الاستراتيجية (3) لذا تحذف الاستراتيجية 3 (مهيمن عليها)

اللاعب (B)

		(1)	(2)
	W	0	-2
اللاعب (A)	M	2	5
	R	3	-3

الاستراتيجية W مهيمن عليها من قبل الاستراتيجية M لذا تحذف فتصبح المباراة كالاتي :

		اللاعب (B)	
		(1)	(2)
اللاعب (A)	M	2	5
	R	3	-3

الان اصبح بالامكان استخدام الطريقة الجبرية للتواصل الى الاستراتيجيات المثلى لكل لاعب

2-4-6 الاستراتيجيات المختلطة Mixed Strategies

هنالك العديد من الطرق الممكنه أستخدامها لحل المباريات المختلطة منها :

اولاً : الطريقة الجبرية Algebraic Solution

وفي هذة الطريقة يفترض بأن اللاعب الاول يلعب الاستراتيجية الاولى بـ (x) من الوقت والاستراتيجة الثانية بـ (1 – x) اما اللاعب الثاني فيقسم الوقت بين الاستراتيجيتين فيلعب الاستراتيجية الاولى بـ (y) من الوقت والاستراتيجية الثانية بـ (1 – y) من الوقت وفيما يلي مثال يوضح استخدام هذه الطريقة:

Example 6:

Solve the following game using Algebraic method:

		player (Q)	
		Y	(1-Y)
player (P)	X_1	2	5
	(1-X)	3	-3

Solution :

		player (Q)	
		Y	(1-Y)
player (P)	X	2	5
	(1-X)	3	-3

كل لاعب سوف يقسم وقت المباراة بحيث تكون خسائره او أرباحه متساوية بغض النظر عن الاستراتيجية التي يتبعها اللاعب الاخر.

$2x + 3(1-x) = 5x + (-3)(1-x)$

$2x + 3 - 3x \quad = 5x - 3 + 3x$

$3 - x \quad = 8x - 3$

$6 \quad = 9x$

$\therefore \; x = \frac{6}{9}$

$1 - x = \frac{3}{9}$

اللأعب A

$2y + 5(1-y) = 3y + (-3)(1-y)$

$2y + 5 - 5y \quad = 3y - 3 + 3y$

$5 - 3y = 6y - 3$

$5 + 3 = \; 64 + 3y$

$8 = 9y$

$\therefore \; y = \frac{8}{9}$

$1 - y = \frac{1}{9}$

	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{6}{9}$	**2**	**5**
$\frac{3}{9}$	**3**	**-3**

The value of game $= 2 \times (\frac{6}{9}) + 3(\frac{3}{9})$

$= \frac{12}{9} + \frac{9}{9}$

$= \frac{21}{9}$

ثانياً : الطريقة الحسابية Arithmetic method

لاستحدام الطريقة الحسابية في حل نماذج المباريات نتبع الخطوات الاتية :

1. نستخرج الفرق بين قيم كل صف وعمود (القيم المطلقة).
2. نبادل القيم التي استخرجت في (1) بين الاعمدة والصفوف.
3. ايجاد نسبة استخدام كل استراتيجية بأستخدام القاعدة الاتية :

نسبة استخدام كل استراتيجية = $\dfrac{\text{الفرق المقابل لها}}{\text{مجموع الفروق}}$

Example 7 :

Determine the optimum strategies and the value of the following game using the Arithmetic method:

		player (Q)	
player (P)		2	5
		3	-3

Solution: -

2	5	3	6	$\frac{6}{9}$
3	-3	6	3	$\frac{3}{9}$
1	8			
8	1			
$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$			

The value of game = $2\left(\frac{6}{9}\right) + 3\left(\frac{3}{9}\right) = \frac{21}{9}$

ثالثاً : بأستخدام الطريقة البيانية The Graphical Method

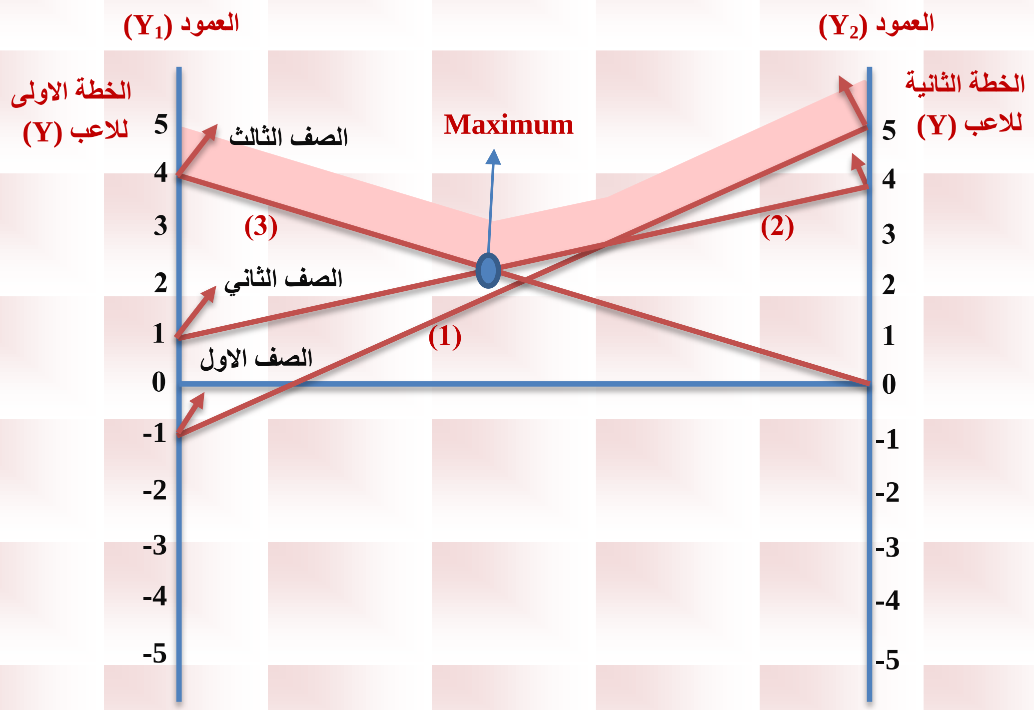
تستخدم فقط عندما يكون احد اللاعبين لديه استراتيجيتين فقط اي تستخدم هذه الطريقة عندما تكون ابعاد المباراة (2*n) او (n*2) ولاتوجد نقطة توازن:

Example : use the Graphical method to determine the optimum strategies and the value of the following game

اللاعب (Y)

		Y_1	Y_2
	X_1	-1	5
اللاعب (X)	X_2	1	4
	X_3	4	0

1. نرسم محورين يمثلان خطتي اللاعب Y_1
2. تحدد خسائر وارباح اللاعب X وفق المخطط التي يلعبها Y



ان اقرب نقطة في المساحة الخارجية (المؤشر) الى الخط الافقي تمثل نقطة تقاطع الصفين الثاني والثالث وبذلك يستبعد الصف الاول ومن خلال الشكل البياني نستنتج قيمة المباراة = 2.3 لصالح X ولتحديد الاستراتيجيات يمكن ان تتبع الاتي:

		اللاعب (Y)				
		Y_1	Y_2			
اللاعب (X)	X_2	1	4	3	4	$\frac{4}{7}$
	X_3	4	0	4	3	$\frac{3}{7}$
		3	4			
		4	3			
		$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$			

قيمة المباراة The value of game $= 4 * \frac{4}{7} + 0 * \frac{3}{7}$

$$= \frac{16}{7}$$

Example 8 : **Solve the following game:**

		(B)			
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
	X_1	19	6	7	5
	X_2	7	3	14	6
(A)	X_3	12	8	18	4
	X_4	8	7	13	-1

Solution: -

X	✓		
19	6	7	5
7	3	14	6
12	8	18	4
8	7	13	-1

	X	✓
6	7	5
3	14	6
8	18	4
7	13	-1

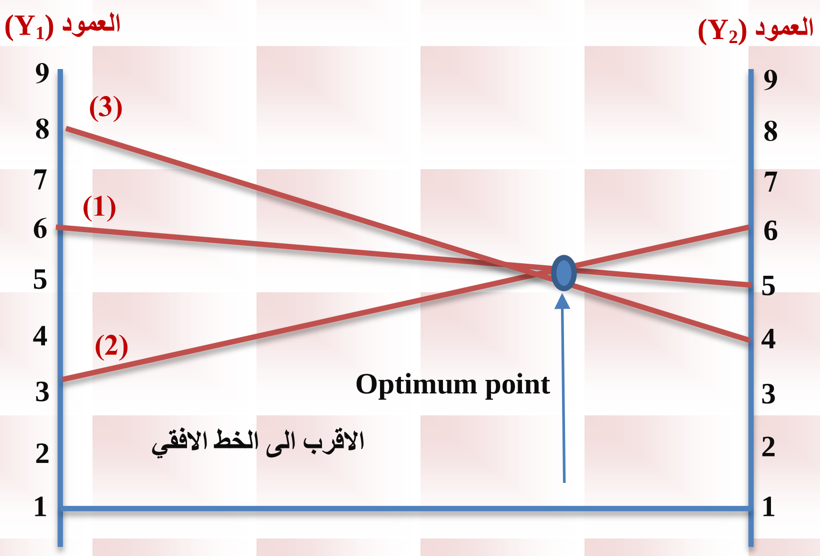
	6	5
	3	6
✓	8	4
X	7	-1

6	5
3	6
8	4

→

اللاعب (B)

		Y_1	Y_2
اللاعب (A)	X_1	6	5
	X_2	3	6
	X_3	8	4



∴ النقطة المثلى التي تقع عند تقاطع الخطين (1) و (2) لذا تحذف الخط الثالث فتكون المباراة كما يلي:
(تحل بالطريقة الحسابية)

	Y_1	Y_2			
X_1	6	5	1	3	$\frac{3}{4}$
X_2	3	6	3	1	$\frac{1}{4}$
	3	1			
	1	3			
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$			

$$\text{The value of game} = 6 * \frac{1}{4} + 5 * \frac{3}{4}$$

$$= \frac{6}{4} + \frac{15}{4}$$

$$= \frac{21}{4} = 5.3$$

رابعاً : بأستخدام البرمجة الخطية Use linear programming

Example 10:

Determine the linear programming model for the following game:

	(B) اللاعب		
(A) اللاعب	2	3	0
	1	2	3
	4	1	2

Solution: -

الخطوات :

1. نفرض ان خيارات اللاعب A كما يلي:

يلعب الاستراتيجية الاولى بأحتمال قدرة P_1

يلعب الاستراتيجية الثانية بأحتمال قدرة P_2

يلعب الاستراتيجية الثالثة بأحتمال قدرة P_3

نفرض ان خيارات اللاعب B كما يلي :

يلعب الاستراتيجية الاولى بأحتمال قدرة Q_1

يلعب الاستراتيجية الثانية بأحتمال قدرة Q_2

يلعب الاستراتيجية الثالثة بأحتمال قدرة Q_3

2. المباراة من وجهة اللاعب B

سيحاول اللاعب B تقليل خسائره الى اقل مايمكن فمن وجهة نظره سيكون :

$\text{Min } Z = V$ دالة الهدف

بوجود القيود:

$2Q_1 + 3Q_2 + 0Q_3 \leq V \;.... \; \mathbf{(1)}$

$Q_1 + 2Q_2 + 3Q_3 \leq V \;......\; \mathbf{(2)}$

$4Q_1 + Q_2 + 2Q_3 \leq V \;......\; \mathbf{(3)}$

$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1 \;..........\; \mathbf{(4)}$

$Q_1, Q_2, Q_3 \geq$ صفر

3. ولغرض التخلص من V في الجانب الايمن تقسم طرفي كل قيد على V

بوجود القيود:

$2\frac{Q_1}{V} + 3\frac{Q_2}{V} + 0\frac{Q_3}{V} \leq 1 \;.....\; \mathbf{(1)}$

$1\frac{Q_1}{V} + 2\frac{Q_2}{V} + 3\frac{Q_3}{V} \leq 1 \;......\; \mathbf{(2)}$

$4\frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} + 2\frac{Q_3}{V} \leq 1 \;.......\; \mathbf{(3)}$

$\frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} + \frac{Q_3}{V} = \frac{1}{V} \;..........\; \mathbf{(4)}$

$\frac{Q_1}{V}, \frac{Q_2}{V}, \frac{Q_3}{V} \geq 0$

4. نفرض أن :

$\frac{Q_1}{V} = \overline{Y_1}$

$\frac{Q_2}{V} = \overline{Y_2}$

$\frac{Q_3}{V} = \overline{Y_3}$

لذا تصبح القيود :

$2\,\overline{Y_1} + 3\,\overline{Y_2} + 0\,\overline{Y_3} \leq 1$

$1\,\overline{Y_1} + 2\,\overline{Y_2} + 3\,\overline{Y_3} \leq 1$

$4\,\overline{Y_1} + 1\,\overline{Y_2} + 2\,\overline{Y_3} \leq 1$

$\overline{Y_1} + \overline{Y_2} + \overline{Y_3} = \frac{1}{V}$

$\overline{Y_1}\,,\; \overline{Y_2}\,,\; \overline{Y_3} \geq 0$

5.

$$\text{Min } Z = \frac{1}{V} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3$$
$$= \text{Max } Z = V = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3$$

اي بالامكان كتابة النموذج كما يلي :

$$\text{Max } Z = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3$$

Sub to:

$2\,\overline{Y}_1 + 3\,\overline{Y}_2 + 0\,\overline{Y}_3 \leq 1$ …… (1)

$1\,\overline{Y}_1 + 2\,\overline{Y}_2 + 3\,\overline{Y}_3 \leq 1$ …… (2)

$4\,\overline{Y}_1 + 1\,\overline{Y}_2 + 2\,\overline{Y}_3 \leq 1$ …… (3)

$\overline{Y}_1 ,\ \overline{Y}_2 ,\ \overline{Y}_3 \geq 0$

ويمكن حل النموذج أعلاه بالطريقة المبسطة والتي سبق شرحها وبالطريقة نفسها تجد استراتيجيات اللاعب A

Example 11: A company management and the labour union are negotiating a new three-year settlement. Each of these has 4 strategies:

I: Hard and aggressive bargaining

II: Reasoning and logical approach

III: Legalistic strategy

IV: Conciliatory approach

The cost to the company are given for every pair of strategy choice.

	Company Strategies			
Union Strategies	**I**	**II**	**III**	**IV**
I	20	15	12	35
II	25	14	8	10
III	40	2	10	5
IV	-5	4	11	0

What strategy will the two sides adopt? Also determine the value of the game

Solution: -

Applying the rule of finding out the saddle point, we obtain the saddle point which is enclosed both in a circle and a rectangle as shown below:

Company Strategies

Union Strategies	I	II	III	IV	Row Minimum
I	20	15	12	35	12 ← Maximin
II	25	14	8	10	8
III	40	2	10	5	2
IV	-5	4	11	0	-5
Column Maximum	40	15	12	35	
			↑ Minimax		

Since Maximin = Minimax = Value of game = 12, therefore the company will always adopt strategy III–Legalistic strategy and union will always adopt strategy 1-Hard and aggressive bargaining.

Example 12:

Players A and B play a game in which each has three coins, a 5p, 10p and a 20p. Each selects a coin without the knowledge of the other's choice. If the sum of the coins is an odd amount, then A wins B's coin. But, if the sum is even, then B wins A's coin. Find the best strategy for each player and the values of the game.

Solution: -

The pay-off matrix for player A is given by

Player B

Player A	5p: B_1	10p: B_2	20p: B_3
5p: A_1	-5	10	20
10p: A_2	5	-10	-10
20p: A_3	5	-20	-20

The pay-off matrix has no saddle point. While we try to reduce the size of the given pay-off matrix, it may be noted that every element of column B3 (strategy B3 for player B) is more than or equal to every corresponding element of row B2 (strategy B2 for player B). Evidently, the choice of strategy B3 by the player B will always result in more losses as compared to that of selecting the strategy B2. Thus, strategy B3 is inferior to B2. Hence, delete the B3 strategy from the pay-off matrix. The reduced pay-off matrix is shown below:

		Player B	
Player A	B_1	B_2	B_3
A_1	-5	10	20
A_2	5	-10	-10
A_3	5	-20	-20

After column B3 is deleted, it may be noted that strategy A2 of player A is dominated by his A3 strategy, since the profit due to strategy A2 is greater than or equal to the profit due to strategy A3, regardless of which strategy player B selects. Hence, strategy A3 (row 3) can be deleted from further consideration. Thus, the reduced pay-off matrix is:

		Player B		
		B_1	B_2	Row Minimum
Player A	A_1	-5	10	-5
	A_2	5	-10	-10
Column Maximum		5	10	

This matrix also has no saddle point. Thus solution to this game can be obtained by applying any of the methods used for mixed-strategy games as discussed later. The optimal strategies for two players are A: 1/2, 1/2 and B: 2/3, 1/3 with V=0.

Example 13:

Solve the game whose payoff matrix is given below:

Player A \ Player B	1	2	3	4	5
I	1	3	2	7	4
II	3	4	1	5	6
III	6	5	7	6	5
IV	2	0	6	3	1

Solution: -

The payoff matrix has no saddle point. From player A's point of view, strategy IV is dominated by III, yielding the reduced 3 x 4 payoff matrix.

Player A \ Player B	1	2	3	4	5
I	1	3	2	7	4
II	3	4	1	5	6
III	6	5	7	6	5

Similarly, in this reduced matrix strategy 4 of player B is dominated by 1 and 2. Also strategy 5 is dominated by 2.Thus the reduced payoff matrix after deleting columns 4 and 5 becomes.

Player A \ Player B	1	2	3
I	1	3	2
II	3	4	1
III	6	5	7

In the above matrix, strategy I as well as II are dominated by strategy III. Therefore, we delete rows I and II and get

	Player B		
Player A	1	2	3
III	6	5	7

Out of three strategies available to player B, he will use strategy 2 in order to minimize his losses. Thus optimal strategy for A: III; optimal strategy for B : 2 and value of game V = 5.

Example 15:

Solve the following game by using the principle of dominance:

	Player B					
Player A	I	II	III	IV	V	VI
1	4	2	0	2	1	1
2	4	3	1	3	2	2
3	4	3	7	-5	1	2
4	4	3	4	-1	2	2
5	4	3	3	-2	2	2

Solution: -

The payoff matrix has no saddle point. From player A's point of view, strategy 1 is dominated by strategy 2 and strategy 5 is dominated by strategy 4. Accordingly, strategy 1 and 5 are deleted. The reduced payoff matrix becomes:

	Player B					
Player A	I	II	III	IV	V	VI
2	4	3	1	3	2	2
3	4	3	7	-5	1	2
4	4	3	4	-1	2	2

From player B's point of view, strategy I and II are dominated by strategy IV, V and VI; also strategy VI is dominated by strategy V. Thus after deleting strategy I, II and VI, the payoff matrix becomes

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \multicolumn{3}{c}{\text{Player B}} \\
\text{Player A} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \\
\hline
2 & 1 & 3 & 2 \\
3 & 7 & -5 & 1 \\
4 & 4 & -1 & 2
\end{array}
$$

In the above matrix no single strategy (of either player) dominates another strategy. However, strategy V is dominated by the average of strategies III and IV, which is: (1 +3)/2, (7-5)/2,(4-1)/2=(2, 1, 3/2)

Accordingly, strategy V is deleted and the payoff matrix so obtained is:

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \multicolumn{2}{c}{\text{Player B}} \\
\text{Player A} & \text{III} & \text{IV} \\
\hline
2 & 1 & 3 \\
3 & 7 & -5 \\
4 & 4 & -1
\end{array}
$$

Further, strategy 4 is dominated by the average of strategy 2 and 3. Hence strategy 4 is deleted. The resulting payoff matrix is as follows:

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \multicolumn{2}{c}{\text{Player B}} \\
\text{Player A} & \text{III} & \text{IV} \\
\hline
2 & 1 & 3 \\
3 & 7 & -5
\end{array}
$$

Solving this game by short-cut method, we have

		Player B		
Player A		III	IV	probability
	2	1	3	12/14 = 6/7
	3	7	-5	2/14 = 1/7
	probability	8/14=4/7,		

Optimal strategy for A :(0, 6/7,1/7,0,0)
Optimal strategy for B :(0, 0, 4/7, 3/7, 0, 0),
Value of the game, V=1*(4/7)+ 3 (3/7)= 13/7

أسئلة فصل السادس

1- A company is currently involved in negotiations with its union on the upcoming wage contract. Positive signs in table represent wage increase while negative sign represents wage reduction. What are the optimal strategies for the company as well as the union? What is the game value?

		UNION STRATEGIE			
		U1	U2	U3	U4
COMPANY STRATEGES	C1	0. 25	0.27	0.35	-0.02
	C2	0.20	0.06	0.08	0.08
	C3	0.14	0.12	0.05	0.03
	C4	0.30	00.14	0.19	0.00

2- In a small town, there are only two stores, ABC and XYZ that handle sundry goods. The total number of customers is equally divided between the two, because price and quality of goods sold are equal. Both stores have good reputation in the community, and they render equally good customer service. Assume that a gain of customers by ABC is a loss to XYZ and vice versa. Both stores plan to run annual pre-Diwali sales during the first week of November. Sales are advertised through a local newspaper, radio and television media. With the aid of an advertising firm store ABC constructed the game matrix given below. (Figures in the matrix represent a gain or loss of customers).

	Strategy of XYZ		
Strategy of ABC	Newspaper	Radio	Television
Newspaper	30	40	-80
Radio	0	15	-20
Television	90	20	50

Determine optimal strategies and the worth of such strategies for both ABC and XYZ.

3- two breakfast food manufacturers, ABC and XYZ are competing for an increased market re. The pay-off matrix, shown in the following table, describes the increase in market share for ABC and decrease in market share of XYZ.

ABC \ XYZ	Give Coupons	Decrease Price	Maintain Present Strategy	Increase Advertising
Give Coupons	2	-2	4	1
Decrease price	6	1	12	3
Maintain present strategy	-3	2	0	6
Increase Advertising	2	-3	7	1

Determine optimal strategies for both the manufacturers and the value of the game.

4- Two Firms A and B have for years been selling a competing product which forms a part of both firms' total sales. The marketing executive of Firm A raised the question: 'What should be the firms' strategies in terms of advertising for the product in question'. The market research team of Firm A developed the following data for varying degree of advertising:

(1) No advertising, medium advertising, and large advertising for both firms will result in equal market shares.

(2) Firm A with no advertising: 40 per cent of the market with medium advertising by Firm B and 28 per cent of the market with large advertising by Firm B.

(3) Firm A using medium advertising: 70 per cent of the market with no advertising by Firm B and 45 per cent of the market with large advertising by Firm B.

(4) Firm A using large advertising: 75 per cent of the market with no advertising by Firm B and 47.5 per cent of the market with medium advertising by Firm B.

(a) Based upon the foregoing information, answer the marketing executive's questions:

(b) What advertising policy should Firm A pursue when consideration is given to the above factors: selling price, Rs 4 per unit; variable cost of product, Rs 2.50 per unit; annual volume of 30,000 units for Firm A; cost of annual medium advertising Rs 5,000 and cost of annual large advertising Rs 15,000? What contribution, before other fixed costs, is available to the firm?

4- Two competitors are competing for the market share of the similar product. The pay. in terms of their advertising plan is shown below:

Competitor A \ Competitor B	No Advertising	Medium Advertising	Heavy Present Strategy
No Advertising	10	5	-2
Medium Advertising	13	12	15
Heavy Advertising	16	14	10

Suggest optimal strategies for the two firms and the net outcome thereof.

5- : Solve the game whose pay-off matrix is given below:

Player A \ Player B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	2	4	0
A_2	3	4	2	4
A_3	4	2	4	0
A_4	0	4	0	8

الفصل السابع

أتخاذ القرار

7 -1 المقدمة

7 -2 المصطلحات المستخدمة

7 -3 خطوات أتخاذ القرار

7 -4 حالات أتخاذ القرار

7 -4 – 1 أتخاذ القرار في حالة التاكد

7 – 4 – 2 أتخاذ القرار في حالة عدم التاكد

7 – 4 – 2 - 1 معيار الابلاس

7 – 4 – 2 - 2 معيار التشاؤم

7 – 4 – 2 - 3 معيار التفاؤل

7 – 4 – 2 - 4 معيار هورويز او الواقعية

7 – 4 – 2 - 5 معيار السفاج

7 – 5 أتخاذ القرارفي ظل المخاطـــرة

7 – 5 – 1 معيـــار قيمـة الماليـــة متوقعـــة

7 – 5 – 2 معيـــار الفرصـــة الضائعـــة متوقعـــة

اتخاذ القرار Make Decision

1-7 المقدمة

لم تعد الخبره والتجربة والخطأ وحدها كافية لأتخاذ القرارات مقبولة في جميع الاوساط ,فالأسلوب المعتمد على التحليل الكمي اصبح ميسرا ولم يعد هنالك حاجه لأرتجال او التخمين في ظل استخدام الحاسب الالكتروني والذي يمكن من اجراء عمليات خزن ومعالجة البيانات بأقل وقت وجهد وتكلفه واكبر دقة من الاساليب القديمة واي كان القرار فان الاسلوب العلمي يقتضي اتباع الخطوات الاتية:

1- تعريف المشكلة.
2- تحديد البدائل الممكنه.
3- تحديد الحالات المتوقع حدوثها (حالات الطبيعة) State Of Nature وغالبا تكون خارج سيطرة متخذ القرار.
4- تحديد مصفوفة العوائد (او الدفع) Pay Off Matrix وتسمى ايضا مصفوفة العائد Pay Off – Table.
5- اختيار البديل المناسب والذي يحقق الهدف (اعلى ربح او اقل تكلفه) وعلى ضوء المعاير الملائمة لاتخاذ القرار .
6- تطبيق النموذج.

2-7 المصطلحات المستخدمة

1- البدائل Course Of Action

وهي الخيارات او الاساليب المتاحه لاتخاذ القرار فعند تقديم الطالب للدراسة الى الكلية على سبيل المثال فأن هنالك عدة اقسام يمكن ان يختارها على ضوء معدله واختصاصه (علمي,ادبي,تجاري).

2- حالات الطبيعة State Of Nature

وهي العوامل التي تحدد متخذ القرار فمعدل التخرج من الاعدادية عامل محدد لخيارات الطالب

3- مصفوفة الدفع او مصفوفة القرار Pay Off Matrix OR Decision Matrix

وتكون على هيئة اعمدة تمثل حالات الطبيعة وصفوف وتمثل البدائل الممكنة وتمثيل النتائج المترتبة على تفاعل البدائل مع الحالات الطبيعية التي لها نفس الاحتمال.

3-7 خطوات اتخاذ القرار Steps Of Decision Making

1- تعريف وتحديد المشكلة
2- تحديد البدائل الممكنه لحل المشكلة
3- تحديد حالات الطبيعة
4- تحديد المردود اوالعائد
5- اختبار النموذج
6- تطبيق النموذج

4-7 حالات اتخاذ القرار Decision Making Situation

تصنف القرارات على اساس المعلومات التي نستند اليها الى ثلاثة انواع:

1- اتخاذ القرار في حالة التأكد التام
2- اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد
3- اتخاذ القرار في حالة المخاطرة

1-4-7 اتخاذ القرار في حالة التأكد Decision Under Certainty

في هذه الحالة تكون البدائل معلومة والحالة الطبيعية واحدة وطبيعي أن عملية اتخاذ القرار ميسرة حيث يختار متخذ القرار البديل الأمثل وفقا لأهدافه وهذه الحالة تحصل في الإعمال الروتينية .

2-4-7 اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد Decision Under Uncertainty

وهذه الحالة تمثل عدم القدرة على التنبؤ بالنتائج المستقبلية لعدم كفاية المعلومات وهي الاكثر حدوثا في الحياة العملية وهناك العديد من المعايير لاتخاذ القرار في هذه الحالة ولكل معيار الشروط التي ترجح استخدامه

ومن اهم هذه المعايير مايلي :

1- معيار الاحتمالات المتساوية (معيارلابلاس) Laplace Criteria Or Equally Likely Decision

2- معيار التشاؤم Criterion Of pessimism (Minimax)

3- معيار التفاؤل (Optimistic Criteria (Maximax

4- معيار الواقعية (معيار هورويز) HurWiez Criterion Or Criterion Of Realism Or Weighted Average Criterion

5- معيار الندم (معيار سفاج) (Savage Criterion Or Criterion Of Regret Minimax Regret)

ملاحظة : كافة المعايير اعلاه تفترض ان الطبيعة (State Of Nature) هي المنافس او الخصم

1-2-4-7 معيار لابلاس (الاحتمالات المتساوية) Laplace Criterion Or Criterion Of Rationality

وفي هذه الحالة نستخرج البديل الأمثل بخطوتين

أ- استخرج المتوسط الحسابي للحالات لكل بديل

ب- اختيار البديل الامثل (الذي يحقق اعظم ربح او اقل تكلفه) من بين المتوسطات المستخرجة في (أ)

EX1: توفرت لديك ثلاث فرص استثمارية و المطلوب استخراج البديل الامثل اذا علمت بأن الحالات المتوقعة كما موضحة هي ثلاث حالات و ان مصفوفة الدفع وهي تمثل ارباح كل بديل كالأتي :

الحالات / البدائل	أ	ب	جـ
(1)	4	3	5
(2)	6	2	7
(3)	2	1	3

الحل :

أستخراج الوسط الحسابي لكل بديل و كما يلي

$$(1) = \frac{4+3+5}{3} = 4$$

$$(2) = \frac{6+2+9}{3} = 5$$

$$(3) = \frac{2+1+3}{3} = 2$$

البديل الافضل هو (2) لكونه يحقق أعظم ربح (5)

EX:2

Alternatives	State of nature (product demand)				Expected pay off
	High	Moderate	Low	Nil	
Expand	50000	25000	- 25000	- 45000	Expect $=\frac{50000+25000-25000+45000}{4}=1.25$
Construct	70000	30000	- 40000	- 80000	Construct $=\frac{70000+30000-40000+80000}{4}=-5.000$
Subcontract	30000	15000	- 1000	- 10000	Subcontract $=\frac{30000+15000-1000-10000}{4}=8.500$

The maximum average pay off = 8.500

2-2-4-7 معيار التشاؤم Maxi min criterion (Wald criteria)

بموجب هذا المعيار نأخذ ادنى قيمة في كل صف ثم نختار من هذه القيم اعلى قيمه في حالة الارباح اما في حالة التكاليف نأخذ اعلى قيم في كل صف ثم نأخذ منها الأدنى Minmax و سبب لجوء متخذ القرار لهذا الاسلوب هو الرغبة في حساب أسوء الاحتمالات

و فيما يلي احتساب القرار الامثل بموجب هذا المعيار بأستخدام البيانات الواردة في المثال السابق

EX3 : (حالة الارباح)

الحالات / البدائل	أ	ب	جـ	معيار التشاؤم
(1)	4	3	5	**3**
(2)	8	-2	9	**-2**
(3)	2	1	3	**1**

البديل الأمثل (1) هو الأفضل maxmin

Ex : 4 **(حاله الارباح)**

Alternatives	State of nature (product demand)				Minimum
	High	Moderate	Low	Nil	
Expand	50000	25000	- 25000	- 45000	- 45000
Construct	70000	30000	- 40000	- 80000	- 80000
Subcontract	30000	15000	- 1000	- 10000	- 10000

Maxmin = - 10000

3-2-4-7 معيار التفاؤل Optimistic criteria Or Maximax criteria

في هذه الحالة نختار اعلى قيمة في كل صف ثم نختار اعلى قيمة من القيم المختارة و لتطبيق ذلك على مثالنا :

EX5 : (حالة الارباح)

الحالات / البدائل	أ	ب	جـ	معيار التفاؤل
(1)	4	3	5	**5**
(2)	8	-2	9	**9**
(3)	2	1	3	**3**

البديل الافضل هو (2)

ملاحظة : في حالة التكاليف نأخذ اقل قيمة في كل صف ثم نختار منها الاقل (Min (Min

EX6 : (حالة الارباح)

Alternatives	State of nature (product demand)				Maximum of row
	High	Moderate	Low	Nil	
Expand	50000	25000	- 25000	- 45000	50000
Construct	70000	30000	- 40000	- 80000	70000
Subcontract	30000	15000	- 1000	- 10000	30000

Maximax = 70000

4-2-4-7 معيار هورويز او معيار الواقعية Hurwiez Criteria Coeffcient Realism

يجمع هذا المعيار بين التفائل و التشاؤم حيث يقوم متخذ القرار بأفتراض معامل و رقم قياس التفاؤل يرمز له (a) حيث a تقع بين الصفر و الواحد الصحيح نسبة التشاؤم ستكون (1-a)

ففي مثالنا اذا كانت نسبة التفاؤل (0.7) فأن نسبة التشاؤم (1-0.7=0.3) ثم نأخذ معيار التفاؤل و التشاؤم

EX7 :- من خلال مصفوفة الواردة في مثال 5 استخرج معيار التفاؤل و التشاؤم

وكما يلي :

البدائل \ الحالات	معيار التفاؤل	معيار التشاؤم
(1)	5	**3**
(2)	9	**-2**
(3)	3	**1**

نفترض نسبة التفاؤل (0.7) و نسبة التشاؤم 1-0.7=0.3

(1) 5 * (0.7) + 3 * (0.3) = 3.5 + 0.9 =4.4

(2) 9 * (0.7) + (-2) * (0.3) = 6.3-0.6 = 5.7

(3) 7 *)0.7) + (1) * (0.3) = 4.9 + 0.3 = 5.2

و البديل الافضل هو (2) لان المصفوفة تمثل ارباح لان قيمة البديل (2) هي الاكبر

5-2-4-7 معيار سفاج (الندم) Savage criteria

و بموجب لهذا المعيار يتم التوصيل للقرار الامثل في حالة الارباح بأعتماد الخطوات الاتية :-

1. نطرح كل قيم العمود من اكبر قيمة في كل عمود من مصفوفة الدفع و المصفوفة الناتجة تدعى مصفوفة الندم
2. نأخذ اكبر قيمة في كل صف من صفوف مصفوفة الندم لنكون عمود الندم
3. و نختار اقل قيمة في عمود الندم حيث يمثل البديل المقابل لهذه القيمة هو البديل الامثل

و فيما يلي أستخدم هذا المعيار في حل مثالنا السابق

EX8 :- (مصفوفة الدفع)

الحالات / البدائل	أ	ب	جـ
(1)	4	3	**5**
(2)	8	-2	**9**
(3)	2	1	**3**

مصفوفة الندم

الحالات / البدائل	أ	ب	جـ	معيار الندم
(1)	4	0	4	**4**
(2)	0	5	0	**5**
(3)	6	2	6	**6**

البديل الافضل هو البديل (1) اقل قيمة في معيار الندم

Ex 9 :- (حالة الأرباح)

Alternatives	State of nature (product demand)			
	High	Moderate	Low	Nil
Expand	50000	25000	- 25000	- 45000
Construct	70000	30000	- 40000	- 80000
Subcontract	30000	15000	- 1000	- 10000
اكبر قيمة في كل عمود	70000	30000	-1000	-10000

Sol : نطرح جميع قيم الاعمدة من اكبر قيمة في كل عمود ينتج

Alternatives	State of nature (product demand)				Miximum of row
	High	Moderate	Low	Nil	
Expand	20000	5000	24000	35000	35000
Construct	0	0	39000	70000	70000
Subcontract	40000	15000	0	0	40000

Minimax = 35000

في حالة التكاليف :-

1- نطرح اقل اصغر قيمة في كل عمود من جميع قيم العمود و مصفوفة الناتجة تسمى مصفوفة الندم
2- نختار اكبر قيمة في كل صف لتكون عمود الندم
3- البديل الامثل هو الذي يقابل اقل قيمة في عمود الندم

EX10 : فيما يلي مصفوفة التكاليف و التي تمثل بدائل تمويل مشاريع أحد المشاريع و تكاليف استخدام كل بديل في ضوء ثلاث حالات كما يلي :

البدائل \ الحالات	أ	ب	جـ
(1)	40	20	6
(2)	60	30	9
(3)	70	20	3

و المطلوب أيجاد البديل الأمثل و من المعايير الاتية :

1- معيـــار لابـــلاس
2- معيـــار التشـــاؤم
3- معيـــار التفـائـل
1- معيـــار هوريــز أذا كان معامل الواقعية 80 %
2- معيـــار سـاڤاج (الندم)

1- معيـــار لابـــلاس

$$(1) = \frac{40+20+6}{3} = \frac{66}{3} = 22$$

$$(2) = \frac{60+90+9}{3} = \frac{159}{3} = 53$$

$$(3) = \frac{70+20+3}{3} = \frac{93}{3} = 31$$

البديل الأفضل هو البديل (1) لكونه أقل كلفة .

2- معيـــــار التشـــــاؤم

يتم أختيار أكبر تكلفة لكل بديل

البدائل	معيار الشـــاؤم
(1)	40
(2)	60
(3)	70

البديل الأفضل هو البديل (1) و هو الأقل تكلفة Min (Max).

3- معيـــار التفـــاؤل

أ- نأخذ أقل تكلفة لكل بديل (في كل صف)

ب- نختــار القيمة الأقل من القيم المختارة Min Min في الخطوة (أ)

البدائل	معيار التفـــاؤل
أ	6
ب	9
جـ	3

البديل الأفضل هو (جـ)

4- معيـــــار الواقعيـــــة (هورويز)

البدائل	معيار التفـــاؤل % 80	معيار الشـــاؤم % 20
(1)	6	40
(2)	9	60
(3)	3	70

(1) البديل = $6 (\% 80) + 40 (\% 20) = 4.8 + 8 = 12.8$

(2) البديل = $9 (\% 80) + 60 (\% 20) = 7.2 + 12 = 19.2$

(3) البديل = $3 (\% 80) + 70 (\% 20) = 2.4 + 14 = 16.4$

∴ البديل (1) هو الأفضل

5- معيـــــار ســـفـــاج (النــــدم)

1- بالنظر لكون المصفوفة تكاليف تطرح اصغر قيمة في كل عمود من قيم العمود فينتج مصفوفة الندم

2- تحدد اكبر قيمة لكل بديل (في الصف) حيث تكون عمود يدعى عمود الندم

3- أقل قيمة في عمود الندم تمثل البديل الأمثل (Min Max)

و في مثالنا عند طرح اقل قيمة في كل عمود ينتج مصفوفة الندم الاتية :

مصفوفة الندم

الحالات / البدائل	أ	ب	جـ	معيـــار الندم
(1)	0	0	3	3 (min max)
(2)	20	10	6	20
(3)	30	0	0	30

البديل (1) هو البديل الأمثل (أقل قيمة)

أتخـــاذ القرار في ظل المخاطرة Decisions Under Risk

في هذه الحاله يتوفر لدى متخذ القرار احتمالات حدوث لذا تسمى هذه القرارات بالقرارات الاحتمالية حيث ان حالات الطبيعية ليست معروفه او مجهولة بل هنالك احتمال لحدوثها و عندئذ يصبح بأمكان متخذ القرار ان يتنبأ بدرجة المخاطرة في محاولته اختيار الحل الامثل و ذلك بأستخدام التوزيع الاحتمالي لحالات الطبيعية بأستخدام معايير متعددة منها:

1- معيـــار القيمـــة الماليـــة المتوقعـــة Explected Montary Value (EMV)

2- معيـــار الفرصـة الضائعة المتوقعـــة Explected Opportunty Loss (EOL)

1- معيـــار القيمـــة الماليـــة المتوقعـــة Explected Montary Value (EMV)

و يطلق عليه ايضآ معيار القيمة المتوقعة و يتم حسابها بأتباع الخطوات الاتية :

1- تنظيم جدول بمكاسب كل بديل و حالات الطبيعية المختلفة

2- ضرب كل قيمة من قيم المصفوفة لكل حاله (كل صف) بأحتمالاتها و تجمع حاصل الضرب لكل صف

3- أذا كانت المصفوفة تمثل أرباح نختار اكبر ناتج (اكبر ربح) من الخطوة (2) و أذا كانت المصفوفة تمثل تكاليف نختار البديل المقابل الى الاقل تكلفة

EX1: الاتي مصفوفة عوائد و المطلوب أستخدام معيار القيمة المتوقعة في تحديد البديل الأمثل بأستخدام طريقة القيمة المالية المتوقعة

(حالة الأرباح)

حالات الطبيعة و الاحتمالات / البدائل	0.2 A1	0.3 A2	0.5 A3
(1)	20	60	30
(2)	30	50	50
(3)	10	40	20

الحل :

$$\begin{aligned} EMV(1) &= 20(0.2) + 60(0.3) + 30(0.5) \\ &= 4 + 18 + 15 \\ &= 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EMV(2) &= 30(0.2) + 50(0.3) + 50(0.5) \\ &= 6 + 15 + 25 \\ &= 46 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EMV(3) &= 10(0.2) + 40(0.3) + 20(0.5) \\ &= 2 + 12 + 10 \\ &= 24 \end{aligned}$$

∴ البديل الأفضل هو البديل الثاني

2- معيـــار الفرصــة الضائعة المتوقعــــة Expected apportunity Loss Criterion (EOL) Or Expected value Of Rrgrets

و يعتبر مدخل لتقليل خسارة الفرصة المتوقعة (EOL) و تمثل مقدار أنخفاض الربح في الحالات المختلفة للطبيعة حيث تدعى الحالة التي تنخفض فيها الخسائر الى الحد الأدنى و البديل الأمثل و للتوصل اليها نتبع الخطوات الاتية :

أ- تنظيم مصفوفة الأرباح لكل بديل

ب- تحديد خسارة الفرصة من خلال طرح كل القيم في كل صف من اعلى قيمة في الصف و أذا كانت البدائل تمثل اعمدة عندئذ نطرح كل فيم العمود من أعلى قيمة في العمود

جـ - حساب خسارة الفرصة المتوقعة (EOL) لكل بديل عن طريق ضرب خسارة الحالة في الاحتمال المقابل ثم جمع ناتج كل عمود

د – البديل الأفضل هو الذي تكون خسائره اقل

EX2 : الاتي مصفوفة دفع (تمثل الأرباح) و المطلوب حساب البديل الأمثل مستخدماَ طريقة معيار الفرصة الضائعة

	0.2	0.3	0.5
حالات طبيعية	A1	A2	A3
(1)	20	10	50
(2)	40	30	40
(3)	30	20	60

أستخراج مصفوفة الندم (عن طريق طرح جميع قيم العمود من اكبر قيمة في العمود) فينتج المصفوفة الاتية :

البدائل / حالات الطبيعة و الاحتمالات	0.2 A1	0.3 A2	0.5 A3
(1)	20	20	**10**
(2)	0	0	**20**
(3)	10	10	**0**

EMV (1) = 20 (0.3) + 20 (0.2) + 10 (0.5)
= 6 + 4 + 5
= 15

EMV (2) = 0 (0.3) + 0 (0.2) + 20 (0.5)
= 0 + 0 + 10
= 10

EMV (3) = 10 (0.5) + 10 (0.2) + 0 (0.5)
= 5 + 2 + 0
= 7

∴ البديل الأفضل هو البديل أقل قيمة ندم و هو البديل (3)

: EX3

أفرض ان المصفوفة الواردة في المثال السابق مصفوفة تكاليف أوجد البديل الأمثل مستخدماً مصفوفة الندم

حالات الطبيعة و الاحتمالات / البدائل	0.3 A1	0.2 A2	0.5 A3
(1)	20	10	**50**
(2)	40	30	**40**
(3)	30	20	**60**

الحل :

تحديد مصفوفة الندم (طرح أصغر قيمة في كل عمود من جميع قيم العمود)

حالات الطبيعة و الاحتمالات / البدائل	0.3 A1	0.2 A2	0.5 A3
(1)	0	0	**10**
(2)	20	30	**0**
(3)	10	10	**20**

EMV (1) = 0 (0.3) + 0 (0.2) + 10 (0.5)

= 0 + 0 + 5

= 5

EMV (2) = 20 (0.3) + 20 (0.2) + 0 (0.5)

= 6 + 4 + 10

= 10

EMV (3) = 10 (0.3) + 10 (0.2) + 20 (0.5)

= 3 + 2 + 10

= 15

∴ البديل الأفضل هو البديل أقل قيمة ندم و هو البديل (3)

Ex4 :- Following table represent 12 possible pay offs for the manu factuing companys expansion decision

Alternatives	**State of nature (product demand)**			
	High	Moderate	Low	Nil
Expand	50000	25000	- 25000	- 45000
Construct	70000	30000	- 40000	- 80000
Subcontract	30000	15000	- 1000	- 10000

Assumed a = 0.8

Determine optimum decision using :

1- Criterian of optimism (Maximax)
2- Criterian of pessimism (Maximin)
3- Minimax Regret criterion (savage criterion)
4- Huwicz criterion (criterion of realism)

1- Maximax Criterian or Criterian of optimism

Alternatives	State of nature (product demand)				Maximax Of row
	High	Moderate	Low	Nil	
Expand	50000	25000	- 25000	- 45000	50000
Construct	70000	30000	- 40000	- 80000	70000
Subcontract	30000	15000	- 1000	- 10000	30000

Maximax = 70000

2- Maximin Criterian of pessimism (wald Criterian)

Alternatives	State of nature (product demand)				Minimum Of row
	High	Moderate	Low	Nil	
Expand	50000	25000	- 25000	- 45000	- 45000
Construct	70000	30000	- 40000	- 80000	- 80000
Subcontract	30000	15000	- 1000	- 10000	- 10000

Maximin = - 10000

3- Minimax Regret criterion (savage criterion)

نطرح جميع قيم العمود من اكبر قيمة من القيم العمود في المصفوفة فتصبح المصفوفة بشكل الاتي :

Alternatives	State of nature (product demand)				Max num Of row
	High	Moderate	Low	Nil	
Expand	20000	50000	24000	35000	35000
Construct	0	0	39000	70000	70000
Subcontract	40000	15000	0	0	40000

The Minmax = 3500

4- Huwicz criterion (criterion of realism)

EMV (1) = 50000 (0.8) - (0.2) (45000)

= 40000 - 9000

= 31000

EMV (2) = 70000 (0.8) - (0.2) (80000)

= 56000 - 16000

= 40000

EMV (3) = 30000 (0.8) - (0.2) (10000)

= 24000 - 2000

= 22000

The optimum 40000

TABLE C-2

Proportion of total area under the normal curve from $-\infty$ to z.

where $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$.

z	$\psi(z)$	z	$\psi(z)$	z	$\psi(z)$	z	$\psi(z)$
0.00	0.5000	0.65	0.7422	1.30	0.9032	1.95	0.9744
0.01	0.5040	0.66	0.7454	1.31	0.9049	1.96	0.9750
0.02	0.5080	0.67	0.7486	1.32	0.9066	1.97	0.9756
0.03	0.5120	0.68	0.7517	1.33	0.9082	1.98	0.9761
0.04	0.5160	0.69	0.7549	1.34	0.9099	1.99	0.9767
0.05	0.5199	0.70	0.7580	1.35	0.9115	2.00	0.9772
0.06	0.5239	0.71	0.7611	1.36	0.9131	2.02	0.9783
0.07	0.5279	0.72	0.7642	1.37	0.9147	2.04	0.9793
0.08	0.5319	0.73	0.7673	1.38	0.9162	2.06	0.9803
0.09	0.5359	0.74	0.7703	1.39	0.9177	2.08	0.9812
0.10	0.5398	0.75	0.7734	1.40	0.9192	2.10	0.9821
0.11	0.5438	0.76	0.7764	1.41	0.9207	2.12	0.9830
0.12	0.5478	0.77	0.7794	1.42	0.9222	2.14	0.9838
0.13	0.5517	0.78	0.7823	1.43	0.9236	2.16	0.9846
0.14	0.5557	0.79	0.7852	1.44	0.9251	2.18	0.9854
0.15	0.5596	0.80	0.7881	1.45	0.9265	2.20	0.9861
0.16	0.5636	0.81	0.7910	1.46	0.9279	2.22	0.9868
0.17	0.5675	0.82	0.7939	1.47	0.9292	2.24	0.9875
0.18	0.5714	0.83	0.7967	1.48	0.9306	2.26	0.9881
0.19	0.5753	0.84	0.7995	1.49	0.9319	2.28	0.9887
0.20	0.5793	0.85	0.8023	1.50	0.9332	2.30	0.9893
0.21	0.5832	0.86	0.8051	1.51	0.9345	2.32	0.9898
0.22	0.5871	0.87	0.8078	1.52	0.9357	2.34	0.9904
0.23	0.5910	0.88	0.8106	1.53	0.9370	2.36	0.9909
0.24	0.5948	0.89	0.8133	1.54	0.9382	2.38	0.9913
0.25	0.5987	0.90	0.8159	1.55	0.9394	2.40	0.9918
0.26	0.6026	0.91	0.8186	1.56	0.9406	2.42	0.9922
0.27	0.6064	0.92	0.8212	1.57	0.9418	2.44	0.9927
0.28	0.6103	0.93	0.8238	1.58	0.9429	2.46	0.9931
0.29	0.6141	0.94	0.8264	1.59	0.9441	2.48	0.9934
0.30	0.6179	0.95	0.8289	1.60	0.9452	2.50	0.9938
0.31	0.6217	0.96	0.8315	1.61	0.9463	2.52	0.9941
0.32	0.6255	0.97	0.8340	1.62	0.9474	2.54	0.9945
0.33	0.6293	0.98	0.8365	1.63	0.9484	2.56	0.9948
0.34	0.6331	1.99	0.8389	1.64	0.9495	2.58	0.9951
0.35	0.6368	1.00	0.8413	1.65	0.9505	2.60	0.9953
0.36	0.6406	1.01	0.8438	1.66	0.9515	2.62	0.9956
0.37	0.6443	1.02	0.8461	1.67	0.9525	2.64	0.9959
0.38	0.6480	1.03	0.8485	1.68	0.9535	2.66	0.9961
0.39	0.6517	1.04	0.8508	1.69	0.9545	2.68	0.9963
0.40	0.6554	1.05	0.8531	1.70	0.9554	2.70	0.9965
0.41	0.6591	1.06	0.8554	1.71	0.9564	2.72	0.9967
0.42	0.6628	1.07	0.8577	1.72	0.9573	2.74	0.9969

0.43	0.6664	1.08	0.8599	1.73	0.9582	2.76	0.9971
0.44	0.6700	1.09	0.8621	1.74	0.9591	2.78	0.9973
0.45	0.6736	1.10	0.8643	1.75	0.9599	2.80	0.9974
0.46	0.6772	1.11	0.8665	1.76	0.9608	2.82	0.9976
0.47	0.6808	1.12	0.8686	1.77	0.9616	2.84	0.9977
0.48	0.6844	1.13	0.8708	1.78	0.9625	2.86	0.9979
0.49	0.6879	1.14	0.8729	1.79	0.9633	2.88	0.9980
0.50	0.6915	1.15	0.8749	1.80	0.9641	2.90	0.9981
0.51	0.6950	1.16	0.8770	1.81	0.9649	2.92	0.9982
0.52	0.6985	1.17	0.8790	1.82	0.9656	2.94	0.9984
0.53	0.7019	1.18	0.8810	1.83	0.9664	2.96	0.9985
0.54	0.7054	1.19	0.8830	1.84	0.9671	2.98	0.9986
0.55	0.7088	1.20	0.8849	1.85	0.9678	3.00	0.99865
0.56	0.7123	1.21	0.8869	1.86	0.9686	3.20	0.99931
0.57	0.7157	1.22	0.8888	1.87	0.9693	3.40	0.99966
0.58	0.7190	1.23	0.8907	1.88	0.9699	3.60	0.999841
0.59	0.7224	1.24	0.8925	1.89	0.9706	3.80	0.999928
0.60	0.7257	1.25	0.8944	1.90	0.9713	4.00	0.999968
0.61	0.7291	1.26	0.8962	1.91	0.9719	4.50	0.999997
0.62	0.7324	1.27	0.8980	1.92	0.9726	5.00	0.999997
0.63	0.7357	1.28	0.8997	1.93	0.9732		
0.64	0.7389	1.29	0.9015	1.94	0.9738		

المراجع العلمية

المراجع العربية

1. بحوث العمليات مع تطبيقات بأستخدام الحاسوب , فتحي خليل حمدان , الأولى , دار وائل , 2010
2. بحوث العمليات ((مفهوماً و تطبيقـاً)) , حامد سعد نور الشمري , الأولى , مكتبة الذاكــرة , 2010
3. الجديد في الأساليب البحث و بحوث العمليات , د. سهيلة عبدالله سعيد ,الأولى , دار الحامد للنشر و التوزيع , 2007
4. مقدمة في بحوث العمليات , فتحي حمدي , رشيق مرعي , الرابعة , دار وائل , 2004
5. مدخل الى بحوث العمليات , د. لطيف حكيم , د. عبد الجليل المنصور , الأولى , دار دمشق ,1987
6. بحوث عمليات , أ.د لطفي سيفين , الأولى , دار الجامعات المصرية , 1977
7. الأساليب الكمية التطبيقية في إدارة الاعمال , د. عبد الحميد البلداوي , د. نجم الحميدي , الأولى , دار وائل , 2008

References :

1. Gupta , P.K> and D.S .Hira , Operation Research , and ed . , S . Chand and , Company (put) Ltd , Rammagar , New Delhi , 1987
2. HAMDY A . TAHA , Opertio Research An Introduction , 4th , ed , 2006
3. J. K . Sharma , Operation Research 2nd . ,Macnildian , 2004
4. Hillier , Lieberman , Introduction to Operations, Researcn , 8th .ed , McGraw

الكتاب محاولة لجمع اسئلة مهمة من مصادر عالمية معتمدة و عرض خطوات حلها بطريقة مبسطة لتمكين طلاب البكلوريوس من استيعاب مواضيع مقررة في المناهج المعتمدة في الجامعات العراقية . وقد اعتمدنا اللغتين العربية و الانكليزية و العديد من الامثلة المحلولة لترغيب الطالب و تسهيل استيعابه للمادة العلمية اعتمادا على خبرتنا في تدريس المادة لمستويات مختلفة من الطلبة و من الله نستمد العون والتوفيق .

م.م عبد الحسن رحيم حمادي
كلية شط العرب الجامعة- 2023