جامعة شط العرب
كلية الادارة والاقتصاد
قسم إدارة وتسويق النفط والغاز

الرياضيات

المرحلة الاولى

2024-2025

Ma th

أعداد
م.م علياء ماجد دخيل

الفصل الاول
المجموعات الرياضية

الفصل الاول / المجموعات الرياضية

اولاً / مفهوم المجموعة

يعد مفهوم المجموعة هو أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات. إذ يشير ذلك الى تجمع العناصر المتميزة، إذ يمكن أن تكون هذه العناصر أعدادًا، حروفًا، أو أي نوع آخر من الكيانات.
وعادةً ما يتم تمثيل المجموعات باستخدام الأقواس المعقوفة. على سبيل المثال، المجموعة $\{1, 2, 3\}$ تحتوي على العناصر 1، 2، و3. إذ كل عنصر في المجموعة يعتبر فريدًا، مما يعني أنه لا يمكن أن يتكرر في نفس المجموعة. يمكن أن تكون المجموعات محدودة (مثل $\{1, 2, 3\}$) أو غير محدودة (مثل مجموعة الأعداد الطبيعية).إذ يمكن إجراء عمليات متعددة مثل الاتحاد، التقاطع، والفرق بين المجموعات ...الخ ، وسيتم شرح ذلك بشكل مفصل .
يساعد فهم المجموعات في تطوير مهارات التفكير المنطقي والتحليلي، ويعد أساسًا للعديد من فروع الرياضيات مثل نظرية المجموعات، الجبر، والهندسة.

* خصائص المجموعات

1.التفرد :

- لا يمكن أن تحتوي المجموعة على نفس العنصر أكثر من مرة.
- إذا كان لديك مجموعة $A = \{1, 2, 2, 3\}$، فإنها تُعتبر $A = \{1, 2, 3\}$.

2. عدم الترتيب

- ترتيب العناصر في المجموعة لا يهم.
- المجموعة $A = \{3, 1, 2\}$ هي نفسها المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$.

3. حجم المجموعة (عددها)

- عدد العناصر في المجموعة يُسمى "حجم" أو "عدد" المجموعة، ويمكن أن يكون عدد العناصر عدديًا محددًا أو لانهائيًا.
- إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$)، فإن حجم(A) هو 3.

وبناءً على ماسبق ، يمكن أن نعرف المجموعة على أنها :-

تجمع من الاشياء المحددة تحديداً تاماً ، وتسمى هذه الاشياء بعناصر المجموعة .

A={ عناصر المجموعة }

وكذلك يمكن التعبير عن المجموعة بطرق مختلفة تبعاً لاختلاف دلائلها من خلال :-

1/ التعبير عن المجموعة بالاحرف المختلفة

يمكن التعبير عن المجموعة بالاحرف الانكليزية الكبيرة او الصغيرة

A= { -,-,-,-,- } , a ={-,-,-,-,- } , B= { -,-,-,-,- } or b = {-,-,-,-,- } , ...

2/ التعبير عن المجموعة من خلال طبيعة عناصرها

يمكن التعبير عن المجموعة بطريقة الوصف اللغوي وذلك حسب نوع و طبيعة العناصر الموجودة داخلها وكلآتي :-

- مجموعة الاعداد الطبيعية (N)

- هي المجموعة التي تكون فيها الاعداد **الموجبة فقط** والتي تبدأ من الصفر مثلاً

N = { 0 ,1 ,2 ,3 , ...}

- مجموعة الاعداد الصحيحة (Z)

- هي المجموعة التي تكون فيها الاعداد **سالبة والموجبة** جميعها مثلاً

Z = {...., -2 , -1, 0 ,1 , 2 , ...}

- مجموعة الاعداد النسبية (Q)

- هي المجموعة التي تكون على شكل بسط ومقام (**كسر**) سواء كانت هذه المجموعة سالبة او موجبة شرط أن يكون المقام لايساوي صفر مثلاً

Q ={ -1/2 , 5/3,......}

- مجموعة الاعداد الحقيقية (R)

- هي المجموعة التي تكون فيها جميع الاعداد **الصحيحة والنسبية** مثلاً

R= {..... , -3, -1, 2/4 , 0 ,1 , 2 ,.....}

- مجموعة الاعداد العقدية (C)

-هي المجموعة التي يُعبر عنها **بالزوج المرتب** (X,Y) إذ أن X,Y اعداد حقيقية مثلاً

C=(3 , - 6)

- المجموعة الخالية (∅)

- هي المجموعة التي **لا تحتوي** على أي عنصر داخلها

Y= { ∅ } or Y={ }

- مجموعة الاعداد المركبة

هي المجموعة التي تتضمن جميع الأرقام والتي يمكن تمثيلها بالشكل التالي

$$z = [a \pm bi]$$

إذ أن :

- (a) هو الجزء الحقيقي ويمثل عددًا حقيقيًا.
- (b) هو الجزء التخيلي ويمثل أيضًا عددًا حقيقيًا.

$$z = (2 + 4i), z = (2 - 4i)$$

- (i)هو الوحدة التخيلية، وتساوي ($\sqrt{i}$ = -1 ، $i^{\frac{1}{2}} = -1$).

<u>اوبالشكل القطبي :</u>

$$z = (cos\theta + isin\theta)$$

❋ المجموعة الجزئية

- هي عباره عن علاقة بين **<u>مجموعتين</u>** فمثلاً إذا كان لدينا مجموعتان (A) و (B) ، نقول إن (A) هي مجموعة جزئية من (B)، إذا كانت **<u>كل</u>** العناصر في المجموعة (A) موجودة أيضًا في المجموعة (B).

$$A \subseteq B$$

❋ المجموعة المنتهية

- هي المجموعة التي تكون فيها الاعداد **<u>محدده</u>** مثلاً

Y= {1, -1, 0 , 2 , 1/2}

❋ المجموعة غير المنتهية

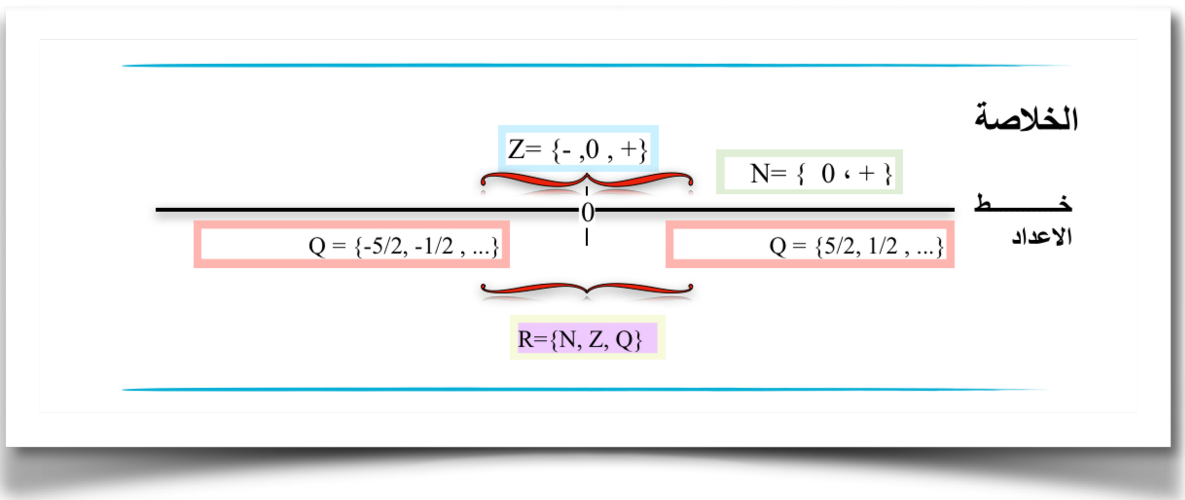
- هي المجموعة من الاعداد **<u>غير المحدده</u>** مثلاً

Y= {1, -1, 0 , 2 , 1/2 , ...}

❋ مجموعة الاعداد غير النسبية

وهي مجموعة الاعداد التي لايمكن كتابتها على شكل بسط ومقام (**<u>كسر</u>**) مثلاً

$$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{4}, \Pi$$



ثانياً / المجموعات و العمليات الرياضية

1/ المجموعات الجزئية

كما ذكرنا سابقاً ان المجموعة الجزئية عباره عن العلاقة بين مجموعتين فمثلاً إذا كان لدينا مجموعتان (A) و (B) ، نقول إن (A) هي مجموعة جزئية من(B) ، **إذا كانت كل العناصر** في المجموعة (A) موجودة أيضًا في المجموعة (B) وبالعكس ، ويمكن التعبير عنها بشكل رياضي .

$$A \subseteq B$$

مثال 1/

إذ كانت

A= {1,2,4,8,6} , B={1,5,2}

هل المجموعة B جزئية من المجموعة A؟ وضح ذلك بذكر السبب

الحل //

$$B \subseteq A$$

السبب :- كل عناصر المجموعة B هي جزء من المجموعة A

مثال2/

إذ كانت

A= {1,2,4,8,6} , B={1,5,2,7}

هل المجموعة B جزئية من المجموعة A؟ وضح ذلك بذكر السبب

الحل :-

$$B \nsubseteq A$$

السبب :-

$$7 \nsubseteq A$$

الخلاصة :-

في حال عدم وجود عنصر واحد من عناصر المجموعة A ضمن عناصر المجموعة B او العكس فان التعبير الرياضي لهذه المجموعة يكون

$$A \nsubseteq B$$

or

$$B \nsubseteq A$$

2/ المجموعات المتساوية

المثال3

نفترض أن لدينا مجموعتين:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$B = \{8, 6, 4, 2\}$$

السؤال //

هل المجموعتان (A) و(B) متساويتان؟

الحل //

لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتان، يجب أن تتضمن كل مجموعة نفس العناصر.

نلاحظ كل العناصر في المجموعة(A) موجودة أيضًا في المجموعة(B).

- والعكس صحيح، كل العناصر في المجموعة(B) موجودة أيضًا في المجموعة(A).

بما أن كلا المجموعتين تحتويان على نفس العناصر، فإن:

$$[A = B]$$

المجموعتان(A) و(B) متساويتان.

الخلاصة :-

كل المجموعات المتساويه هي مجموعات جزئية الا أن المجموعة الجزئية لا تكون متساويه احياناً .

[A = B]

فأن

$$A \subseteq B$$

مثال 4

إذا كانت

$$A = \{ X : X = n + 1, n = 2, 3, 5\}$$
$$B = \{3, 4, 7\}$$

هل المجموعتان (A) و(B) متساويتان ؟

الحل//

نحسب العناصر كالتالي:

- إذا كان($n = 2$)　　$(X = 2 + 1 = 3)$

- إذا كان($n = 3$)　　$(X = 3 + 1 = 4)$

- إذا كان($n = 5$)

$(X = 5 + 1 = 6)$

لذا، يمكننا كتابة المجموعة A كالتالي:

$$A = \{3, 4, 6\}$$

المجموعة B

$$B = \{3, 4, 7\}$$

بما أن عنصر واحد من عناصر المجموعة B (7) غير موجودة في المجموعة A، فإن:

$$[B \neq A]$$

نشــاط 1 //

دعنا نفترض أننا نريد دراسة مجموعة من الطلاب في فصل دراسي بناءً على المواد التي يدرسونها.
- المجموعة (A) : مجموعة الطلاب الذين يدرسون الرياضيات.
- المجموعة (B): مجموعة الطلاب الذين يدرسون العلوم.

- المجموعة A ={سعيد، ليلى، أحمد، زينب}
- المجموعة B ={أحمد، فاطمة، سارة، زينب}
السؤال //
هل المجموعتان(A) و(B)
1- جزئيتان ؟
2- متساويتان ؟
وضح ذلك رياضياً مع ذكر السبب .

نشاط 2//

إذا كانت

$$\mathbf{A = \{ X : X = n^2 + 4 , n = 3,4,5\}}$$
$$\mathbf{B = \{ 12, 13, 20 \}}$$

هل المجموعتان (A) و(B)
جزئية ؟
متساوية ؟

3 / المجموعات المتحدة

تشير المجموعات المتحدة الى مفهوم رياضي يتعلق **بدمج** مجموعتين أو أكثر لتشكيل **مجموعة جديدة** تحتوي على جميع العناصر من المجموعات الأصلية دون تكرار .

- **يُرمز إلى الاتحاد بالرمز** ∪

مثال5 //

إذا كانت:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{3, 4, 5\}$$

فإن:

$$A \cup B = C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

4/ المجموعات المتقاطعة

تشير المجموعة المتقاطعة الى مفهوم رياضي يتعلق بالعناصر **المشتركة** بين مجموعتين. إذا كانت لدينا مجموعتان، فإن **التقاطع** بينهما هو مجموعة تحتوي على العناصر التي توجد في كلا المجموعتين.

- **يُرمز له بالرمز** $\cap$

مثال 6//

إذا كانت:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

فإن:

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

الخلاصة :-

المجموعة المتقاطعة تعكس العناصر التي تتشاركها المجموعتان، مما يساعد في تحديد العناصر المشتركة بينهما.
اما المجموعة المتحدة تعكس جميع العناصر الموجودة في المجموعتان .

5- الفرق بين المجموعتين

يشير الفرق بين مجموعتين الى مفهوم رياضي يعبر عن العناصر التي توجد في مجموعة معينة ولا توجد في المجموعة الأخرى. يُساعد هذا المفهوم في تحديد العناصر الفريدة التي تنتمي إلى مجموعة دون الأخرى.

- **يُرمز له بالرمز(A - B) او الفرق العكسي (B - A)**

مثال7//

إذا كانت:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

فإن العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B هي :

$$A - B = \{1, 2\}$$

وأيضًا يمكن حساب الفرق العكسي(B - A) بشكل التالي
العناصر في B ولا توجد في A هي

$$B - A = \{5,6\}$$

مثال8//

لنأخذ مجموعتين:

المجموعة $A = \{2, 4, 6, 8\}$
المجموعة $B = \{4, 5, 6, 7\}$

من خلال المجموعتين (A، B) جد:-
1/ الفرق بين المجموعتين
2/ الفرق العكسي

الحل //

1/ الفرق بين المجموعتين

$$A - B = \{2, 8\}$$

2/ الفرق العكسي

$$B - A = \{5, 7\}$$

6/ قانون توزيع المجموعات

تعبر قوانين توزيع المجموعات عن كيفية توزيع العمليات بين المجموعات، وتشمل قوانين توزيع الاتحاد والتقاطع. ومن بين القوانين الأساسية :

. قانون توزيع الاتحاد على التقاطع

إذا كانت لديك ثلاث مجموعات(A)،(B)، و(C)، فإن:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

. قانون توزيع التقاطع على الاتحاد

إذا كانت لديك ثلاث مجموعات(A)،(B)، و(C)، فإن:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

مثال 9 //

لنفرض أن:

A ={1, 2, 3}
B ={2, 3, 4}
C ={3, 4, 5}

جد $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1. حساب $(B \cap C)$

$$(B \cap C) = \{4, 3\}$$

2. حساب $A \cup (B \cap C)$

$$(A \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

3. حساب $(A \cup B)$،$(A \cup C)$:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

4. حساب التقاطع:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

مثال 10 //

باستعمال نفس المجموعات في المثال 9:

جد

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1. حساب $(B \cup C)$

$$(B \cup C) = \{2, 3, 4, 5\}$$

2. حساب

$$A \cap (B \cup C)$$
$$(A \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$$

3. حساب

$(A \cap C)$ و $(A \cap B)$

$(A \cap B) = \{2, 3\}$

$(A \cap C) = \{3\}$

4. حساب الاتحاد:

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 3\}$

نشاط 3 //

لنفترض أن لدينا المجموعات التالية:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

$C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

جد

1/ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2/ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

نشاط 4 //

دعنا نفترض لدينا المجموعات التالية:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{4, 5, 6, 7\}$

$C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

جد //

1. $(A \cup B)$ ، $(A \cup C)$ ، $(B \cup C)$
2. $(A \cap B)$ ، $(A \cap C)$ ، $(B \cap C)$
3. $(A - B)$ ، $(B - A)$ ، $(C - A)$ ، $(C - B)$
4. **لنفترض أن هناك مجموعة** $D = \{4,6,7\}$
إذ نلاحظ $(A \neq D)$ **الا أنها جزئية وغير متساوية مع B وضح ذلك ؟**
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

الفصل الثاني

الغاية *limit*

الفصل الثاني / الـغـايـة limit

اولاً / مفهوم الغاية في الرياضيات (Limit)

يعد مفهوم الغاية من المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي، وتستخدم لوصف سلوك الدوال عندما تقترب متغيراتها من قيمة معينة أو من اللانهاية. تعتبر الغاية أداة قوية لفهم التغيرات والدوال في الرياضيات.

إذا كانت لدينا دالة f(x)، فإن الغاية ($lim_{x\to a}$ f(x)) تعني أننا نريد معرفة القيمة التي تقترب إليها f(x) عندما يقترب(x) من القيمة (a).

- يُكتب حد الدالة كما يلي:

$$lim_{x\to a}\, f(x) = L$$

حيث(L) هي القيمة التي تقترب منها f(x) عندما يقترب(x) من(a).

ثانياً // أنواع الغايات

1.غايات نهائية:

عندما تقترب(x) من قيمة معينة (a).

- مثال:

$$lim_{x\to 2}\, (3x + 1) = 3(2) + 1 = 7$$

2. غايات غير نهائية :

عندما تقترب (x) من اللانهاية.

- مثال:

$$lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ثالثاً // خصائص الغايات

- الإضافة :

$$lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

- الضرب :

$$lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

- الاقتران :

$$lim_{x\to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

إذ أن (c) هو عدد ثابت .

المثال 1

احسب الغاية للدالة الخطية التالية

$$lim_{x\to 2}(3x+1)$$

الحل:

- نعوض مباشرةً (x = 2) :

$$3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$$

النتيجة:

$$lim_{x\to 2}(3x+1) = 7$$

المثال 2:

احسب الغاية للدالة الكسرية التالية :

$$lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

الحل:

1. التعويض المباشر:

- إذا عوضنا مباشرةً بـ (x = 1) :

$$1^2 - 1 \div 1 - 1 = \frac{0}{0}$$ (شكل غير محدد) ❌

2. تحليل البسط:

- نحلل البسط:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

وبالتالي:

$$lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

3. إلغاء العامل المشترك او الاختصار بين البسط والمقام

- بعد إلغاء (x - 1) :

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2$$

النتيجة :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \ ✅$$

الضرب بالمرافق

هو تقنية تُستخدم في الجبر لتبسيط التعبيرات الرياضية، خاصة عند التعامل مع الكسور التي تحتوي على جذور.
يتم استخدام هذه الطريقة لتحويل تعبير يحتوي على جذر في **المقام** إلى تعبير خالٍ من الجذر.

تعريف المرافق

إذا كان لدينا عدد مركب $a+b\sqrt{c}$ ، فإن **المرافق** له هو $a-b\sqrt{c}$.

طريقة الضرب بالمرافق

مثال توضيحي

لنفترض أننا نريد تبسيط تعبير يتضمن جذرًا في المقام مثل:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

خطوات الضرب بالمرافق

1. تحديد المرافق :

المرافق لـ ($2+\sqrt{3}$) هو $(2-\sqrt{3})$.

2. الضرب بالمرافق

- نضرب البسط والمقام بالمرافق:

$$\frac{1\cdot(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

3. تبسيط المقام

- نستخدم صيغة الفرق بين مربعين في المقام :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$(a = 2)$ و\ $(b=\sqrt{3})$:

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$$

4. إيجاد الناتج :

$$\frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$$

النتيجة:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

مثال توضيحي اخر

لنفترض أننا نريد تبسيط:

$$\frac{3}{1+\sqrt{5}}$$

1. تحديد المرافق :
- المرافق لـ $(1+\sqrt{5})$ هو $(1-\sqrt{5})$.

2. الضرب بالمرافق :

$$\frac{3\cdot(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$$

3. تبسيط المقام :

$$(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) = 1^2-(\sqrt{5})^2 = 1-5 = -4$$

4. إيجاد الناتج :

$$\frac{3(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{-3(1-\sqrt{5})}{4} = \frac{-3+3\sqrt{5}}{4}$$

النتيجة

$$\frac{3}{1+\sqrt{5}} = \frac{-3+3\sqrt{5}}{4}$$

المثال 3//

احسب الغاية للدالة الجذرية التالية :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

الحل //

1. التعويض المباشر:

- إذا عوضنا مباشرةً(x = 0):

$$\frac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \frac{0}{0}$$ (شكل غير محدد) ❌

2. ضرب وتبسيط :

- نضرب البسط والمقام بـ

$$\sqrt{x+1}+1$$ (المرافق)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

3. التعويض (x=0) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

النتيجة :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

نشاط 1/

احسب الغاية

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x}-2$$

نشاط 2/

احسب الغاية

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

نشاط 3/

احسب الغاية:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

نشاط 4/

احسب الغاية:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

هناك نوع اخر من الغايات وتسمى الغايات من الجهتين او الغايات المنفصلة ، وهو أن تتساوى الغايات من اليمين واليسار عند النقطة (a)

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L1$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L2$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

وتكون الدالة موجودة في حالة

L1=L2

مثال 4//

لتكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \ge 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

هل الدالة f(x) غاية عند (1)

الحل //
شرط تساوي الحدين

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \quad \lim_{x\to c^+} f(x)$$

يتم حساب الحدين على النحو التالي:

$$limf(x) = limx^2 + 1 = 1 + 1 = 2 = L1$$
$$limf(x) = lim2x = 2(1) = 2 = L2$$

نلاحظ بأن (L1) (L2) متساويان أي أن ،
.L2 = L1

المثال 5//

لنعتبر الدالة التالية:

f(x)= $x + 1, x < 2$
f(x)= $x^2, x > 2$

هل الدالة موجودة عند x = 2

الحل//
حساب الحد الأيسر $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

$$lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(x + 1) = 2 + 1 = 3$$

حساب الحد الأيمن $lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2) = 2^2 = 4$$

- الحد الأيسر

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$$

الحد الأيمن

$$lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

الحدود غير متساوية
الحد الأيسر يساوي 3 بينما الحد الأيمن يساوي 4.
L2 ≠L1

الفصل الثالث
الـــدوال

الفصل الثالث / الدوال

اولاً // الدالة المتباينة والدالة الشاملة

تعد الدالة المتباينة دالة تربط **<u>كل عنصر</u>** في مجموعة معينة **(المجال المنطلق)** **<u>بعنصر واحد فقط</u>** في مجموعة أخرى **(المجال المقابل)**. يمكن تعريف الدالة التباينية رياضيًا على النحو التالي:

إذا كانت (f) دالة من المجموعة (A) إلى المجموعة (B)، فإن كل عنصر (x) في (A) يرتبط بعنصر واحد فقط f(x) في (B). ويكتب ذلك بالشكل:

$$f : A \to B$$

إذ أن :

- (A) هي المجموعة المنطلقة (المجال المنطلق).
- (B) هي المجموعة المقابلة (المجال المستقر) .
- f(x) هو العنصر المرتبط بـ (x) في المجموعة (B).
- **(G)** هو جميع الازواج المرتبة (x,y) للدالة f ويطلق علية (بيان الدالة)
- يسمى العنصر **x∈A** بالمتغير المستقل ، بينما يسمى **y∈B** بالمتغير المعتمد .
- مدى الدالة **(Rf)**

$$\mathbf{Rf = f(A) = \{f(a) : a \in A\}}$$

على العكس من الدالة الشاملة (الدالة غير المتباينة) تسمح بأن يرتبط **<u>كل عنصر في المجال المستقر</u>** بعناصر **<u>متعددة في المجال المنطلق</u>** ، ويمكن أن تكون هناك عناصر في (B) لها أكثر من سابقة في (A).

اي أن مداها يساوي مستقرها

$$\mathbf{Rf=f(A)=B}$$

أي أن كل عنصر في B هو قيمة للدالة في عنصر واحد ع الاقل في A

مثال 1//

اذ كانت

$$A=\{1,2,3\}$$
$$B=\{-2,-4\}$$

وان الدالة

$$f=\{(1,-2)\ ,(2,-2)\ ,(3,-2)\}$$

هل الدالة شاملة وتباينية مع ذكر السبب

الحل //

1/ $f : A \to B$ هي شاملة لان كل عناصر A لها صوره في عنصر مستقرها B

2/ $f : A \to B$ ليست متباينة لان العنصرين (1،2) في A لها نفس المستقر (-2) في B

ثانياً // خصائص الدالة

1. التعريف: يجب أن تكون كل قيمة في المجال مرتبطة بقيمة واحدة فقط في المجال المستهدف.
2. العلاقة: يمكن أن تكون الدالة خطية، غير خطية، مستمرة، منفصلة، وغيرها.
3. التمثيل: يمكن تمثيل الدالة برسم بياني، جدول، أو معادلة.

مثال2//

إذا كانت الدالة معرفة كالاتي :

$$f(a) = 2a$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 4, 6\}$$

برهن او وضح فيما إذ كانت f تمثل بيان لدالة $A \to B$ واكتب الدالة كأزواج مرتبة .

الحل //

الدالة

$$\mathbf{f(A) = \{ f(a) = 2a \atop a \in A}$$

$\longmapsto 2(1) = 2$

$\longmapsto 2(2) = 4$

$\longmapsto 2(3) = 6$

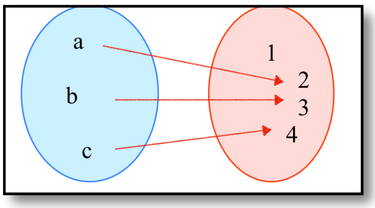
- **الدالة (f) كأزواج مرتبة**

$$\mathbf{\{(1,2),(2,4),(3,6)\}}$$

مثال3//

برهن إذ كان الشكل (1-1) يُعد من الدوال المتباينة

الشكل (1-1)



$$f : A \to B$$

الحل //

يعد الشكل (1-1) ، من الدوال بسبب ارتباط كل عناصر المجال (A) بعنصرواحد من عناصر المجال (B) .

نشاط 1//

إذ كانت

A = { a,b,c}
B = {2,4,6,8,10}

برهن إذ كانت العلاقات التالية دالة تباينية او ليست دالة

$f1$ **= {(a,2) ,(b,4) ,(c,8)}**
$f2$ **= {(a,c) ,(b,6) ,(c,10)}**
$f3$ **= {(a,6) ,(b,8) ,(b,10) ,(c,2)**

- أستخراج مدى الدالة f

عندما نتعامل مع دوال نُعبر عنها كأزواج مرتبة (x, y)، نبحث عن مدى(y) بالنسبة لقيم (x).

مثال4 //

لنعتبر الدالة التالية المعطاة بالأزواج المرتبة:

$$f = \{(8,4),(6,3),(4,2),(2,1)\}$$

استخراج المدى (R)

1. لننظر إلى القيم (y) المرتبطة بكل (x):

- (y)عند(x = 1)(2)هو
-(y)عند(x = 2) (4)هو
-(y)عند(x = 3) (6)هو
-(y)عند(x = 4) (8)هو

2. تحديد المدى: القيم الممكنة لـ(y) هي:

$$\{8,6,4,2\}$$

وبالتالي، مدى الدالة هو:

$$\{8,6,4,2\}$$

مثال5 //

لنعتبر الآن الدالة التالية:

$$f = \{(13,3),(7,2),(3,1),(1,0)\}$$

استخراج المدى (R)

1. لننظر إلى القيم(y) المرتبطة بكل (x):
- (y) عند(x = 0) هو(1)
- (y) عند(x = 1) هو(3)
- (y) عند(x = 2) هو(7)
- (y) عند(x = 3) هو(13)

2. القيم الممكنة لـ(y) هي:

$$\{1, 3, 7, 13\}$$

وبالتالي، مدى الدالة هو:

$$\{1, 3, 7, 13\}$$

لاستخراج مدى الدالة المعطاة كأزواج مرتبة، يمكننا ببساطة جمع قيم(y) المرتبطة بكل(x) وتحديد القيم المختلفة. بهذا الشكل، نحصل على مدى الدالة بشكل واضح.

مثال6 //

إذ كانت

$$A= \{-2,-1,0,1,2\}$$
$$B=\{6,10,14,18,22\}$$

والدالة معرفة كالتالي

$$f(a) = 2a + 3$$

$*a \in A$

1- اكتب صورة كل عنصر
2-ماهو بيان الدالة (G)
3- ماهو مدى الدالة (R)

الحل //

1- صورة كل عنصر

$f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$
$f(-1) = 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$
$f(0) = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$
$f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$
$f(2) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$

2 - بيان الدالة هو :

(-2, -1) ،(-1, 1) ، (0, 3) ، (1, 5) ، (2, 7)

3- مدى الدالة هو :

$$Rf = f(A) = \{ -1,1,3,5,7\}$$

الفصل الرابع
الــمصفـوفـات

الفصل الرابع// الـــمـصـفـوفـات

اولاً // مفهوم المصفوفات

المصفوفات هي هياكل رياضية تُستخدم بشكل واسع في الرياضيات وعلوم الحاسوب والهندسة ويمكن ان نعرف المصفوفة على أنها مجموعة من الاعداد او كميات مرتبة في صفوف وأعمده ، ويرمز لها بالحرف الانكليزية الكبيرة (.....,A,B)

-الشكل العام للمصفوفة

يمكن كتابة المصفوفة بشكل عام على النحو التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- حجم المصفوفات

حجم المصفوفة يُحدد بعدد الصفوف والأعمدة فيها. يُعبر عن حجم المصفوفة بالصيغة:

$$m \times n$$

إذ أن :

-(m) هو عدد الصفوف.

-(n) هو عدد الأعمدة.

- مصفوفة (2×2): مصفوفة ثنائية تحتوي على 2 صفوف و 2 أعمدة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- مصفوفة (3×3): مصفوفة ثلاثية تحتوي على 3 صفوف و3 أعمدة.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

-أنواع المصفوفات

هناك عدة أنواع من المصفوفات، وكل نوع له خصائصه الخاصة. إليك بعض الأنواع الشائعة:

1. المصفوفة الصفية

مصفوفة تحتوي على صف واحد فقط. شكلها العام:

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

2. المصفوفة العمودية
مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط. شكلها العام:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

3. المصفوفة المربعة
مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها. شكلها العام:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4. المصفوفة المتناظرة
مصفوفة(A) إذ أن ($A = A^T$). شكلها العام:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

5. مصفوفة الوحدة (I)
مصفوفة مربعة تحتوي على 1 في القطر الرئيسي و0 في باقي العناصر. شكلها العام:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. المصفوفة القطرية (D)
مصفوفة مربعة تحتوي على عدد معين في القطر الرئيسي و0 في باقي العناصر. شكلها العام:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ثانياً // العمليات الرياضية على المصفوفات

مثال 1//

إذا كانت لدينا المصفوفتان(A) و(B)

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$$

جد

1. (A+B)، (A-B)
2. (A* B)

1 - جمع وطرح المصفوفات

يمكن جمع مصفوفتين فقط إذا كان لهما نفس الحجم (عدد الصفوف والأعمدة). يتم جمع العناصر المقابلة في المصفوفتين. وتتم عملية الطرح بنفس طريقة اذ يتم طرح العناصر المقابلة.

$$A+B=\begin{bmatrix}1+5&2+6\\3+7&4+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}1-5&2-6\\3-7&4-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-4\\-4&-4\end{bmatrix}$$

2. ضرب المصفوفات

يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية.

$$C=A\cdot B$$

$$C=A\cdot B=\begin{bmatrix}(1\cdot 5+2\cdot 7)&(1\cdot 6+2\cdot 8)\\(3\cdot 5+4\cdot 7)&(3\cdot 6+4\cdot 8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&22\\43&50\end{bmatrix}$$

مثال2//

من المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}2&4&6\\1&3&5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}7&5&3\\4&2&0\end{bmatrix}$$

جد (A+B)، (A-B)

$$A+B=\begin{bmatrix}2+7 & 4+5 & 6+3\\ 1+4 & 3+2 & 5+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 9 & 9\\ 5 & 5 & 5\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}2-7 & 4-5 & 6-3\\ 1-4 & 3-2 & 5-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -1 & 3\\ -3 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

مثال 3//

لنأخذ المصفوفتين:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\end{bmatrix}$$

جد مصفوفة (C.D)

$$C\cdot D=\begin{bmatrix}1\cdot 7+2\cdot 9 & 1\cdot 8+2\cdot 10\\ 3\cdot 7+4\cdot 9 & 3\cdot 8+4\cdot 10\\ 5\cdot 7+6\cdot 9 & 5\cdot 8+6\cdot 10\end{bmatrix}$$

حساب القيم:

$$C\cdot D=\begin{bmatrix}7+18 & 8+20\\ 21+36 & 24+40\\ 35+54 & 40+60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25 & 28\\ 57 & 64\\ 89 & 100\end{bmatrix}$$

مثال 4 //

من المصفوفة الثنائية

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

جد KA إذا علمت بأن K=3

$$k\cdot A=3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2\\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$$

3. تدوير المصفوفات A^T

تدوير المصفوفة يعني تحويل صفوفها إلى أعمدة والعكس.

مثال 5//

من المصفوفات التالية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

جد A^T، E^T

الحل//

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

ثالثاً // معكوس المصفوفة A^{-1}

لإيجاد معكوس المصفوفة، يجب أن تكون المصفوفة مربعة (عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة) وأن يكون محددها غير صفر. هنا خطوات حساب المعكوس:

خطوات إيجاد معكوس المصفوفة

1. تأكد من أن المصفوفة مربعة.
2. **حساب المحدد للمصفوفة ، إذا كان المحدد صفرًا، فلا يوجد معكوس.
3. استعمال صيغة المعكوس للمصفوفة(A) كالتالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

إذ أن :

($\operatorname{adj}(A)$) هو المصفوفة المرافقة .

مثال 6//

ماهو المعكوس (A^1) لهذه المصفوفه الثنائية

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل//

1. **حساب المحدد**:

$$\mathrm{D}(A) = (4 \cdot 6) - (7 \cdot 2) = 24 - 14 = 10$$

2. **حساب المصفوفة المرافقة

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

3. **حساب المعكوس**:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

المعكوس للمصفوفة(A) هو:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

مثال7//

من المصفوفة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

جد مصفوفة A^1

الحل //

حساب المحدد

$$\mathrm{D}(A) = 1(1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) - 2(0 \cdot 0 - 4 \cdot 5) + 3(0 \cdot 6 - 1 \cdot 5)$$
$$= 1(0 - 24) - 2(0 - 20) + 3(0 - 5)$$

$$= -24 + 40 - 15 = 1$$

حساب المصفوفة المرافقة

- المصفوفات الفرعية

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}(M_{11}) = -24$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}(M_{12}) = -20$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}(M_{13}) = -5$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}(M_{21}) = -18$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}(M_{22}) = -15$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}(M_{23}) = 4$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}(M_{31}) = 5$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}(M_{32}) = 4$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(M_{33}) = 1$$

تكوين المصفوفة المرافقة

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

حساب المعكوس

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

نشاط 1//

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

جد مصفوفة A^1

نشاط 2//

لنفترض أن لدينا المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

جد مصفوفة A^1

الحل //

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{25} & \frac{2}{5} & -\frac{17}{25} \\ \frac{7}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{25} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

نشاط 3//

من المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

جد

- (A+B)، (A-B)
- (A.B)
- A^T, B^T
- A^{-1}, B^{-1}

الفصل الخامس
الــــمعادلات الخطية

الفصل الخامس // المعادلات الخطية

اولاً // الشكل العام للمعادلات الخطية

تعد المعادلات الخطية نوع من أنواع المعادلات الجبرية التي تمثل علاقات خطية بين المتغيرات. إذ تمثل علاقة خطية ، مما يعني أنه إذا تم رسمها على نظام الإحداثيات (محور سيني وآخر صادي)، فإنها تشكل خطاً مستقيماً.
ويكون الشكل العام للمعادلات الخطية كالاتي :

$$ax + b = 0$$
$$ax + by + c = 0$$

إذ أن :

-(x,y) متغيران .

-(a) هو معامل (x) $(a \neq 0)$.

-(b) هو معامل (y) $(b \neq 0)$

-(a,b,c) ثوابت

ثانياً // أنواع المعادلات الخطية

- معادلات ذات متغير واحد : ($2x + 3 = 0$).
- معادلات ذات متغيرين : ($2x + 3y = 6$).

ثالثاً// تطبيقات المعادلات الخطية

تستعمل المعادلات الخطية في مجالات عده منها :

- الاقتصاد: لتحليل التكاليف والعوائد.
- الفيزياء: لوصف الحركة والعلاقات بين الكميات.
- الإحصاء: في نمذجة البيانات والعلاقات.

يمكن استخدام المعادلات الخطية لحل مشكلات مختلفة في الحياة اليومية، مثل حساب الميزانية أو التنبؤ بالنتائج بناءً على بيانات معينة.

رابعاً // طرق حل المعادلات الخطية

1/ يمكن حل المعادلة الخطية ذات متغير واحد (x) او متغيرين (x,y) بطريقة التعويض اوالحذف .

مثال 1//

جد قيمة المتغير

$$[2x + 4 = 0]$$

الحل //

1. ننقل الطرف الايمن خارج اليساوي 4 مع تغيير الاشاره له

$$[2x = -4]$$

2. نلاحظ المعادلة تقبل القسمة على العدد 2:

$$[x = -2]$$

مثال 2 //

جد قيم (x,y) في المعادلتين الخطيتين

(2x + 3y = 6) .... (1)

(x - y = 1) .... (2)

الحل //

- التعبير عن أحد المتغيرين **(x او y)**

يمكننا إعادة صياغة إحدى المعادلتين للتعبير عن أحد المتغيرين. لنبدأ بالمعادلة الأولى:

[2x + 3y = 6]

نقوم بحلها لـ (y)

[3y = 6 - 2x]

نقسم المعادلة على معامل y (3) للتبسيط

$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

اصبحت المعادلة الاولى على شكل قيمة لـ y :

الآن، نستخدم المعادلة الثانية (x - y = 1) لتعويض (y):

$$x - (2 - \frac{2}{3}x) = 1$$

نقوم بتبسيط المعادلة:

$$x - 2 + \frac{2}{3}x = 1$$

نرتب المعادلة ونجمع الحدود :

$$(1 + \frac{2}{3})x - 2 = 1$$

$$\frac{5}{3}x = 3$$

إيجاد قيمة (x) ، نضرب في $\frac{3}{5}$:

$$x = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}$$

إيجاد قيمة (y) ، نعود إلى المعادلة التي عوضنا فيها:

$$y = 2 - \frac{2}{3}\left(\frac{9}{5}\right)$$

نحسب:

$$y = 2 - \frac{18}{15} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{10}{5} - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

الحل للمعادلتين هو:

$$x = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{4}{5}$$

مثال3//

افترض أن لدينا المعادلتين:

(2x + 3y = 6)　　(المعادلة 1)
(4x - y = 5)　　(المعادلة 2)

جد قيم المتغيرات

الحل //
نحتاج إلى جعل معاملات أحد المتغيرين متساوية في كلا المعادلتين. لنفترض أننا نريد حذف المتغير(y). لذلك، يمكننا تعديل المعادلة 2 بحيث يصبح معامل(y) مساوياً لـ 3 (معامل(y) في المعادلة 1).

نضرب المعادلة 2 في 3:

[3(4x - y) = 3(5)]

وبذلك نحصل على:

[12x - 3y = 15]　　(المعادلة 3)

كتابة المعادلات المعدلة :

(2x + 3y = 6)　　(المعادلة 1)
(12x - 3y = 15)　　(المعادلة 3)

جمع المعادلتين :
نقوم الآن بجمع المعادلتين لإلغاء(y):
(2x + 3y) + (12x - 3y) = 6 + 15

هذا يعطي:

$$14x = 21$$

إيجاد قيمة(x):
نقسم على 14:

$$x = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

إيجاد قيمة (y) ,
* الآن نعود إلى إحدى المعادلتين في السؤال وليس المعدلة المعدلة لإيجاد (y). سنستخدم المعادلة 1:

$$2x + 3y = 6$$

نعوض عن(x):

$$2\left(\frac{3}{2}\right) + 3y = 6$$

نحسب:

$$3y = 6 + 3$$

نطرح 3 من كلا الجانبين:

$$3y = 3$$

نقسم على 3:

$$y = 1$$

الحل لنظام المعادلتين هو:

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = 1$$

ملاحظة :
- طريقة الحذف فعالة عندما تكون المعاملات بسيطة، ويمكن استخدامها مع أي عدد من المعادلات.
- يمكن استخدام طريقة الحذف لحل أنظمة تحتوي على أكثر من معادلتين أو متغيرين.

نشاط 1//

لنفترض أن لدينا المعادلتين:

$(3x + 2y = 12)$ (المعادلة 1)

$(5x - 4y = 1)$ (المعادلة 2)

جد قيم المتغيرات بطريقة الحذف والتعويض

الحل //

$$x = \frac{25}{11} \quad y = \frac{57}{22}$$

نشاط 2 //

لنفترض أن لدينا المعادلتين:

$(2x + 3y = 12)$............... (1)

$(4x - y = 5)$ .... (2)

جد قيم (x,y)

الحل //

$$x = \frac{27}{14}, \quad y = \frac{19}{7}$$

نشاط 3//

لنفترض أن لدينا المعادلتين:

$(x + 2y = 8)$ (المعادلة 1)

$(3x - y = 7)$ (المعادلة 2)

جد قيم المتغيرات

الحل //

$$x = \frac{22}{7}, \quad y = \frac{17}{7}$$

2- حل المعادلات الخطية بطريقة كرامر

أن طريقة كرامر لحل المعادلات الخطية من خلال تحويل المعادلات الى مصفوفات ،وهي طريقة تستعمل لحل نظام من المعادلات الخطية باستعمال المحددات ، إذ أن أستعمال طريقة كرامر مفيد جدًا عندما يكون لديك نظام معقد من المعادلات (معادلتين او اكثرتحتوي على اكثر من متغير ....x,y,z) .

إذ يمكن كتابة عدد من المعادلات تحتوي على اكثر من متغير

$$a11x1 + a21x2...... + a1nxn = b1$$
$$a21x1 + a22x2...... + a2nxn = b2$$
$$a31x1 + a32x2...... + a3nxn = b3$$
:
:

ويمكن تحول المعادلات الخطية الى مصفوفات

$$A \begin{bmatrix} a11 & a21.........a1n \\ a21 & a22.........a2n \\ a31 & a32.........a3n \end{bmatrix} \quad X \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ xn \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b3 \end{bmatrix}$$

AX=b

إذ أن :
-A يمثل صفوف واعمدة المعاملات .
-X يمثل عمود المتغيرات .
-b عمود الثوابت .

مثال 4//

أكتب المعادلات الخطية التالية بأستخدام صيغة المصفوفات

3x-y =5
x+2y=0
-x-5y=6

الحل //

AX=b

$$A \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

نشاط 4 //

أكتب المعادلات الخطية التالية بأستخدام صيغة المصفوفات

-3+5y-6z=15
3x+6y+12z=-2
x+z-y=5

مثال 5//

من المعادلات الخطية التالية :

(2x + 3y = 8) (المعادلة 1)
(4x - y = 2)   (المعادلة 2)

حد قيم المتغيرات بطريقة كرامر

الحل //

كتابة مصفوفة المعاملات :

نبدأ بكتابة مصفوفة المعاملات:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

حساب المحدد (D)

نحسب المحدد (D) للمصفوفة (A)

$$D_A = (2)(-1) - (3)(4) = -2 - 12 = -14$$

نكتب عمود الثوابت :

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لحساب المحددات الخاصة لكل متغيرمن خلال أبدال العمود الاول من مصفوفة المعاملات A بعمود الثوابت b

* حساب محدد (D_x)

$$D_x = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D_x = (8)(-1) - (3)(2) = -8 - 6 = -14$$

حساب محدد (D_y):

نستبدل العمود الثاني في مصفوفة المعاملات A بعمود الثوابت b

$$D_y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_y = (2)(2) - (8)(4) = 4 - 32 = -28$$

إيجاد قيم المتغيرات باستخدام كرامر

نحسب قيم المتغيرات:

$$x = \frac{/D_x/}{/D/} = \frac{/-14/}{/-14/} = 1$$

$$y = \frac{/D_y/}{/D/} = \frac{/-28/}{/-14/} = 2$$

قيم المتغيرات (x,y)

$$x = 1, \quad y = 2$$

*طريقة كرامر تعمل فقط إذا كان ($D \neq 0$).

مثال 5//

حل المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر

(3x + 4y = 10) (المعادلة 1)

(2x - 5y = -1) (المعادلة 2)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$D_A = (3)(-5) - (4)(2) = -15 - 8 = -23$$

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D_x = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$D_x = (10)(-5) - (4)(-1) = -50 + 4 = -46$$

$$D_y = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D_y = (3)(-1) - (10)(2) = -3 - 20 = -23$$

$$x = \frac{/D_x/}{/D/} = \frac{/-46/}{/-23/} = 2$$

$$y = \frac{/D_y/}{/D/} = \frac{/-23/}{/-23/} = 1$$

$$x = 2, \quad y = 1$$

نشاط 5//

لنفترض أن لدينا النظام التالي من المعادلات:

(x + 2y = 5) (المعادلة 1)
(3x - 4y = -2) (المعادلة 2)

جد قيم المتغيرات بطريقة كرامر

الحل :

$$x = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{17}{10}$$

نشاط 6//

لنفترض أن لدينا النظام التالي من المعادلات:

x + 2y + z = 9 1
2x - y + 3z = 1 2
3x + 4y - z = 7 3

ماقيمة كل من (x,y,z)

$$x = -2, \quad y = 4, \quad z = 3$$

الفصل السادس
التــفاضـل (مشتقة الدوال)

الفصل السادس / التـفاضـل (مشتقة الدوال)

اولاً // مفهوم التـفاضـل

يعد التفاضل فرع من فروع الرياضيات يهتم بدراسة تغير الدوال. المشتقة هي مفهوم أساسي في التفاضل، وتمثل معدل تغير الدالة بالنسبة لتغير المتغير المستقل. هنا بعض المفاهيم الأساسية حول المشتقات:

إذا كانت $f(x)$ دالة، فإن المشتقة $f'(x)$ تُعرَّف على أنها:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ثانياً // قواعد المشتقات الأساسية

1. قاعدة القوة

إذا كانت

$$f(x) = x^n$$

إذ أن ، (n) عدد حقيقي، فإن:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

2. قاعدة الجمع والطرح

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين، فإن:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

3. قاعدة الضرب

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين، فإن:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4. قاعدة القسمة

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين، فإن:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

5. مشتقات الدوال الأساسية

- مشتقة الثابت (c) = صفر

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

- مشتقة المتغير (x) =1
-

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

مثال 1//

احسب المشتقة للدالة

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 5$$

الحل//

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 1$$

مثال 2//

احسب مشتقة الدالة

$$h(x) = (2x^3 + 1)(x^2 - 3)$$

الحل //

نستخدم قاعدة الضرب:

$$h'(x) = (6x^2)(x^2 - 3) + (2x^3 + 1)(2x)$$

بعد التبسيط:

$$h'(x) = 6x^4 - 18x^2 + 4x^3 + 2x$$

*عند الضرب تجمع الاسس

مثال 3//

احسب مشتقة الدالة

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$$

الحل //

تطبيق قاعدة القسمة

$$h'(x) = \frac{(2x)(x - 2) - (x^2 + 1)(1)}{(x - 2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$$

مثال 4//

احسب مشتقة الدالة

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

الحل //

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^3 - 1) - (x^2 + 1)(3x^2)}{(x^3 - 1)^2}$$

$$(2x)(x^3 - 1) = 2x^4 - 2x$$

$$(x^2 + 1)(3x^2) = 3x^4 + 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 2x - (3x^4 + 3x^2)}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 2x - 3x^4 - 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 - 2x}{(x^3 - 1)^2}$$

لذا، فإن مشتقة الداله

$$f'(x) = \frac{-x^4 - 3x^2 - 2x}{(x^3 - 1)^2}$$

نشاط 1//

احسب مشتقة الدالة:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

الحل //

$$f'(x) = \frac{2x^4 + 6x^2 + 8x}{(x^2 + 1)^2}$$

نشاط 2//

احسب مشتقة الدالة:

$$f(x) = (3x^2 + 2)(x^3 - 5)$$

الحل //

$$f'(x) = 15x^4 + 6x^2 - 30x$$

نشاط 3//

احسب مشتقة الدالة:

$$f(x) = (x^2 + 2x)(x - 3) + (4x + 1)$$

الحل //

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$$

الفصل السابع
التــكامل

الفصل السابع / التــكامل

اولاً // مفهوم التكامل

يعد التكامل فرع من فروع الرياضيات يهتم بإيجاد المساحة تحت منحنى دالة أو تحديد الدالة الأصلية (المتعددة) لدالة معينة.

يرمز له بالرمز

$$\int f(x)\,dx$$

تكامل الدالة هي العملية التي تعكس الاشتقاق.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

حيث $F(x)$ هي الدالة الأصلية وC هو ثابت التكامل.

ثانياً // قواعد التكامل الأساسية

ـ قاعدة القوة

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

ـ تكامل الثوابت

$$\int c\,dx = cx + C$$

ـ قاعدة الجمع والطرح

$$\int f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

مثال1//

احسب التكامل:

$$\int (x^2 + 3x)\,dx$$

الحل//

$$= \int x^2\,dx + \int 3x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$$

مثال 2//

احسب التكامل:

$$\int (2x^3 - 4x^2 + 5)\,dx$$

الحل //

نفصل التكامل الى اجزاء

$$\int (2x^3 - 4x^2 + 5)\,dx = \int 2x^3\,dx - \int 4x^2\,dx + \int 5\,dx$$

الجزء الاول :

$$\int 2x^3\,dx$$

$$\int 2x^3\,dx = 2 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} = 2 \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{1}{2}x^4 + C$$

الجزء الثاني:

$$-\int 4x^2\,dx$$

$$-\int 4x^2\,dx = -4 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} = -4 \cdot \frac{x^3}{3} = -\frac{4}{3}x^3 + C.$$

الجزء الثالث:

$$\int 5\,dx$$

$$\int 5\,dx = 5x + C$$

لذا، فإن التكامل هو:

$$\int (2x^3 - 4x^2 + 5)\,dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5x + C.$$

مثال 3//

احسب التكامل:

$$\int (2x)(3x^2+1)\,dx$$

الحل //

نقوم بتوزيع الضرب داخل التكامل:

$$\int (2x)(3x^2+1)\,dx = \int (6x^3+2x)\,dx$$

يمكننا فصل التكامل إلى جزئين:

$$\int (6x^3+2x)\,dx = \int 6x^3\,dx + \int 2x\,dx$$

الجزء الأول:

$$\int 6x^3\,dx$$

$$\int 6x^3\,dx = 6\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} = 6\cdot\frac{x^4}{4} = \frac{3}{2}x^4 + C_1$$

الجزء الثاني:

$$\int 2x\,dx$$

$$\int 2x\,dx = 2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} = 2\cdot\frac{x^2}{2} = x^2 + C_2$$

لذا، فإن التكامل هو:

$$\int (2x)(3x^2+1)\,dx = \frac{3}{2}x^4 + x^2 + C$$

نشاط 1//

احسب التكامل:

$$\int (x^2)(2x^2+3)\,dx$$

الحل

$$dx = \frac{2}{5}x^5 + x^3 + C$$

نشاط 2//

احسب التكامل:

$$\int (x^2+1)(x^3+2)^2\,dx$$

الحل //

$$dx = \frac{x^9}{9} + \frac{x^7}{7} + \frac{2}{3}x^6 + C$$

مثال4//

احسب التكامل:

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2}\,dx$$

الحل //

يمكننا إعادة كتابة الكسر عن طريق فصل الحدود:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

و هذا يعطينا:

$$= 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

الآن يمكننا كتابة التكامل بالشكل الجديد:

$$\int \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

حساب التكامل لكل حد

- حد الأول

$$\int 1\, dx = x$$

- الحد الثاني

$$\int \frac{2}{x}\, dx = 2\ln|x|$$

- الحد الثالث

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2}\, dx = x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

مثال 4//

احساب التكامل للدالة التالية

$$\int \frac{6x^5 - 3x^2}{x^2}\, dx,$$

الحل//

$$\frac{6x^5 - 3x^2}{x^2} = \frac{6x^5}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} = 6x^3 - 3$$

$$\int (6x^3 - 3)\, dx.$$

- الحد الأول

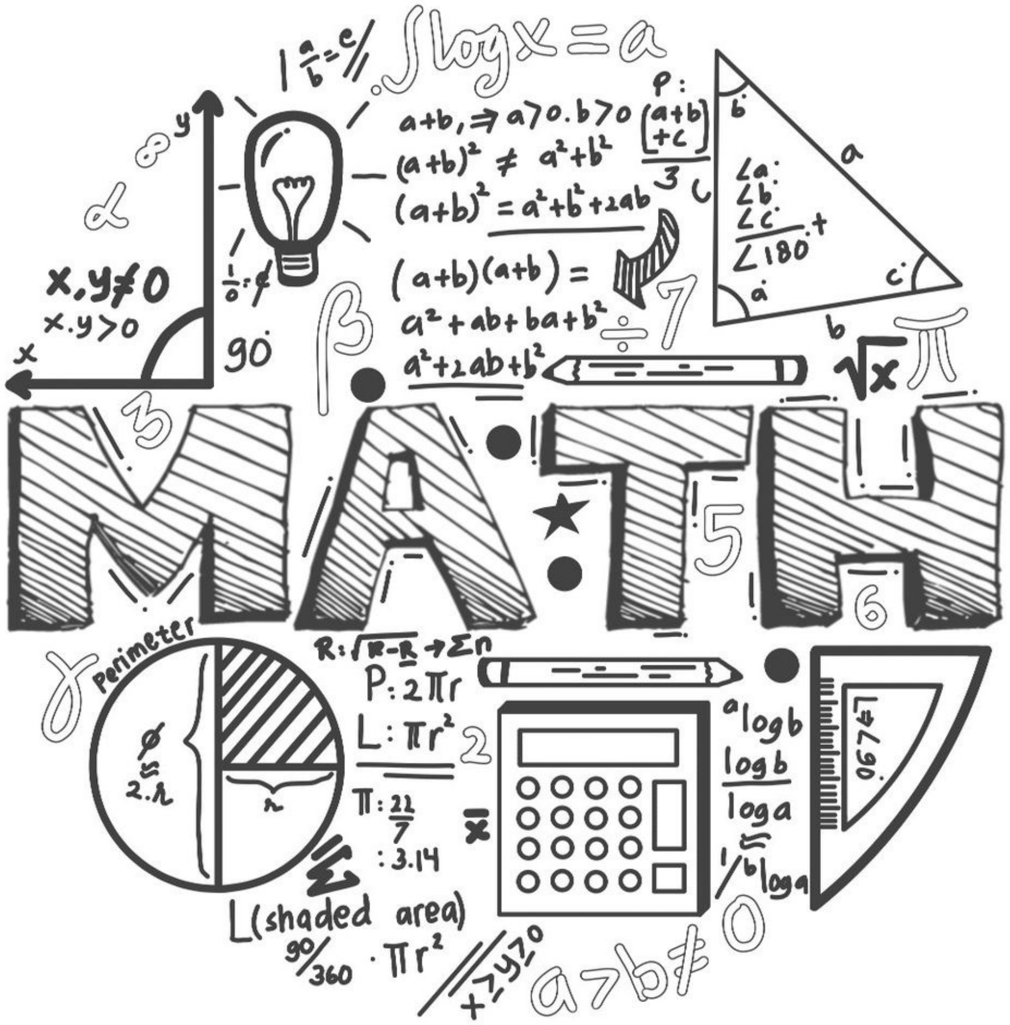
$$\int 6x^3\, dx = 6 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} = 6 \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{3}{2}x^4.$$

- الحد الثاني

$$\int -3\, dx = -3x.$$

التكامل للدالة هو

$$\int \frac{6x^5 - 3x^2}{x^2}\, dx = \frac{3}{2}x^4 - 3x + C$$


MATH
log x = a
a+b, ⇒ a>0. b>0
(a+b)² ≠ a²+b²
(a+b)² = a²+b²+2ab
(a+b)(a+b) =
a² + ab + ba + b²
a²+2ab+b²
x,y≠0
x.y>0
90
Perimeter
P: 2πr
L: πr²
π: 22/7
: 3.14
L(shaded area)
90/360 · πr²
log b
log a
∠180
a>b≠0